

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство •

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy}, \\ 2y + x^2 = 9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.
5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{29}$, $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45^\circ$.
6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6, \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leq x \leq 19$, $3 \leq y \leq 19$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3|} \leq 0; \quad x \neq 0, \text{ т.к. иначе в знаменателе } 0.$$

$$\frac{x^2 - 2x + 1 - 4|x-1| + 4}{4x(x-3) + |x| \cdot |x-3|} \leq 0$$

~~(x-1)~~ $a^2 = |a|^2$, но в-м модуль

$$\frac{|x-1|^2 - 4|x-1| + 4}{4x(x-3) + |x| \cdot |x-3|} \leq 0$$

всегда ≥ 0

$$\frac{(|x-1|-2)^2}{4x(x-3) + |x| \cdot |x-3|} \leq 0$$

0 если:

$$x = 3; -1$$

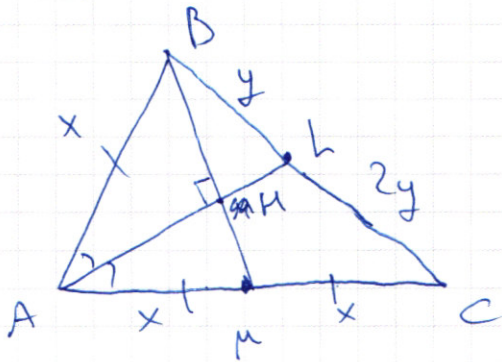
$$4x(x-3) + |x| \cdot |x-3| \leq 0$$

	0	3
$4x^2 - 12x + x^2 - 3x \leq 0$	$4x^2 - 12x - x^2 + 3x \leq 0$	$4x^2 - 12x + x^2 - 3x \leq 0$
$5x^2 - 15x \leq 0$	$3x^2 - 9x \leq 0$	$5x^2 - 15x \leq 0$
$x(x-3) \leq 0$	$x(x-3) \leq 0$	$x(x-3) \leq 0$
$x \in (-\infty; 0]$	$x \in [0; 3]$	$x \geq 3$, знака \uparrow всегда ≥ 0 . Подходит только $x = 3$

№1 продолж.

Ответ: $x \in \langle -\infty; 3 \rangle \setminus \{0\}$

№2



НУО биссектриса AL пересекается с BM — медианой в точке H .

▫ ABM — р/б, т.к. AH — биссектр. и высота
Значит $AM = AB = x$

По д-ву биссектрис: $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC} = \frac{1}{2}$

$$BL = y$$

По усл. $AB + BC + AC = 3(x+y) = 300$
 $x+y = 100$

$AB + AC > BL + LC$, по н-у тре-ки
 $3x > 3y$

$$x > y$$

$$BC + AC > AB$$

$$3y + 2x > x$$

$$3y + x > 0$$

выполняется всегда

$$AB + BC > AC$$

$$x + 3y > 2x$$

$$3y > x$$

ч

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 продолж.

$$\begin{cases} 1) 3y > x > y \\ 2) x+y = 100 \end{cases}$$

1) $4y > x+y > 2y$

Подставим из 2)

$$4y > 100 > y$$

$$2y > 50 > y$$

$$y \in \{26, 27, \dots, 49\}$$

при любых других y нарушается не-во

$$x \in \{74, 73, 72, \dots, 51\}$$

Каждому x соотв. y и всегда выполняются
н-ва: $3y > x > y$, а также $x+y = 100$ (берём
соотв. индексы во множестве)

Ответ: количество тре-ков — $49 - 26 + 1 = \boxed{24}$

№3

$$\begin{cases} 1) y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2) 2y + x^2 = 9 \end{cases} \quad \text{, учтём, что } y - 2x \geq 0 \text{ и возведём в квадраты}$$

$$(y - 2x)^2 = xy$$

$$y^2 - 5xy + 4x^2 = 0$$

$$(x-y)(4x-y) = 0, \quad \begin{cases} x=y \\ y=4x \end{cases}$$

из продолж.

Подставим в 2) y через x .

I $x=y$

$$x^2 + 2x - 9 = 0$$

$$x_1 = -1 + \sqrt{1+9} = -1 + \sqrt{10}$$

$$x_2 = -1 - \sqrt{10}$$

↑
не подходит, т.к. $x=y$ и
 $x-2y < 0$, что не может
быть

$$y = x = -(\sqrt{10} + 1)$$

II

$$y = 4x$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$(x-1)(x+9) = 0$$

$$\begin{cases} x=1 & ; & y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-9 & ; & y=-36 \end{cases}$$

← не подходит т.к. $y-2x < 0$,
а должно быть $y-2x \geq 0$

$$x=1 ; y=4$$

Ответ: $\begin{cases} x=1 ; y=4 \\ x=y = -(\sqrt{10} + 1) \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

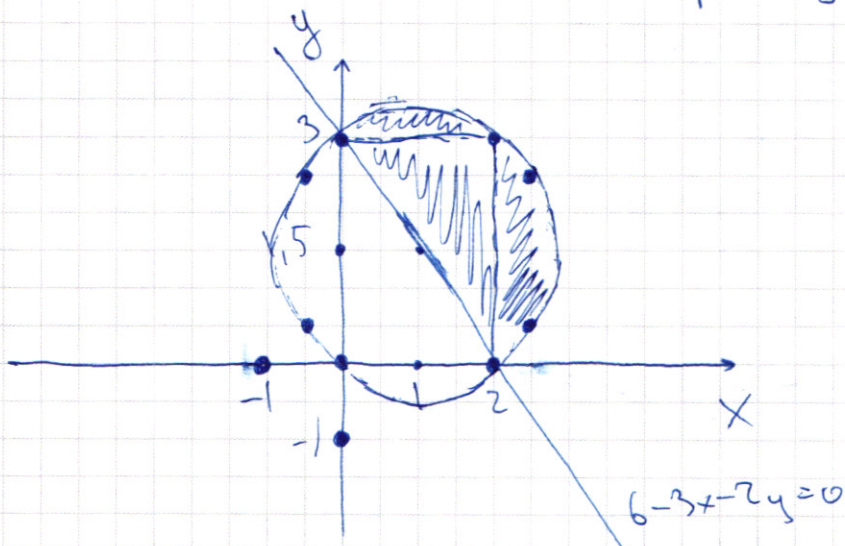
$$1) |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6$$

$$2) x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0$$

$$2) x^2 - 2x + 1 + y^2 - 3y + 2,25 \leq 3,25$$

$$(x-1)^2 + (y-1,5)^2 \leq 3,25$$

→ это круг с окружностью с центром
в $(1; 1,5)$ и радиусом $\sqrt{3,25}$



Я выдела точки, дальше которых окружность
не пройдет, т.к. расстояние равно радиусу, т.е.
одновременно $x, y < 0$ не может быть.

$$1) |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6$$

Если $x \geq 2$, то не-во всегда верно, т.к. $3x > 6$.

Если $x < -2$, то не-во тоже верно, но таких
 x нет на круге.

Если $y \geq 3$, то не-во всегда верно.

№6 продолж.

Аналогично если $x < -3$, то н-во верно, но таких точек нет ~~на отрезке~~ в круге.

Видим зону, которая только входит в овал
~~Разберём случаи, когда $-2 \leq x \leq 2$ и $-3 \leq y \leq 3$~~

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 3 \leq y \leq 3 \end{cases} \quad 3x + 2y \leq 6$$

$|6 - 3x - 2y|$ может раскрыться двумя способами:
I $6 - 3x - 2y$, тогда либо x , либо $y < 0$, тогда
выполнено н-во II) (или ~~x и y оба ≤ 0~~
либо x , либо $y \geq 0$)

$$\} y \geq 0, x \leq 0$$

$$6 - 3x - 2y + 2y - 3x = 6 - 6x > 6$$

$$\text{т.к. } x \leq 0$$

~~Это происходит редко~~

$$\} y < 0, x \geq 0$$

$$6 - 3x - 2y - 2y + 3x = 6 - 4y > 6$$

$$\text{т.к. } y < 0$$

Все это происходит, если $6 - 3x - 2y \geq 0$

~~Из картинки видно, что~~

$$\text{II} \quad 3x + 2y - 6, \text{ т.е. } 6 - 3x - 2y < 0$$

Чтобы был решен y н-ва I), либо x ,
либо $y \geq 0$ ~~или x , либо y не \leq~~

$$x \geq 0, y < 0$$

$$3x + 3x + 2y - 6 - 2y = 6x - 6 > 6; \quad x > 2$$

$$x < 0, y \geq 0$$

$$3x + 2y - 6 - 3x + 2y = 4y - 6 > 6; \quad y > 3$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ задачи

~~какая фигура~~ $x, y \geq 0$

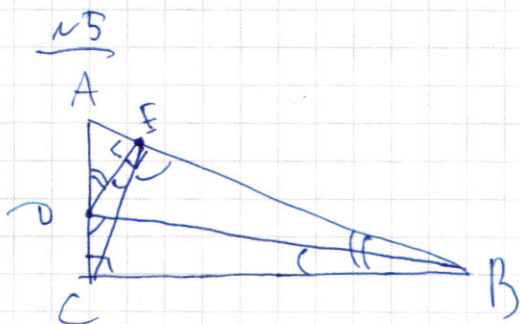
$$3x + 2y \geq 6$$

$$3x + 2y - 6 \geq 0$$

→ это та же область.

Значит площадь искомого фигуры → это
просто площадь полуокружности.

Ответ: $S = \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 3,25$



$\angle ADE = \angle ABC$, т.к. $\angle A$ общий и они параллельны.

$\triangle CDEB$ — впис., т.к. $\angle C = 90^\circ$

$$\angle ACB + \angle DEB = 180^\circ$$

$$\angle DBC = \angle DEC$$

$$\angle CDB = \angle CEB$$

отсюда на равн. дуги

$\triangle BCD$ — р/б

$$CD = DB$$

$$DC = CB = \sqrt{2}a$$

$$AD = AC - DC = \frac{3}{2} \sqrt{2}a$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{3}{2} ; \frac{DE}{AE} = \frac{2}{2}$$

17

$$1) f(a) = f(a \cdot 1) = f(a) + f(1)$$

$$\text{Значит } f(1) = 0$$

$$2) \cancel{f(a)} f(1) = f\left(\frac{a}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0$$

$$f(a) = -f\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$$

Если ~~a~~ $a \in \mathbb{N}$, то $f(a)$ — сумма простых сомножителей числа a .

Это легко доказать, заметив $a = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n}$

p_i — простое число, $a_i > 0$ — кол-во вхождений p_i в a

$$f(p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n}) = f(p_1) + f(p_1^{a_1-1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n}) =$$

$$= \dots = f(p_1) \cdot a_1 + f(p_2) \cdot a_2 + \dots + f(p_n) \cdot a_n =$$

$$= p_1 \cdot a_1 + p_2 \cdot a_2 + \dots + p_n \cdot a_n$$

Значит можно найти множество пар $3 \leq x, y \leq 19$, x, y которых разность сумм простых множителей x и y < 0 . Выпишем числа в порядке возрастания f .

$$f(3) < f(4) < f(5) = f(6) < f(8) < f(7) = f(10) = f(12) <$$

$$< f(15) = f(16) = f(18) < f(9) = f(14) < f(11) < f(13) < f(17) <$$

$$< f(19).$$

Теперь для каждого x найдём кол-во y , $f(x) - f(y) < 0$.
Заметим, что если $x, y \in \mathbb{N}$, то $\frac{x}{y} > 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

17 продолж.

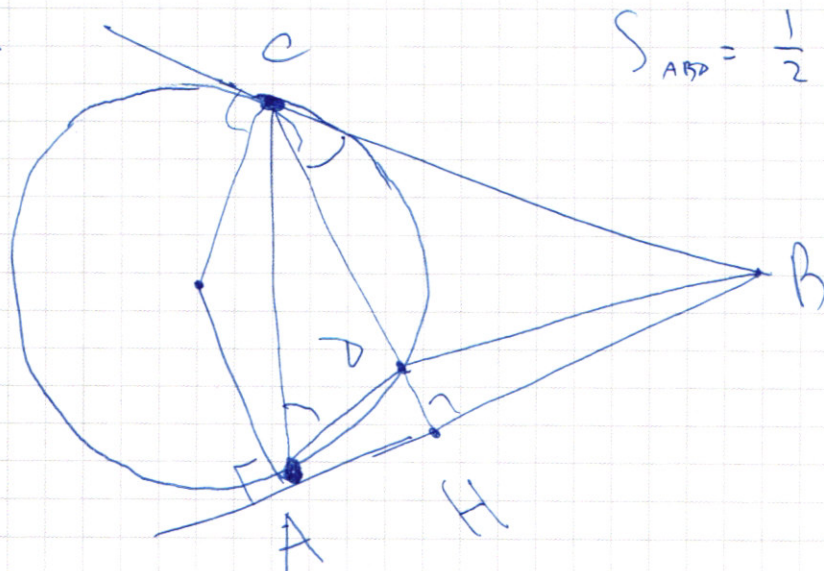
X	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
N_y	16	15	13	13	9	12	4	9	3	9	2	4	6	6	1	6	0

Знаки количество кар \rightarrow то сумма N_y :

$$\begin{aligned}
 & 16 + 15 + 13 + 13 + 9 + 12 + 4 + 9 + 3 + 9 + 2 + 4 + 6 + 6 + 1 + 6 = \\
 & = 31 + 26 + 21 + 13 + 12 + 6 + 12 + 7 = \\
 & = 57 + 34 + 18 + 19 = \\
 & = 91 + 37 = 128
 \end{aligned}$$

Ответ: 128.

14



$$S_{ABD} = \frac{1}{2} HD \cdot AB = 15$$

$$HD \cdot AB = 30$$

$\angle HCB = \angle CAN$, это т. о. углы между хордой и касательной. $AB = BC$, как отрезки касательной. Знаки $\triangle ABC \sim p/\delta$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(y - 4x)(y - x) = 0$
 $2y + x^2 = 9$

$0 \geq x \geq -2$
 $2 \geq y \geq 0$
 $0 \geq y \geq -3$
 $3x - 2y + 6 - 3x - 2y > 6$
 $-4y > 0$

1) $x^2 + 2x - 9 = 0$
 $y_{1,2} = x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+9} = -1 \pm \sqrt{10}$
 $y = x = -1 - \sqrt{10}$
 $2 \geq x \geq 0$
 $3 \geq y \geq 0$

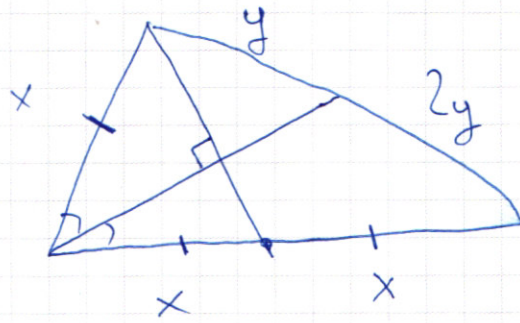
2) $x^2 + \frac{1}{2}x - 9 = 0$
 $y = \frac{1}{4}x$
 $D = \frac{1}{4} + 36$
 $x_{1,2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{36,25}}{2}$
 $\frac{1}{4}x - 2x = -\frac{3}{4}x$
 $x = -\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{36,25}{4}}$
 $y = \frac{1}{4}x$

$\pi r^2 - 6 = 3,25\pi - 6$

$$2y - 4x = 2\sqrt{xy}$$

$$2y + x^2 = 9$$

$$x^2 + 4x = 9 - 2\sqrt{xy}$$



$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 + 12x + |x| \cdot |x-3|} \leq 0$$

$$\frac{(x-1)^2 + 4 - 4|x-1|}{4x(x+3) + |x| \cdot |x-3|} \leq 0$$

$$\frac{(x-1)^2 - 4|x-1| + 4}{4x(x+3) + |x| \cdot |x-3|} \leq 0$$

$$\frac{(|x-1| - 2)^2}{4x(x+3) + |x| \cdot |x-3|} \leq 0$$

$$4x(x+3) + |x| \cdot |x-3| \leq 0$$

$$4x(x+3) + |x| \cdot |x-3| \leq 0$$

$$\begin{cases} x+y = 100 \\ 3y > x > y \end{cases}$$

$$3y > x > y$$

$$\begin{cases} x+y = 100 \\ 3y > x > y \end{cases}$$

$$4y > 100 > 2y$$

$$\begin{matrix} x=3 & 0 \\ x=-1 & 0 \end{matrix}$$

$$2y > 50 > y$$

$$26 \dots 49$$

0

3

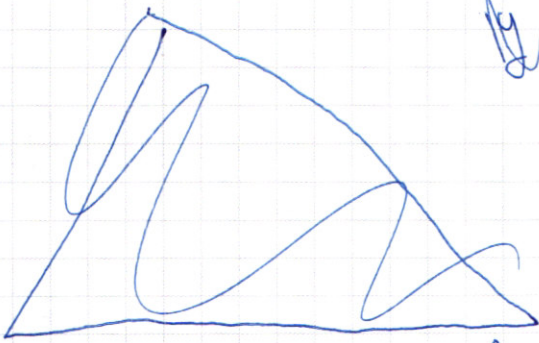
~~4x(x+3)~~
~~4x(x-3)~~

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 - 5xy + 4x^2 = 0 \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

$$(y - 4x)(y - x) = 0$$

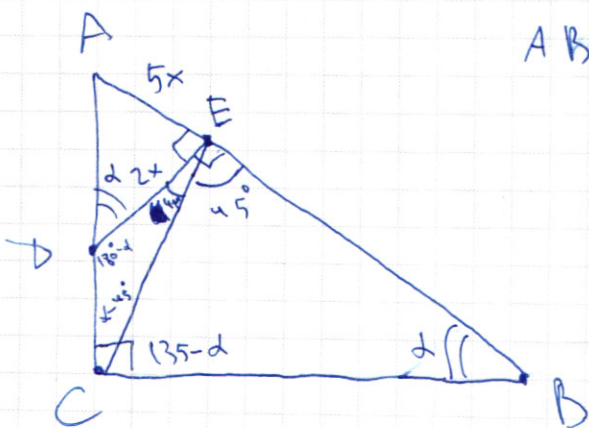
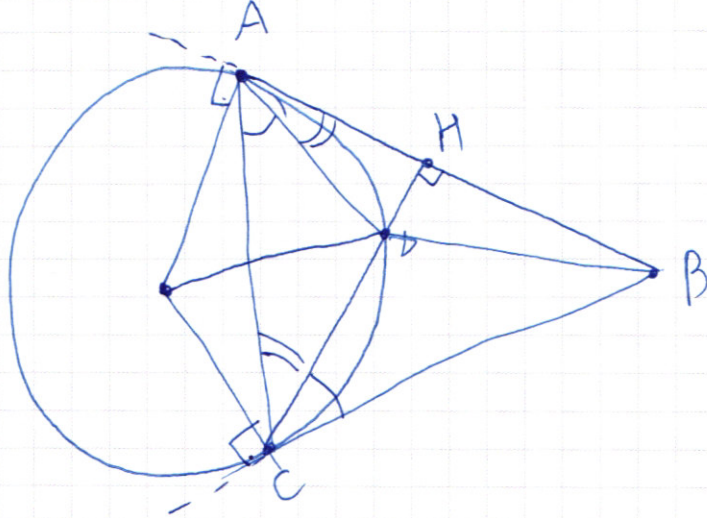
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



~~Handwritten scribbles~~

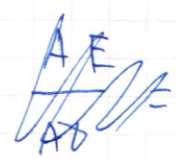
$$f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$$

$$HD \cdot \frac{1}{2} AB = 15$$

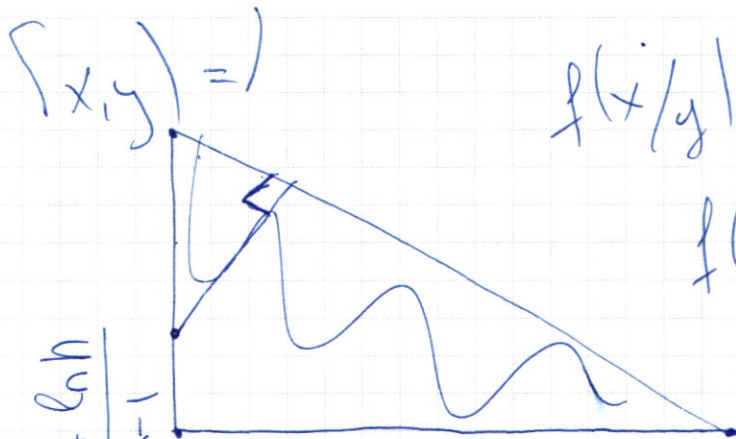


AB, AC, BC

$$\frac{AD}{AC} = ?$$



$$\frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{2}$$



$$f(x/y) = f(x) + f(y)$$

$$f(p) = f(p \cdot 1) = f(p) + f(1)$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} = \frac{5}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = 2 + f\left(\frac{1}{2y}\right) = 4 + f\left(\frac{1}{4y}\right) = 6 + f\left(\frac{1}{8y}\right) = \dots$$

$$\frac{AC}{AC} = 2^n + f\left(\frac{1}{2^n y}\right) = f\left(\frac{2^n}{2^n y}\right)$$

$$f\left(\frac{2^n}{2^n}\right) = 0 = f\left(\frac{2^n}{2^n y}\right)$$

$$|3x| + |2y| + |6-3x-2y| > 6$$

$$x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0$$

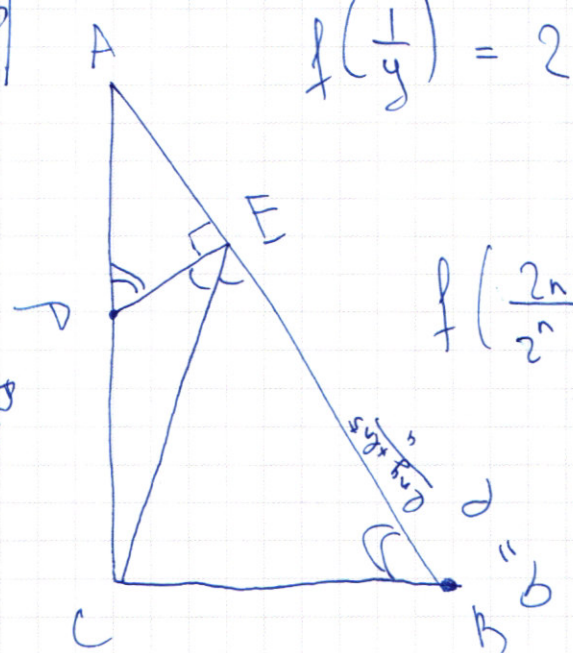
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 3y + 2.25 \leq 3.25$$

$$(x-1)^2 + (y-1.5)^2 \leq 3.25$$

$$f(0.5) = 4 + f\left(\frac{1}{2}\right) = 6 + f\left(\frac{1}{10}\right) = \dots$$

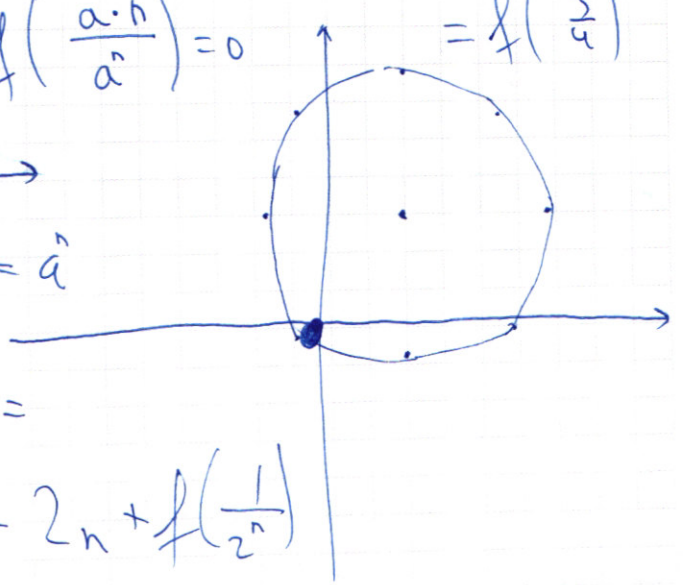
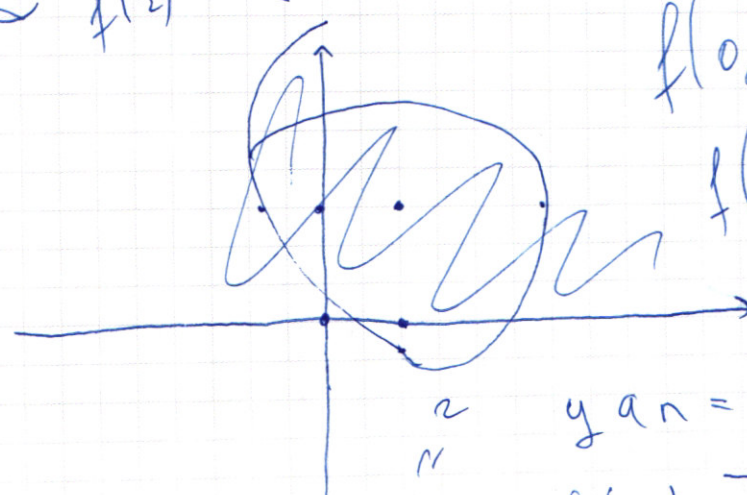
$$f\left(\frac{a \cdot n}{a^n}\right) = 0 = f\left(\frac{3}{4}\right)$$

$lny + lna + ln n = n \cdot lna$
 $lny \cdot lna = lna^n$



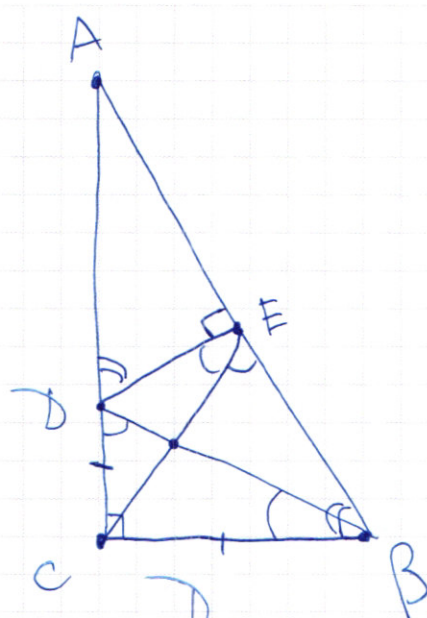
$f(1) = 0$
 $f(2) = 2$

$$f\left(\frac{x \cdot n}{x^n}\right) = 0$$



$$f(0.5) = f(2) + f\left(\frac{1}{4}\right) = 2 + f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2n + f\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

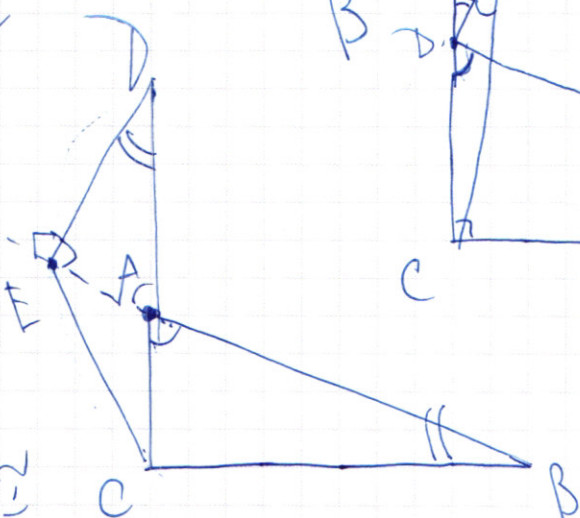
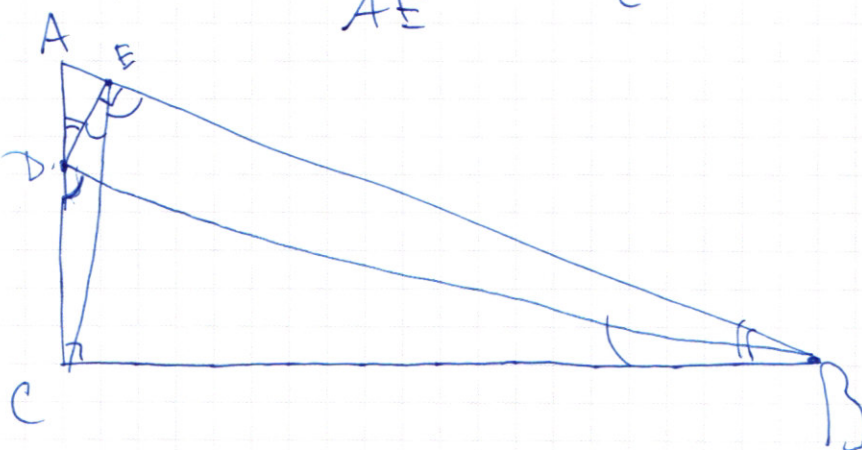


$$BC = \frac{5 \cdot \sqrt{29}}{2}$$

$$\frac{AD}{AC} = ?$$

$$AC = \sqrt{29}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} = \frac{5}{2}$$

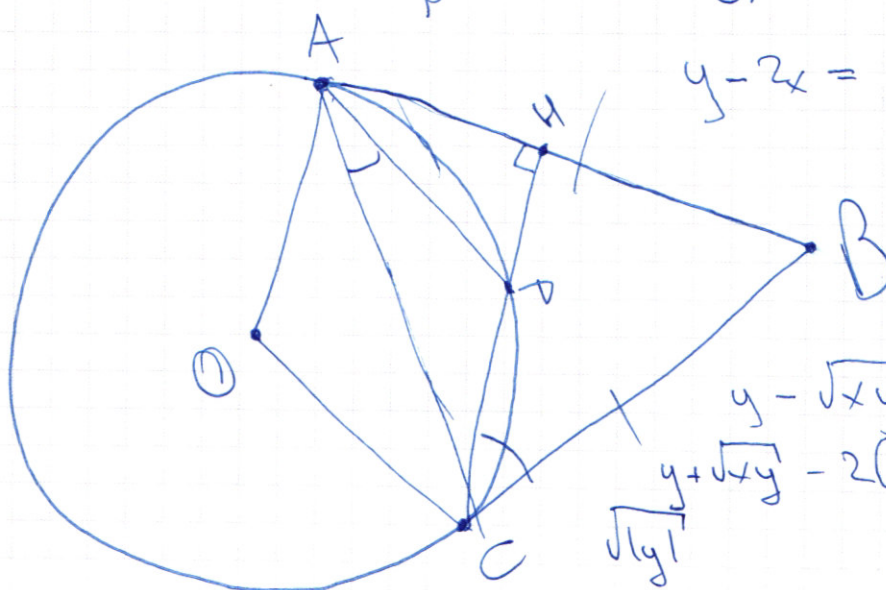


$$HD \cdot AB = 30$$

$$OA = 6$$

$$y - 2x = \sqrt{xy} \quad (*)$$

$$(\sqrt{10} + 1)^2 - 2\sqrt{6} - 2 = 10 + 1 - 2$$



$$y - \sqrt{xy} - 2x = 0$$

$$\sqrt{xy} \cdot y + \sqrt{xy} - 2(x + \sqrt{xy}) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{ay}\right) = f(a) + f(a) + f\left(\frac{1}{a^2y}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$$

$$f(a^n y) = n \cdot f(y)$$

$$f\left|\frac{1}{y}\right| = -f(y)$$

3 : 4, 5, 6, 7, 8 19

$$f\left(\frac{y}{y}\right) = f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$
$$f(y) = -f\left(\frac{1}{y}\right)$$

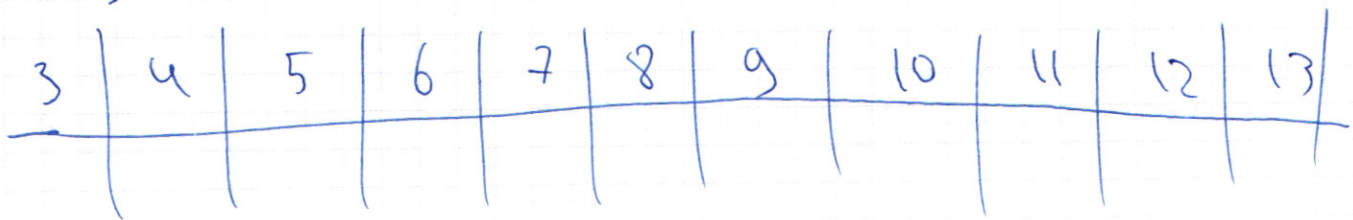
4 : 5, 6, 7, 8, 9 19

5 : 7, 8, 9, 10

3 < 4 < 5 = 6 < 8 < 7 = 10 < 9

3 < 4 < 5 = 6 < 8 < 7 = 10 = 12 <

3 < 4 < 5 = 6 < 8



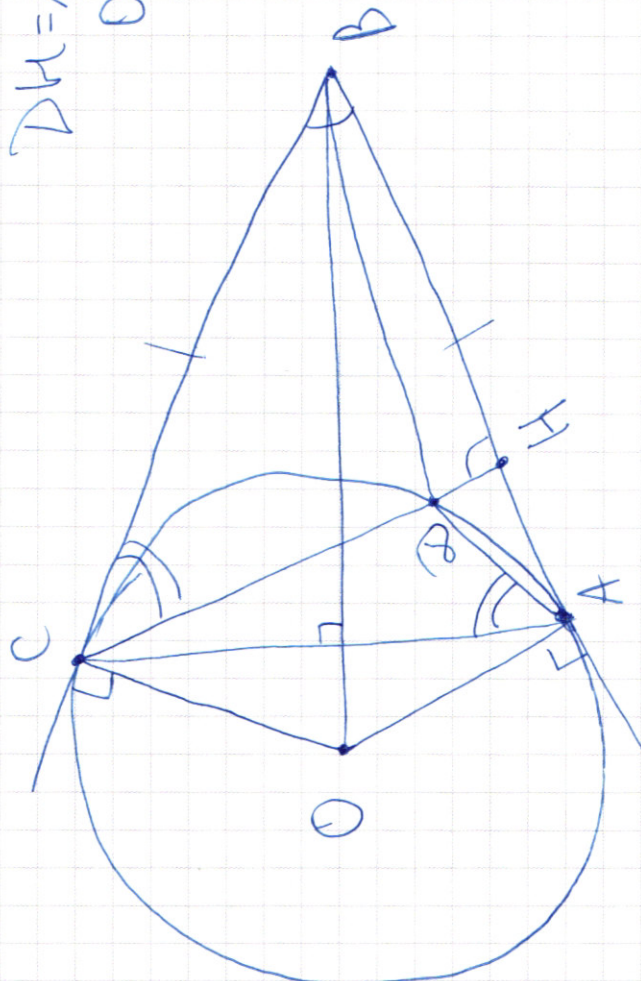
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

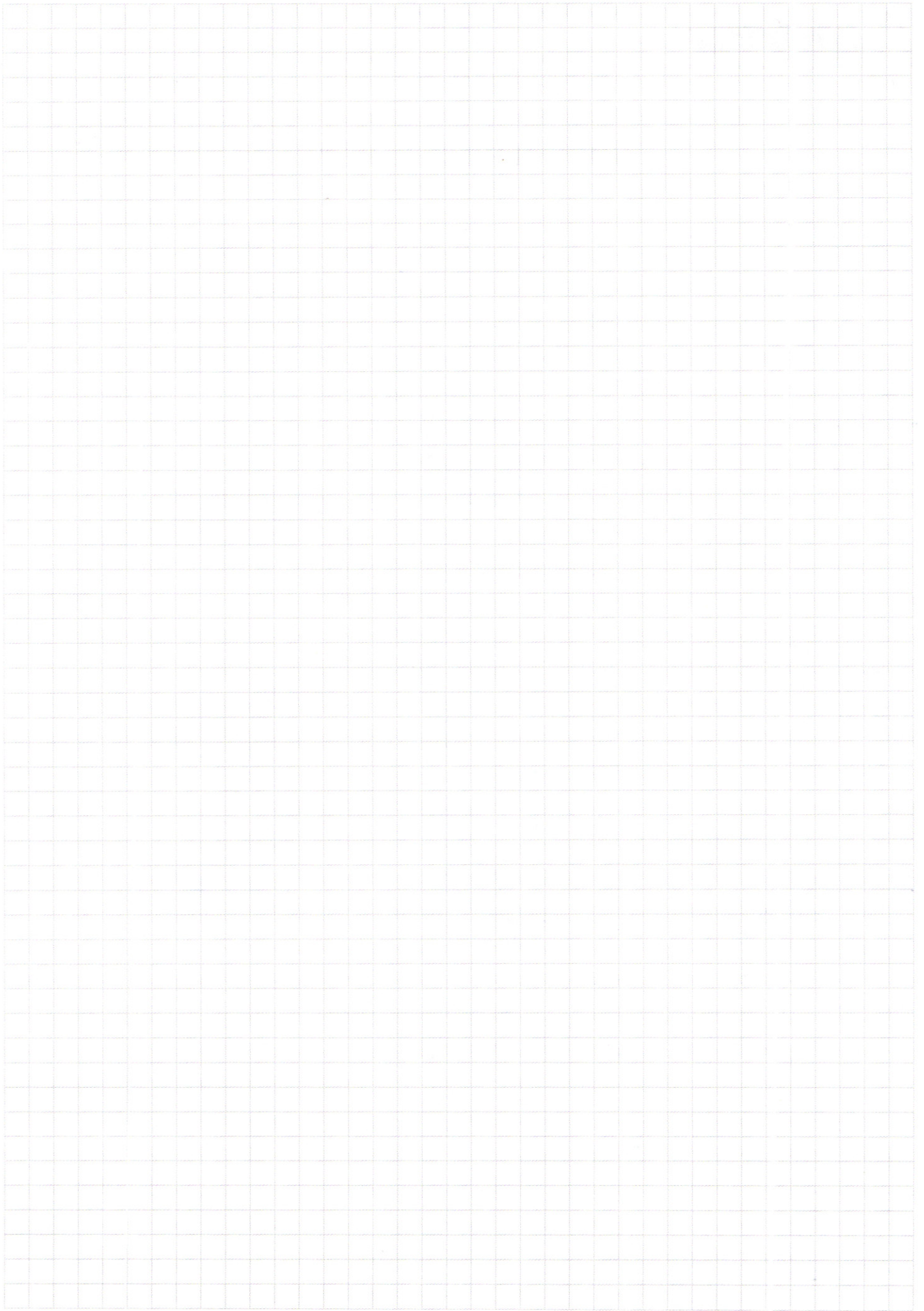
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
3	4	5	8	7	15	9	11	11	12	13	14	15	16	17	18	19
		6		10	16	14				13				17		19
				10	10	14										
				12												

3 < 4 < 5 = 6 < 8 < 7 = 10 = 12 < 15 = 16 = 19 < 11 < 13 < 17 < 19

$DH = AB = 30$
 $OC = 6$

$\frac{AB}{CH} = \frac{1}{\sin \alpha}$





черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)