МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC = \frac{5}{2}\sqrt{29}$, $BC = \frac{4\sqrt{29}}{4}$, а $\angle CED = 45°$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6, \\ x^2-2x-3y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 19$, $3 \leqslant y \leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leq 0$$

I) $4x^2-12x+|x||x-3|>0$

$\Rightarrow x^2-2x+5-4|x-1| \leq 0$

1) $x \geq 1$

$x^2-2x+5-4(x-1) \leq 0$

$x^2-6x+9 \leq 0$

$x^2-2\cdot 3x+3^2=(x-3)^2 \leq 0$

Также $(x-3)^2 \geq 0$, т.к. это чётная степень

$\Rightarrow (x-3)^2=0 \Rightarrow x=3$

Проверка: $x=3 \geq 1$

$4x^2-12x+|x||x-3| \overset{?}{>} 0$. Подставим $x=3$

$4\cdot 9-12\cdot 3+3\cdot 0=36-36=0$ ~~неверно~~ $\Rightarrow$ делим на 0

~~\Rightarrow для этого случая x=3.~~ $\Rightarrow$ данный ответ не подходит

2) $x \leq 1$

$x^2-2x+5-4(1-x) \leq 0$

$x^2-2x+5-4+4x \leq 0$

$x^2+2x+1 \leq 0$

$(x+1)^2 \leq 0$

Также $(x+1)^2 \geq 0$, т.к. четная степень

$\Rightarrow (x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1$

Проверка: $x=-1 \leq 1$

$4\cdot x^2-12x+|x|(x-3) \overset{?}{>} 0$. Подставим $x=-1$

$4\cdot(-1)^2-12\cdot(-1)+1\cdot 4=4+12+4=20>0 \Rightarrow$ верно

$\Rightarrow$ для этого случая $x=-1$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

II) $4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|<0$

$\Rightarrow x^2-2x+5-4|x-1|\geq 0$

1) $x\geq 1$

$x^2-2x+5-4(x-1)\geq 0$

$(x-3)^2\geq 0 \Rightarrow$ верно при любом x.

2) $x\leq 1$

Рассуждая аналогично I:

$(x+1)^2\geq 0 \Rightarrow$ верно при любом x

$\Rightarrow$ здесь ограничение накладывает само II условие. Решим это неравенство.

$4x^2-12x+|x||x-3|<0$

1) $x\geq 3$

$4x^2-12x+x(x-3)<0$

$5x^2-15x<0$

$x^2-3x<0 \Rightarrow x^2<3x$, $x>0 \Rightarrow x<3$ Противоречие.

2) $3\geq x\geq 0$

$4x^2-12x+x(3-x)<0$

$4x^2-12x+3x-x^2<0$

$3x^2-9x<0 \Rightarrow 3x^2<9x$, $x>0 \Rightarrow x<3$.

$\Rightarrow$ подходит для $0\leq x<3$.

3) $x\leq 0$

$4x^2-12x+(-x)(3-x)<0$

$4x^2-12x+(x^2-3x)<0$

$5x^2-15x<0 \Rightarrow x^2<3x$, $x<0 \Rightarrow x>3$ Противоречие.

Ответ: $x\in[0;3)$

$x=-1$.

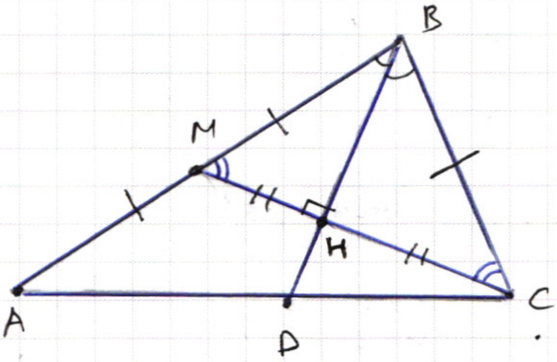
☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$P = 300$; целочисленные стороны. Биссектриса $\perp$ медиане. Сколько таких Δ?

Решение:



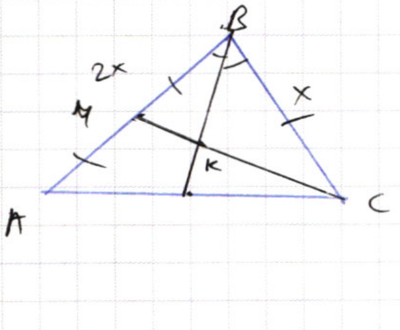
$\Delta MBH = \Delta CBH$, т.к. BH – общая

$\angle MBH = \angle HBC$, т.к. BD – биссектриса

$\angle MHB = \angle BHC = 90^\circ \Rightarrow BC = \frac{AB}{2}$

ΔMBC – равноб $\Rightarrow MH = HC$

Теперь проверим: достаточно ли того факта, что одна сторона в 2 раза больше другой в Δ, для того, чтобы утверждать, что у него одна из биссектрис $\perp$ медиане.



Проведем медиану к AB.

Биссектрису к AC

Δ MBC – равнобедр

BK – биссектриса

$\Rightarrow$ это высота $\Rightarrow BK \perp MC$

$\Rightarrow$ достаточно

$\Rightarrow$ данными Δ являются те, у которых одна сторона в 2 раза больше другой.

Пусть одна сторона △: x. Другая $2x$, третья y.

По условию: $x+2x+y=300$

$3x+y=300$.

Возможность существования △: выполнение нер-ва △.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+x>y \\ 2x+y>x \\ x+y>2x \end{cases} \quad \begin{cases} 3x>y \\ x+y>0 \\ y>x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x>y \\ y>x \end{cases}$$

$3x+y=300$.

$$\left.\begin{matrix} 300 \vdots 3 \\ 3x \vdots 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y \vdots 3. \quad \text{Пусть } y=3k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+k=100 \\ 3x>3k \\ 3k>x \end{cases} \qquad \begin{matrix} x+k=100 \\ x>k \\ k>\frac{x}{3} \end{matrix}$$

Если $x>k \Rightarrow k$ - может быть: $1, 2, \dots, 49$.

$k>\frac{x}{3} \Rightarrow k$ может быть: крайний случ. , $k=\frac{x}{3}$

$3k=x$

$\Rightarrow k+3k=100$

$k=25$

$\Rightarrow k>25$

$\Rightarrow 49 \geq k>25$

$x=100-k$

$\Rightarrow$ вариантов: $26, 27, \dots, 48, 49$

$\Rightarrow 49-26+1=50-26=24$

$\Rightarrow$ <u>Ответ: 24</u>

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$\sqrt{xy} \geq 0$, т.к. это арифм. корень.

$\Rightarrow y-2x \geq 0$

$\Rightarrow (\sqrt{xy})^2 = (y-2x)^2$ Потом надо будет проверить, что $xy \geq 0$, $y-2x \geq 0$

$xy = y^2+4x^2-4xy \Rightarrow y^2+4x^2=5xy$

$$\begin{cases} y^2+4x^2=5xy \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

Решим первое уравнение, как квадратное отн. x.

$4x^2-5y\cdot x+y^2=0$

$D = 25y^2-4\cdot4y^2 = 9y^2 = (3y)^2$

$\Rightarrow x = \frac{5y \pm 3y}{8} \Rightarrow x_1 = y$

$x_2 = \frac{y}{4}$

$x_1 = y$

1) $2y + x^2 = 9$

$2y + y^2 = 9$

$y^2+2y-9=0$

$(y+1)^2-10=0$

$(y+1)^2=10$

$\Rightarrow$ 1) $y+1=\sqrt{10} \Rightarrow y_1 = \sqrt{10}-1$

2) $y+1 = -\sqrt{10} \Rightarrow y_2 = (1+\sqrt{10})(-1)$

$x_2 = y/4$

2) $2y + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 9$

$2y + \frac{y^2}{16} = 9 \quad |\cdot 16$

$32y + y^2 = 9\cdot16 = 12^2 = 144$

$y^2+32y-144=0$

$D = 32^2+4\cdot144 =$

$32 \times 32 = 1024$; $144 \times 4 = 576$; $1024 + 576 = 1600$

$D = 80^2$

$y = \frac{\pm 80 - 32}{2}$

$\Rightarrow y_3 = 24$, $y_4 = -56$

Проверим данные 4 возможных ответа.

$y_1 = \sqrt{10} - 1$ $\quad y_3 = 4$ $\quad \cancel{y_4 = 24}$

$x_1 = \sqrt{10} - 1$ $\quad x_3 = 1$ $\quad \cancel{x_4 = 6}$

$y_2 = -1 - \sqrt{10}$ $\quad y_3 = -36$ $\quad \cancel{y_4 = -56}$

$x_2 = -1 - \sqrt{10}$ $\quad x_3 = -9$ $\quad \cancel{x_4 = -14}$

$\left(\frac{y}{4}\right)^2 + 2y - 9 = 0$

$\left(\frac{y}{4} + 4\right)^2 = 25$

1) $\frac{y}{4} + 4 = 5$

$\frac{y}{4} = 1 \Rightarrow \underline{y = 4}$

$\frac{y}{4} + 4 = -5 \Rightarrow$

$\underline{y = -36}$

Проверяем на огр. первого у-я.

$y - 2x = (\sqrt{10} - 1) - 2(\sqrt{10} - 1) = -(\sqrt{10} - 1) = 1 - \sqrt{10} < 0$

$\Rightarrow$ 1ый не подходит

$y - 2x = (-1 - \sqrt{10}) - 2(-1 - \sqrt{10}) = -(-1 - \sqrt{10}) = 1 + \sqrt{10} > 0$

$\Rightarrow$ подходит

$\cancel{y - 2x = 24 - 2 \cdot 6 = 12 > 0}$

~~$\Rightarrow$ подходит~~

$\cancel{y - 2x = -56 - 2 \cdot (-14) = -56 + 28 = -28 < 0}$

~~$\Rightarrow$ не подходит~~

$y - 2x = 4 - 2 \cdot 1 > 0$

$\Rightarrow$ подходит

$y - 2x = -36 - (-9) \cdot 2 =$

$= -18 < 0$

$\Rightarrow$ не подходит

Ответ: $x = y = -1 - \sqrt{10}$

$\cancel{x = 6}$

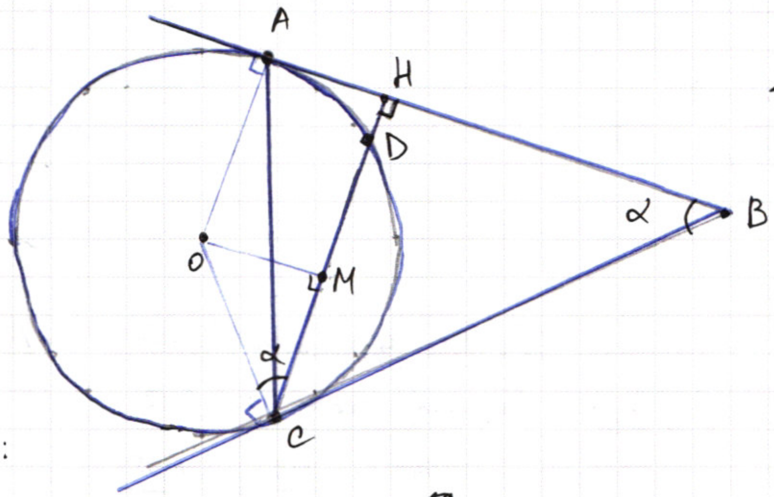
$\cancel{y = 24}$

$x = 1$

$y = 4$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



Найти: $AB : CH$, если
$S_{ABD} = 15$
$R = 6$

Решение:

$S_{ADB} = \dfrac{DH \cdot AB}{2}$

ΔABC - равнобедр, т.к. $AB = BC$, т.к. это касательные к окружности.

$S_{ACB} = \dfrac{CH \cdot AB}{2}$

Опустим высоту на CH.

Пусть $\angle HBC = \alpha \Rightarrow \angle HCB = 90 - \alpha \Rightarrow \angle OCM = \alpha$

В ΔHCB: $\sin\alpha = \dfrac{HC}{CB} = \dfrac{CH}{AB}$, т.к. $AB = BC$.

$AO = HM$, т.к. $OAHM$ - прямоуг, т.к. все углы по 90.

$$\cos\alpha = \frac{MC}{OC} = \frac{HC - HM}{OC} = \frac{CH - R}{R} = \frac{CH}{R} - 1$$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\left(\dfrac{CH}{AB}\right)^2 + \left(\dfrac{CH}{R} - 1\right)^2 = 1.$

Также можно заметить, что ΔCOD - равнобедр $\Rightarrow$ если OM - высота $\Rightarrow$ медиана $\Rightarrow CH = MD$

Пусть $CM = MD = x$.

$HD + x = R$

$CH = 2x + HD$

$CH = x + R$

$S_{ABD} = \dfrac{DH \cdot AB}{2}$

$$S_{ABD}=\frac{(R-x)\cdot AB}{2}=15 \qquad R=6$$

$$\left(\frac{R+x}{AB}\right)^2+\left(\frac{R+x}{R}-1\right)^2=1$$

$CH=R+x$
$HD=R-x$

$$\begin{cases}(R-x)\cdot AB=15\\ \left(\frac{R+x}{AB}\right)^2+\left(\frac{x}{R}\right)^2=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}(6-x)\cdot AB=15\\ \left(\frac{6+x}{AB}\right)^2+\left(\frac{x}{6}\right)^2=1 \quad |\cdot AB^2\end{cases}$$

В этих уравнения неувестно x и AB. Решив, найдем x и AB

Тогда $\frac{AB}{CH}=\frac{AB}{6+x}$

$$(6+x)^2+\frac{x^2}{36}\cdot AB^2=AB^2 \quad |\cdot 36$$

$$36\ (6+x)^2+x^2\cdot AB^2=36AB^2$$

$$36\ (x+6)^2=AB^2(36-x^2)=AB^2(6-x)(6+x)$$

$$36\ (x+6)=AB^2(6-x)$$

Из 1-ого уравнения: $AB(6-x)=15$

$$36\ (x+6)=15\cdot AB$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{x+6}=\frac{36}{15}=\frac{AB}{CH}$$

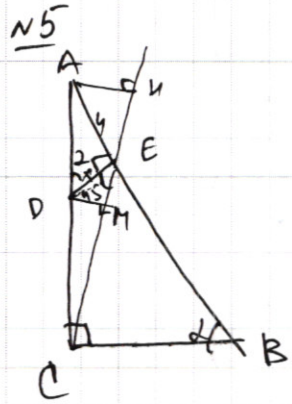
$$\frac{AB}{CH}=\frac{12}{5}$$

Ответ: $AB:CH=12:5$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



Продлим EC. Опустим высоты AH и DM.

$DE = x$, $AE = y$ $\Rightarrow$ $AH = \frac{y}{\sqrt2}$, $DM = \frac{x}{\sqrt2}$, т.к. углы 45, 45, 90.

$\Delta DCM \sim \Delta ACH$, т.к. $\angle ACH$ — общий, $\angle CMD = \angle CHA = 90°$.

$\Rightarrow \frac{CD}{AC} = \frac{DM}{AH} \Rightarrow \frac{AC - AD}{AC} = \frac{x/\sqrt2}{y/\sqrt2}$

$\cancel{\frac{AC}{CD} = \frac{y/\sqrt2}{x/\sqrt2} = \frac{y}{x}}$ $\cancel{\Rightarrow \frac{AD+DC}{DC} = \frac{AD}{DC}}$

$1 - \frac{AD}{AC} = \frac{x}{y}$

$AB^2 = AC^2 + CB^2$

$AB^2 = 28\left(1 + \frac{25}{4}\right) = \frac{28^2}{4}$

$\Rightarrow AB = \frac{28}{2}$

Пусть $\angle CBA = \alpha \Rightarrow \angle EDA = \alpha$

$tg\,\alpha_{\text{в } \Delta BCA} = \frac{AC}{CB} = \frac{5}{2}$

$tg\,\alpha_{\text{в } \Delta ADE} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$

$\boxed{\text{Ответ: } \frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}}$

$\sin\alpha_{\text{в } \Delta BAC} = \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{5}{2}\sqrt{28}}{\frac{28}{2}} = \frac{5}{\sqrt{28}} \Rightarrow$

$\sin\alpha_{\text{в } \Delta DAE} = \frac{y}{AD} \Rightarrow y = \frac{5}{\sqrt{28}} AD = \frac{15}{2}$

$S_{AED} = \frac{AE \cdot ED}{2}$

$\cos\alpha_{\text{в } \Delta BAC} = \frac{CB}{AB} = \frac{\sqrt{28}}{\frac{28}{2}} = \frac{2}{\sqrt{28}} \Rightarrow$

$\cos\alpha_{\text{в } \Delta DAE} = \frac{x}{AD} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{28}} AD = 3$

$S_{AED} = \frac{xy}{2} = \frac{\frac{5}{\sqrt{28}} \cdot \frac{2}{\sqrt{28}}}{2} \cdot AD^2$

$S_{AED} = \frac{5}{29} \cdot \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{2}\sqrt{28}\right)^2$

$S_{AED} = \frac{5}{28}\left(\frac{3}{2}\sqrt{28}\right)^2 = 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9 \cdot 5}{4} = \frac{45}{4} \Rightarrow \boxed{\text{Ответ: } S_{AED} = \frac{45}{4}}$

№7 (Продолжение).

Рассмотрим такие суммы для каждого числа:

$3 \Rightarrow \underline{3}$

$4 \Rightarrow 2+2 \Rightarrow \underline{4}$

$5 \Rightarrow \underline{5}$

$6 \Rightarrow 3+2 \Rightarrow \underline{5}$

$7 \Rightarrow \underline{7}$

$8 \Rightarrow 2+2+2 = \underline{6}$

$9 \Rightarrow 3+3 = \underline{6}$

$10 \Rightarrow 2+5 = \underline{7}$

$11 \Rightarrow \underline{11}$

$12 \Rightarrow 2+2+3 = \underline{7}$

$13 \Rightarrow \underline{13}.$

$14 \Rightarrow 2+7 = \underline{9}$

$15 \Rightarrow 3+5 = \underline{8}$

$16 \Rightarrow 2+2+2+2 = \underline{8}$

$17 \Rightarrow \underline{17}$

$18 \Rightarrow 2+3+3 = \underline{8}.$

$19 \Rightarrow \underline{19}$

$f(x) < f(y)$

Найдем кол-во случаев.

При $x = 3$: подходят все остальные y:

$\boxed{16 \text{ случаев.}}$

При $x=4$: подходят все ост. y:

$\boxed{15 \text{ случаев.}}$

При $x = 5$: подходят: $\boxed{13 \text{ сл.}}$

При $x=6$: $\boxed{13 \text{ сл}}$

При $x=7$: $\boxed{8 \text{ сл}}$

При $x = 8$: $\boxed{11 \text{ сл}}$

При $x = 9$: $\boxed{11 \text{ сл}}$

При $x=10$: $\boxed{8 \text{ сл}}$

При $x=11$: $\boxed{3 \text{ сл}}$

При $x=12$: $\boxed{8 \text{ сл}}$

При $x=13$: $\boxed{2 \text{ сл}}$

При $x=14$: $\boxed{4 \text{ сл}}$

При $x=15$: $\boxed{5 \text{ сл}}$

При $x=16$: $\boxed{5 \text{ сл}}$

При $x=17$: $\boxed{1 \text{ сл}}$

При $x=18$: $\boxed{5 \text{ сл}}$

При $x=19$: $\boxed{0 \text{ сл}}$

$\Rightarrow 16+15+13+13+8+11+11+8+3+8+2+4+5+5+1+5 =$

$= \underbrace{31+26}_{57} + 30 + 10 + 16 + 15 = 71+57 = 128 \Rightarrow \boxed{\text{Ответ: } 128}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№7.

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = p$

Найти кол-во пар: $3 \le x \le 19$, $3 \le y \le 19$ и $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

Решение:

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = \cancel{f(xy)} = f(xy) + f\left(\frac{1}{y^2}\right) = f(x) + f(y) + f\left(\frac{1}{y^2}\right)$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) - f\left(\frac{1}{y^2}\right) = f(y)$

$f\left(\frac{1}{y}\right) - \left(f\left(\frac{1}{y}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right)\right) = f(y)$

$\Rightarrow -f\left(\frac{1}{y}\right) = f(y)$

$\Rightarrow \boxed{f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)}$

$\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$

$\Rightarrow \boxed{f(x) < f(y)}$ – для этих иксов и y

$x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$

$y = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}$

$\Rightarrow \alpha_1 \cdot p_1 + \alpha_2 \cdot p_2 + \ldots + \alpha_n \cdot p_n < \beta_1 \cdot p_1 + \beta_2 \cdot p_2 + \ldots + \beta_n p_n$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~№5 (Продолжение).~~

$$\frac{CD}{AC} = \frac{DK}{AM}$$

$$\frac{CD}{AC} = \frac{\frac{x}{\sqrt{2}}}{\frac{y}{\sqrt{2}}}$$, т.к. углы в $\triangle AMC$ и $\triangle DKC$ = 45, 45, 90.

$$\frac{CD}{AC} = \frac{x}{y}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{AC-AD}{AC} = \frac{x}{y}$$

$$1 - \frac{AD}{AC} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{AD}{AC} = 1 - \frac{x}{y}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6 \\ x^2-2x-3y+y^2\le 0 \end{cases}$$

1) Пусть $x\ge 0$, $y\ge 0$ и $6-3x-2y\ge 0$

$\Rightarrow \quad 3x+2y+6-3x-2y>6$ –

такого быть не может.

2) Пусть $x\ge 0$, $y\ge 0$ и $6-3x-2y\le 0$

$3x+2y+3x+2y-6>6$

$\Rightarrow 3x+2y>6 \Rightarrow$ при $\boxed{3x+2y>6}$

3) Пусть $x\ge 0$, $y\le 0$ $\quad 6-3x-2y\ge 0$

$3x-2y+6-3x-2y>6$

$-4y>12$ $\Rightarrow$

$4y<12 \Rightarrow y<3$

Крайний случай: $x^2-2x-3y+y^2=0$

$x^2+y^2-2x-3y=0$ – ур-е отн x

$x^2-2x+(y^2-3y)=0$

$D=4-4(y^2-3y)=4-4y^2+12y=-(4y^2-12y-4)=$

$=-(4y^2-12y+9-13)=-((2y-3)^2-13)=13-(2y-3)^2\ge 0$

$\Rightarrow$ ограничение: $(2y-3)^2\le 13 \Rightarrow \begin{matrix} 2y-3\le\sqrt{13} \\ 2y-3\ge-\sqrt{13} \end{matrix}$

$$\frac{3-\sqrt{13}}{2} \le y \le \frac{\sqrt{13}+3}{2}$$

Теперь решим это уравнение от y.

$$y^2 - 3y + (x^2-2x) = 0$$

$$D = 9 - 4(x^2-2x) \ge 0$$

$\cancel{x^2-2x}$

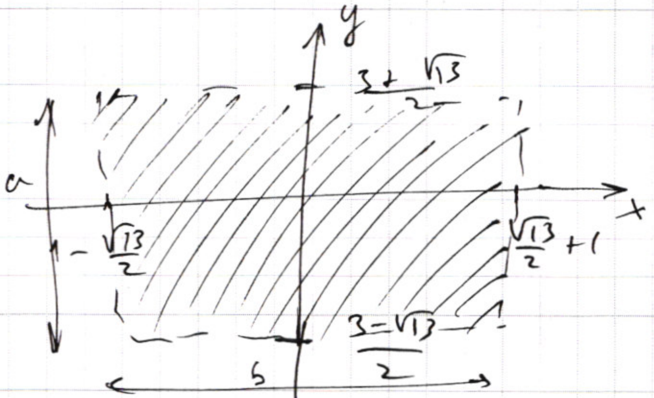
$$D = 9 - (4x^2+8x) = -4(x^2-2x+1)+13 \ge 0$$

$$-4(x-1)^2+13 \ge 0$$

$$13 \ge 4(x-1)^2$$

$$\frac{13}{4} \ge (x-1)^2$$

$$1-\frac{\sqrt{13}}{2} \le x \le \frac{\sqrt{13}}{2}+1$$



Это мы получили до использования 1-ого уравнения.

$$|3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6.$$

Возьмем наименьшее зн., чтоб проверить, будет ли это больше 6.

$0+0+6-0>6$ – нет $\Rightarrow$ точка $(0;0)$ выпадает,

а для остальных: $\left.\begin{array}{l} |3x|>0 \\ |2y|>0 \\ |6-\ldots|>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ сумма >6

$\Rightarrow$ площадь данной фигуры – квадрат.

$\Rightarrow$ $a = \frac{3+\sqrt{13}}{2} - \frac{3-\sqrt{13}}{2} = \frac{3+\sqrt{13}-3+\sqrt{13}}{2} = \sqrt{13}$

$b = \frac{\sqrt{13}}{2}+1-\left(1-\frac{\sqrt{13}}{2}\right) = \frac{\sqrt{13}}{2}+1-1+\frac{\sqrt{13}}{2} = \sqrt{13}$

$\Rightarrow S = ab = 13$ Ответ: 13

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6-3x-2y| > 6 \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \le 0 \end{cases}$

$|6-3x-2y| > 6 - |3x| - |2y|$

$x^2 + y^2 \le 2x + 3y$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№5 (Продолжение).

$$\begin{cases} \frac{AD}{\sqrt{29}} = \frac{x}{5} \\ \frac{AD}{\sqrt{29}} = \frac{y}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{2} \Rightarrow 2x = 5y$$

$$x^2 + y^2 = AD^2 \Rightarrow x^2 + \left(\frac{2}{5}x\right)^2 = AD^2$$

$$x^2\left(1+\left(\frac{2}{5}\right)^2\right) = AD^2$$

$$x^2\left(1+\frac{4}{25}\right) = AD^2$$

$$x^2\left(\frac{29}{25}\right) = AD^2$$

$$\frac{\sqrt{29}}{5}x = AD$$

$29 \times 25 = 145 + 58 = 725$

$725 / 4 = 181$ $\quad \frac{25 \times 29}{4}$

$29 \times 4 = 116$

Мы выяснили, что: $\frac{\sqrt{29}}{5} x = AD$

$2x = 5y$. Подставим в у-е для BD^2:

~~Пусть $x = 5k \Rightarrow y = 2k$~~

$$(5k)^2 + (14{,}5 - 2k)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot 29 + \left(\sqrt{29} - \sqrt{(5k)^2 + (2k)^2}\right)^2$$

$$25k^2 + 14{,}5^2 + 4k^2 - 4 \cdot 29k = \frac{25}{4} \cdot 29 + \left(\sqrt{29} - k\sqrt{29}\right)^2$$

$$\cancel{29k^2} + 14{,}5 - 116 = 181{,}25 + 29 + \cancel{29k^2} - 2 \cdot 29 \cdot k$$

$-4 \cdot 29k$

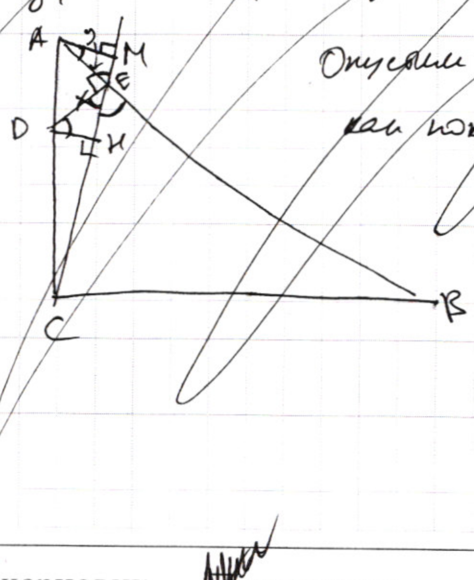
$$116 + 14{,}5 - 4 \cdot 29k = 181{,}25 + 29 - 2 \cdot 29k$$

$2 \cdot 29$

Воспользуемся тем, что угол $= 45^\circ$.

$x = \frac{5}{\sqrt{29}} AD$

$y = \frac{2}{\sqrt{29}} AD$



Опустим перпендикуляр, как показано на рисунке.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

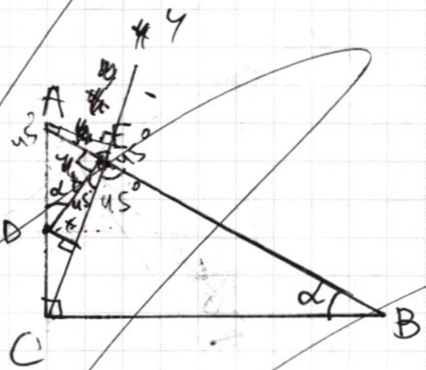
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.



$DE \perp AB$

$AD:AC$ – ?

$S_{\triangle AED}$ – ?

$AC = \sqrt{28}$

$BC = \frac{5}{2}\sqrt{28}$

$\angle CED = 45°$

Решение:

по т. Пифагора:

$AB^2 = BC^2 + AC^2$

$AB^2 = 28 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 28 = 28\left(1 + \frac{5^2}{4}\right) = 28\left(\frac{4+28}{4}\right) = \frac{29^2}{4} = \left(\frac{28}{2}\right)^2$

$AB = \frac{29}{2} = 14{,}5$

$DB^2 = DE^2 + EB^2 = BC^2 + CD^2$

Пусть $DE = x$ $\Rightarrow$ $x^2 + (14{,}5 - y)^2 = \left(\frac{5}{2}\sqrt{28}\right)^2 + \left(\sqrt{28} - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2$

$AE = y$

$\cos\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{5\sqrt{28}}{2 \cdot \frac{28}{2}} = \frac{5}{\sqrt{28}}$ – в $\triangle ACB$

$\cos\alpha = \frac{x}{AD}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{AD}{\sqrt{29}}$

$\Rightarrow \frac{x}{AD} = \frac{5}{\sqrt{28}} \Rightarrow \frac{AD}{\sqrt{28}} = \frac{x}{5}$

$\sin\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{28}}{\frac{28}{2}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$

$\sin\alpha = \frac{y}{AD} \Rightarrow \frac{y}{AD} = \frac{2}{\sqrt{28}} \Rightarrow \frac{AD}{\sqrt{29}} = \frac{y}{2}$

Главную т. Пифагора для $\triangle AED$: $x^2 + y^2 = AD^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

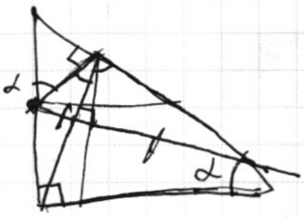
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$2y + \frac{y^2}{16} = 9$

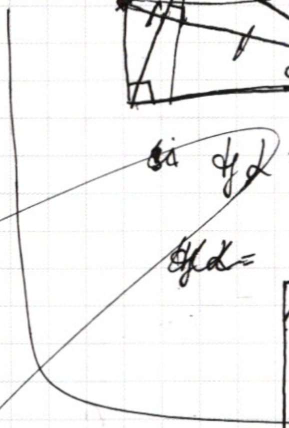
$\left(\frac{y}{4}\right)^2 + 2\cdot\frac{y}{4}\cdot \cancel{8} = \frac{y^2}{16} + 2y$

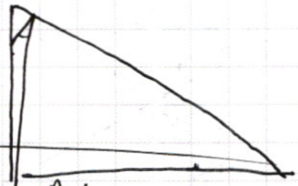
$\left(\frac{y}{4}\right)^2 + 2y + 4^2 = 0$



$\cancel{tg\,\alpha = \frac{\sqrt{29}}{\frac{5}{2}\sqrt{58}}}$

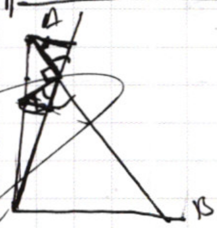
$\cancel{tg\,\alpha =}$





$\left(\frac{y}{4}\right)^2 + 2y + 16 - 25 = 0$

$\left(\frac{y}{4} + 4\right)^2 = 25$



$\frac{y}{4} + 4 = -25$

$\frac{y}{4} + 4 = 25$

$\frac{y}{4} = -29$

$y = -$

$\frac{y}{4} = 21$

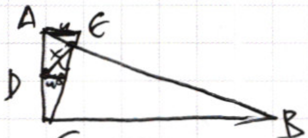
$y = 84$

$|6+x| =$

$= \cancel{6+|x|}$

$|6-3x-3y| > 6-|3x|-|3y|$

$6+|x| = |6+x|$

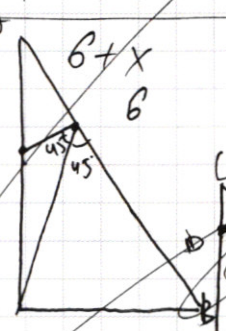


$x = -3$

$\cancel{6+|x|}$ $|6+x|$

$6+x$

6

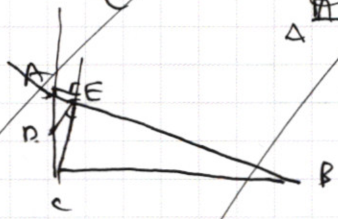


$\frac{y^2}{16} + 2y - 9 = 0$

$|6+x| = 6+x$ при

$\left(\frac{y}{4}\right)^2 + 2\cdot\frac{y}{4}\cdot 4 + 16 - 25 = 0$

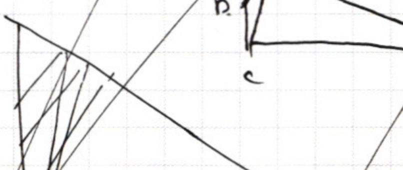
$\left(\frac{y}{4} + 4\right)^2 = 25$



$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p_1\cdot p_2\cdot p_3) = f(p_1) + f(p_2) + f(p_3)$

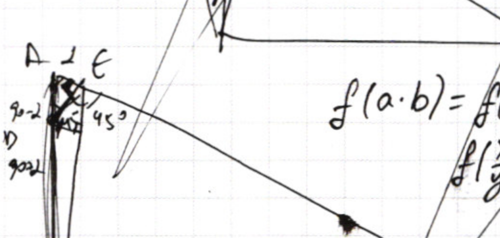
$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$



$x^2 + y^2 \le 2x + 3y$

$x(2-x) + y(3-y) \ge 0$

$f\left(\frac{1}{y}\right)$



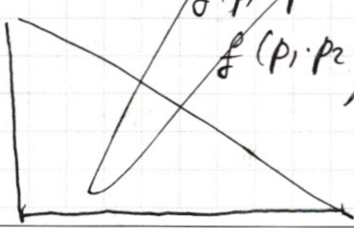
$f(a\cdot b) = f(a) + f(b)$ $x(2-x) \ge (y-3)y$

$\cancel{f\left(\frac{1}{y}\right) = f(1) + f(1)}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(p) = p$

$f(p_1\cdot p_2\cdot p_3) = p_1 + p_2 + p_3$

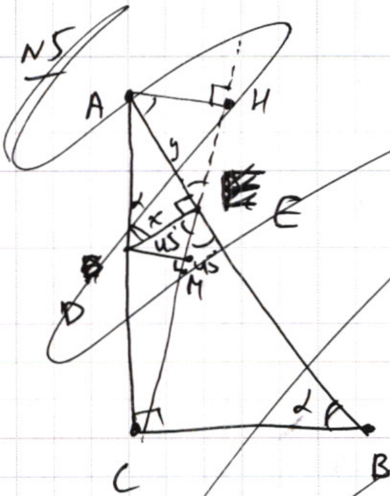


ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5



Проведём DC.
Пусть $ED = x$
$AD = y$

$\triangle ECM \sim \triangle ACH$, т.к. $\angle ACH$ – общий
$\angle EMC = \angle AHC = 90°$

$\Rightarrow \frac{EC}{AC} = \frac{EM}{AH}$

$$\frac{AC - AE}{AC} = \frac{\frac{x}{\sqrt{2}}}{\frac{y}{\sqrt{2}}}$$, т.к. углы в $\triangle DEM$ и $\triangle AHD$: 90, 45, 45

$$\Rightarrow 1 - \frac{AE}{AC} = \frac{x}{y}$$

Пусть $\angle CBA = \alpha \Rightarrow \angle AED = \alpha$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AC}{CB} = \frac{5}{2}$ – в $\triangle ACB$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$ – в $\triangle EDA$ $\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{5}$

$$1 - \frac{AE}{AC} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{3}{5}$$

Ответ: $\frac{AE}{AC} = \frac{3}{5}$

$AE = \frac{3}{5} \cdot AC = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{2}\sqrt{28} = \frac{3}{2}\sqrt{29}$

$\sin \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{5}{2}\sqrt{28}}{AB} =$

$~~AB^2 = AC^2 + BC^2 = (\sqrt{28})^2 (\ldots \frac{5^2}{4}) =~~$

$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 29 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 28$

$= \frac{\frac{5}{2}\sqrt{21}}{\frac{28}{2}} = \frac{5}{\sqrt{28}}$ – в $\triangle ACB$

$AB^2 = 29\left(\frac{28}{4}\right) = \left(\frac{28}{2}\right)^2 \Rightarrow AB = \frac{28}{2}$

$\sin\alpha = \frac{y}{AE}$ – в $\triangle AED$

$\Rightarrow y = AE \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{3}{2}\sqrt{29} \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{15}{2}$

$\cos\alpha = \frac{CB}{AB} = \frac{\sqrt{29}}{\frac{29}{2}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$ – в $\triangle ACB$

$\cos\alpha = \frac{x}{AE}$ – в $\triangle AED$

$x = AE \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{2}{\sqrt{29}} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{29} = 3$

$\frac{5}{\sqrt{29}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}\sqrt{29} =$

$= \frac{15}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)