МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30°$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\le 0$$

Раскроем все три модуля

$$\left[\begin{array}{ll} x<0; & \frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+(-x)(2-x)}\le 0 \\ 0\le x<2; & \frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x(2-x)}\le 0 \\ 2\le x<3; & \frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x(x-2)}\le 0 \\ 3\le x; & \frac{x^2-6x+10-2x+6}{2x^2-4x+x^2-2x}\le 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{при } x<0 & \frac{x^2-4x+4}{2x^2-4x-2x+x^2}\le 0 \\ \text{при } 0\le x<2 & \frac{x^2-4x+4}{2x^2-4x+2x-x^2}\le 0 \\ \text{при } 2\le x<3 & \frac{x^2-4x+4}{2x^2-4x+x^2-2x}\le 0 \\ \text{при } 3\le x & \frac{x^2-8x+16}{2x^2-4x+x^2-2x}\le 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{при } x<0 & \frac{(x-2)^2}{3x(x-2)}\le 0 \\ \text{при } 0\le x<2 & \frac{(x-2)^2}{x(x-2)}\le 0 \\ \text{при } 2\le x<3 & \frac{(x-2)^2}{3x(x-2)}\le 0 \\ \text{при } x\ge 3 & \frac{(x-4)^2}{3x(x-2)}\le 0 \end{array}\right.$$

Теперь для каждого запишем систему

при $x<0$: $\begin{cases} x=2 \\ x\ne 2 \\ x\ne 0 \\ x<0 \\ x\in(0;2) \end{cases} \Rightarrow x\in\varnothing$

это уже такая система

при $0\le x<2$ $\begin{cases} x=2 \\ x\ne 2 \\ x\ne 0 \\ x\in(0;2) \\ 0\le x<2 \end{cases} \Rightarrow x\in(0;2)$

при $2\le x<3$ $\begin{cases} x\ne 2 \\ x\ne 0 \\ x\in(0;2) \end{cases} \Rightarrow x\in\varnothing$

при $x\ge 3$ $\begin{cases} x\ne 0 \\ x\ne 2 \\ x=4 \\ x\in(0;2) \end{cases} \Rightarrow x\in\{4\}$

т.к. все в $\cup$ (объединении) $\Rightarrow x\in(0;2)\cup\{4\}$

Ответ: $x\in(0;2)\cup\{4\}$

№3

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

Давайте сначала запишем все ограничение, которые здесь есть:

Начнём с нижнего уравнения здесь очевидно, что $x\geq 0$ т.к. y^2 всегда ≥ 0 и $5\geq 0 \Rightarrow$ $x\geq 0$, также $x\leq 5$ т.к. $y^2\geq 0 \Rightarrow$

$0\leq x\leq 5$

в верхнем $x-2y\geq 0$ т.к. $\sqrt{xy}\geq 0 \Rightarrow$

$x\geq 2y$; так же $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq 0\\ y\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\leq 0\\ y\leq 0\end{cases}\end{array}\right.$, но мы выше

выяснили, что $x\geq 0 \Rightarrow$ $\begin{cases}x\geq 0\\ y\geq 0\end{cases}$

того имеем: $\begin{cases}0\leq x\leq 5\\ y\geq 0\end{cases}$, Далее давайте из нижнего выразим

$x=5-y^2$ и подставим в верхнее. имеем

$5-y^2-2y=\sqrt{xy}$

$y^2+2y-5=-\sqrt{xy} \Rightarrow y^2+2y-5\leq 0$

$y_1=-1-\sqrt{6} \Rightarrow 0\leq y\leq -1+\sqrt{6}$

$y_2=-1+\sqrt{6}$

$y^2+y-5=\sqrt{(5-y^2)y}$, и $y^2\leq 5$ т.к. $y\geq 0 \Rightarrow$ и $(5-y^2)\geq 0 \Rightarrow$

$y\leq\sqrt{5}$, того имеем.

$$\begin{cases}x\geq 2y\\ 0\leq \cancel{x}\leq 5\\ 0\leq y\leq\sqrt{5}\end{cases}$$

теперь решим уравнение:

$(y^2+2y-5)^2=(5-y^2)\cdot y$

$y^4+2y^3-5y^2+2y^3+4y^2-10y-5y^2-10y+25=5y-y^3$

$y^4+5y^3-6y-25y+25=0$ решим как Диафантово уравнение

$$\begin{array}{l|l} y^4+5y^3-6y^2-25y+25 & y-1 \\ \hline -y^4+ -y^3 & y^3+6y^2-25 \\ \quad 6y^3-6y^2 & \\ -6y^3-6y^2 & \\ \qquad -25y+25 & \\ \qquad -25y+25 \quad 0 & \end{array}$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(y^3+6y^2-25)(y-1)=0$

$(y-1)(y^2(y+5)+(y-5)(y+5))=0$

$(y-1)(y+5)(y^2+y-5)=0$

$D=1+20=21$ $\quad (y-1)(y+5)(y+\frac{1+\sqrt{21}}{2})(y-\frac{\sqrt{21}-1}{2})$

$y_1=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$ $\quad$ видим, что $y=-5$ и $y=-\frac{1+\sqrt{21}}{2}$ не являются корнями

$y_2=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$ $\quad$ т.к. $y \geq 0$, а $-5<0$ и $-\frac{1+\sqrt{21}}{2} \leq 0 \Rightarrow$

при $y=1$ $x=5-1 \Rightarrow x=4$ это полностью подходит под все условие $(4;1)$ первое решение

при $y=\frac{\sqrt{21}-1}{2}$ $x=5-\frac{(\sqrt{21}-1)^2}{4}=$

~~$=5-\left(\frac{20+2\sqrt{21}}{4}\right)=5-\left(5+\frac{1}{2}\sqrt{21}\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{21}$ то $-\frac{1}{2}\sqrt{21}\leq 0 \Rightarrow$ это решение не подходит, тогда мы имеем один корень~~

~~Ответ: $(4;1)$~~

$=5-\left(\frac{21-2\sqrt{21}+1}{4}\right)=5-\left(\frac{22}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{21}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{21}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{21}-1)$,

теперь надо проверить это с условием $x \geq 2y$

$\frac{1}{2}(\sqrt{21}-1) \vee \sqrt{21}-1$

$\frac{1}{2}(\sqrt{21}-1) < (\sqrt{21}-1) \Rightarrow$ не подходит тогда у нас одна пара

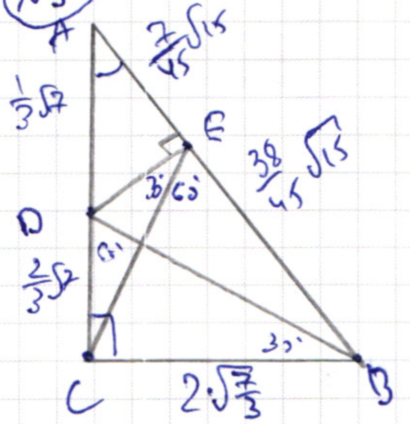
Ответ: $(4;1)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№5



Дано:

ABC - прям. треуг.

$DE \perp AB$

$AD:AC - ?$

$S_{\triangle}AED - ?$

$AC = \sqrt{7}$

$BC = 2\cdot\sqrt{\frac{7}{3}}$

$\angle CED = 30°$

1. Рассмотрим четырёхугольник CDEB

$\angle DCB = 90°$ по условию $\angle DEB = 180° - \angle AED = 90° \Rightarrow$

$\angle DCB + \angle DEB = 180° \Rightarrow$ во круг чет. CDEB можно описать окр.

2. проведём отрезок BD и получим, что $\angle DBC = \angle DEC$ т.к. они

они опираются на одну дугу $\Rightarrow \angle DBC = 30° \Rightarrow$

$tg \angle DBC = \frac{1}{\sqrt{3}}$

3. Рассмотрим прям. треуг. DBC в нём $\frac{DC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}} = tg \angle DBC \Rightarrow$

$DC = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 2\sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{7} \Rightarrow$

$AD = AC - DC = \sqrt{7} - \frac{2}{3}\sqrt{7} = \frac{1}{3}\sqrt{7} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{3}$

4. Рассмотрим $\triangle AED$ и $\triangle ABC$ они подобны т.к.

$\angle AED = \angle ACB = 90°$, $\angle CAB$ - общий $\Rightarrow$ подобны по трём углам $\Rightarrow$

$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$, найдём AB;

$AB^2 = AC^2 + CB^2$ (теорема Пифагора)

$AB^2 = 7 + 4\cdot\frac{7}{3} = \frac{21+4\cdot 7}{3} = \frac{45}{3} \Rightarrow AB = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}\sqrt{5}}{3} = \sqrt{15}$

$\frac{AD}{AB} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{7}}{\sqrt{15}} = \cancel{\quad} = \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{15}} \Rightarrow AE = \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{15}} \cdot AC = \frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}{3\sqrt{15}} = \frac{7}{3\sqrt{15}} = \cancel{\quad}$

$= \frac{7}{45}\sqrt{15}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. Найдём $\sin\angle CAB$

$$\sin\angle CAB = \frac{CB}{AB} = \frac{2\cdot\sqrt{7}\cdot 1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{15}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{45}} = \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5\cdot 7}}{15}$$

теперь найдём $S_{\Delta}AED$ как

~~$S_{\Delta}AED = \frac{1}{2}AD\cdot AE\cdot\sin\angle CAB = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\sqrt{7}\cdot\frac{7}{45}\sqrt{15}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{5}} =$~~

~~$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\sqrt{7}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{15}}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}\cdot 8\sqrt{7}}{2\cdot 3\cdot 3\sqrt{15}\cdot 3\sqrt{15}} =$~~

~~$\frac{7\cdot\sqrt{7}}{27\cdot 15} = \frac{7\sqrt{7}}{405}$~~

~~Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$; $S_{\Delta}AED = \frac{7\sqrt{7}}{405}$~~

$$S_{\Delta}AED = \frac{1}{2}\cdot AD\cdot AE\cdot\sin\angle CAB = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{7}{3\sqrt{15}}\cdot\frac{8\sqrt{7}}{3\cdot\sqrt{5}} =$$

$$\frac{7\cdot 7}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 5\sqrt{3}} = \frac{49}{45\sqrt{3}} = \frac{49\sqrt{3}}{45\cdot 3} = \frac{49\sqrt{3}}{135}.$$

Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$; $S_{\Delta}AED = \frac{49\sqrt{3}}{135}$

~~№6~~

~~$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4-2x-y| > 4 \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \le 0 \end{cases}$$~~

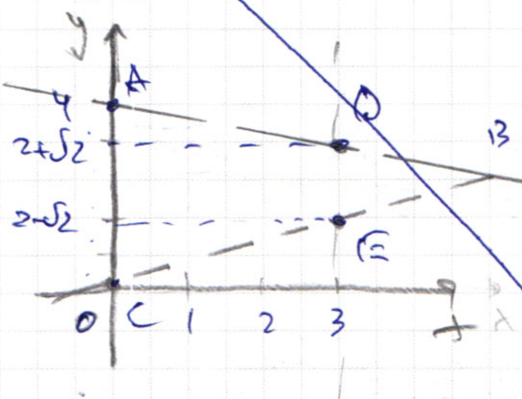
~~Давайте найдём какой диапазон y соответствует каким-то x~~

~~например при $x=0$ $y\in[0;4]$ (я просто решил систему подставив везде $x=0$~~

~~$$\begin{cases} y^2 - 4y \le 0 \\ |y| + |4-y| > 4 \end{cases} \quad \begin{cases} y\in[0;4] \\ \left[\begin{array}{l} y>0 \\ y>4 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow y\in[0;4]$$~~

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) при $x=3$ $y \in (2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2})$

$\begin{cases} y \in (2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2}) \\ \left[\begin{array}{l} y<0 \\ y>-2 \end{array}\right. \quad y \in (\alpha; +\infty) \end{cases} \Rightarrow y \in (2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2})$



(это схематичный рисунок)

Мы видим что длины одинаковы $\Rightarrow$ $\triangle ABC$ — р/б осн. AC

$4-2-\sqrt{2} = 2-\sqrt{2} = 2-\sqrt{2}$

Найдём значение x при $y=2$

$\begin{cases} 2|x| + 2|1-x| > 2 \\ x^2-2x-4 \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2|x| + 2|1-x| > 2 \\ x \in [1-\sqrt{5}; 1+\sqrt{5}] \end{cases}$

$D_1 = 1+4 = 5$

$x_1 = 1-\sqrt{5}$

$x_2 = 1+\sqrt{5}$

$x<0$ ~~...~~ $-4x>0$ $x<0$

$0 \leq x < 1$ $2x+2-2x>2$ $\varnothing$

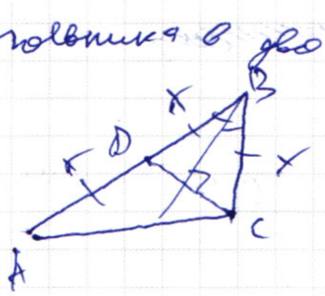
$1 \leq x$ $2x-2+2x>2$ $4x>4$ $x>1$

$x<0$

$0 \leq x$

$\sqrt{2}$

т.к. БИС $\perp$ ~~[illegible]~~ медиане $\Rightarrow$ одна из сторон этого треугольника в двое больше другой



треугольник $\triangle DBC$ — р/б т.к. бис. яв. высотой $\Rightarrow BC = DB = AD = x$, то

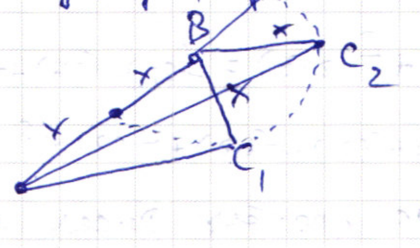
$AB+BC > 300 \Rightarrow 3x > 300$, но

$3x < 600 \Rightarrow 100 < x < 200$,

$x < AC < 3x$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

то есть при фиксированном x у нас для AC есть варианты:



, то есть в минимальном варианте $AC > x$ в максимальном $AC < 3x \Rightarrow x < AC < 3x$,

при этом $AC < 300$ т.к. если будет больше то не будет выполняться неравенство Δ

$x < AC < 300$

В общем случае все стороны треугольника ≥ 1 и < 300. Но длина любых двух сторон > 300 и < 600

$AC + AB + BC = 600 \Rightarrow AC + 3x = 600 \Rightarrow AC = 600 - 3x$

$$\begin{cases} 600 - 3x \geq 1 \\ 600 - 3x < 300 \end{cases}$$

Мы видим, что при фиксированном x AB и AC однозначны $\Rightarrow$ нам нужно найти возможно количество x при которых все числа целые, так же мы знаем, что

$2x < 300$ т.к. $AB < 300 \Rightarrow$

$x < 150 \Rightarrow$ $100 < x < 150$ того для x

у нас $150 - 100 - 1 = 49$ вариантов

то есть мы записали все условия и получили, что всего для x 49 вариантов $\Rightarrow$ и 49 различных треугольников. т.к. AB и AC и BC определяются однозначно.

Ответ: 49 вариантов.

№7

$f(ab) = f(a) + f(b)$ ~~пусть a и b какие-то нат. числа~~, то

$f(cd) = f(c) + f(d)$ пусть c и d — натуральные числа, то мы можем каждое из них представить в виде произведения простых чисел например:

$f(8\cdot 6) = f(8) + f(6) = f(2\cdot 4) + f(2\cdot 3) = f(2) + f(4) + f(2) + f(3) = f(2) + f(2\cdot 2) + f(3) + f(2) = f(2) + f(2) + f(2) + f(3) + f(2)$, а $f(p) = p \Rightarrow f(n)$ — это сумма простых чисел в виде которых мы можем представить само число n, а мы знаем, что любое натуральное n можно представить единственным способом в виде произведения простых ~~чисел~~

Значит что бы мы как нельзя было представить в виде произведения натуральных или иррациональных чисел и x и y должны быть простыми, если $x = 1$, тогда y — 7 вариантов: {1; 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17} когда $x = 2$ у нас 6 вариантов (кроме двойки =>) только когда $x = 1$ у нас 7 вариантов, для всех ост. по 6 вариантов

$7 + 7 \cdot 6 = 49$ вариантов

Ответ: 49 вариантов

~~что бы $f(n) < 0$ то оно не должно представляться в виде простых чисел =>~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

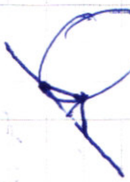
$2|x| + 2|x-1| > 2$

$x<-1$: $-2x-2x+2>2$ $\quad -4x>0 \quad x<0 \quad x<-1$

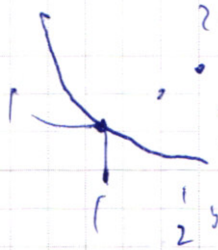
$-1<x<0$: $+2x+2x+2>2$ $\quad \varnothing$

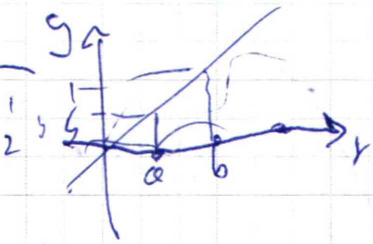
$0\le x$: $2x+2(x-1)>2$ $\quad x>1$

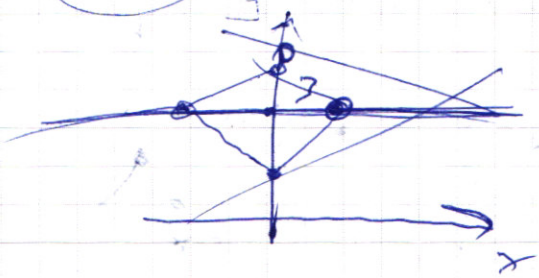
$2x+2x-2>2$



$f(ab) = f(a)+f(b)$







$\begin{cases} |y| + |4-y| > 4 \\ y^2-4y\le 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} |y|+|y-4|>4 \\ y\in[0;4] \end{cases}$

$f(p)+f(p)=f(p^2)$

$p+p=f(p^2)$

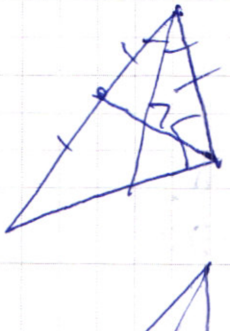
$2p=f(p^2)$

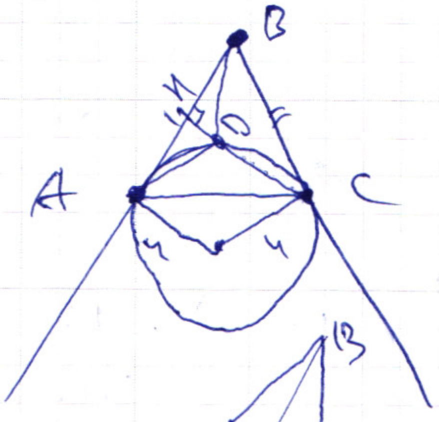
$y\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$

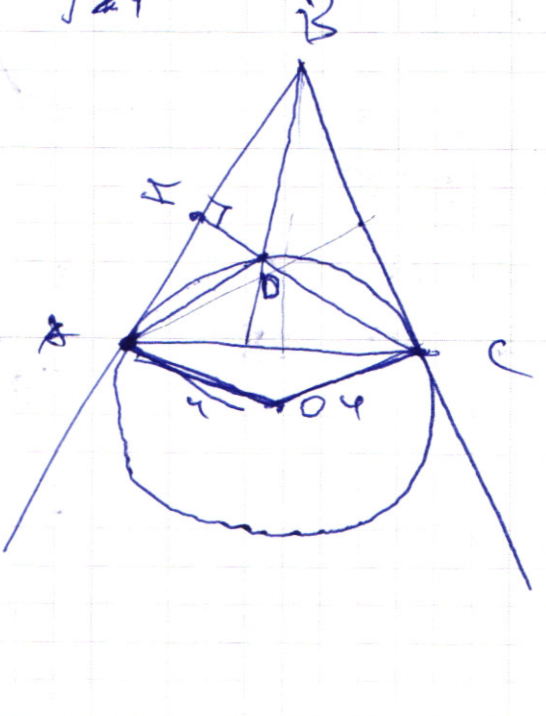
$y<0$: $-y-y+4>4$ $\quad -2y>0 \quad y<0$

$0\le y<4$: $y-y+4>0$ $\quad \varnothing$

$4\le y$: $y+y-4>4$ $\quad 2y>8 \quad y\ge 4$





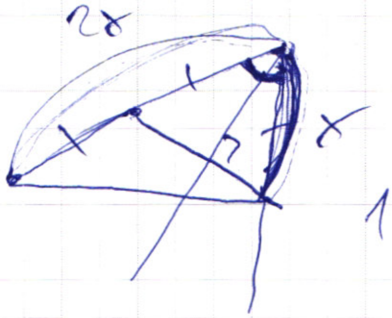


☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



любые из сторон треугольника не

$1 \ldots 200$

более

$300 \Rightarrow$

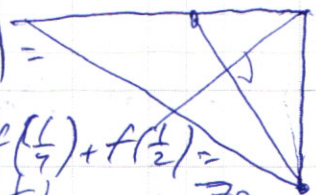
$1 \ldots 150$

$1 \le x < 2$

101

12

$(1 \ldots 20)$



$f(-\frac{7}{8}) =$

$f(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}) = f(\frac{1}{4}) + f(\frac{1}{2}) =$

$f(\frac{1}{2})$

$300 \le 3x \le 600$

$100 - 8$

2000

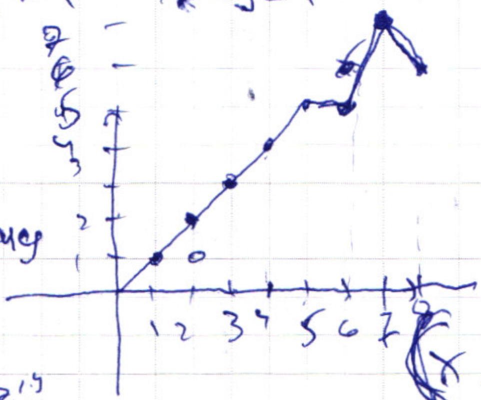
$100 \le x < 200$

$2x + y = 4$

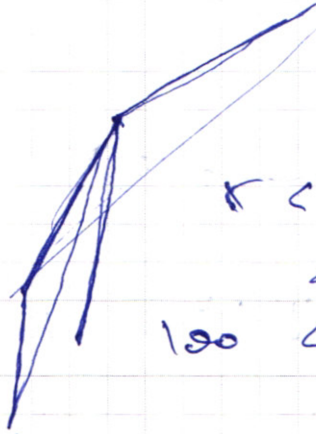
$7x + y < 4$

1 - 18

18 + 76



$7 \cdot 7 = 49$



$x < AC < 3x$

$100 < x < 200$

$x = 18$

$(x \ldots 3x)$

$\frac{2}{3}$, 4, 7, 4, 3, 7, 4

$f(4b) = \ldots$

$\frac{2}{3}$

fC

$\frac{1}{1}$ $f(1) = 1$

$600 - 3x + 3x = 600$

149 + 298

$2x < 300$

$600 - 298 = 302$

$302 - 149 = 298$

153

149

298

160

240

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2-2x-4y+y^2\leq 0$

$\cancel{\ldots -y(y+4)} \leq 3$

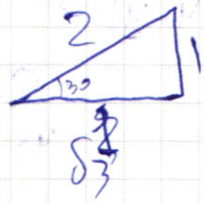
$x(x-2)-y(4+y)\leq 0$

$x^2-2x-\cancel{8}y-2y+y^2\leq 0$

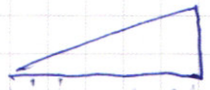
$\cancel{\ldots}2-2$

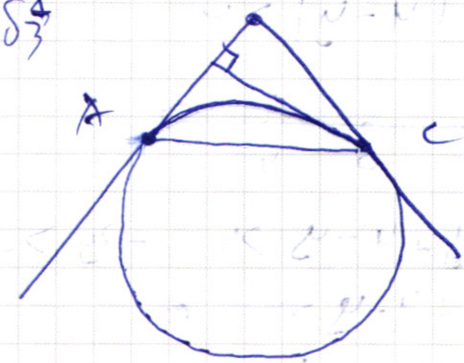
$x^2-2(x+y)-\cancel{2}y(\cancel{\ldots}\ 2-y)$

при $x=0$

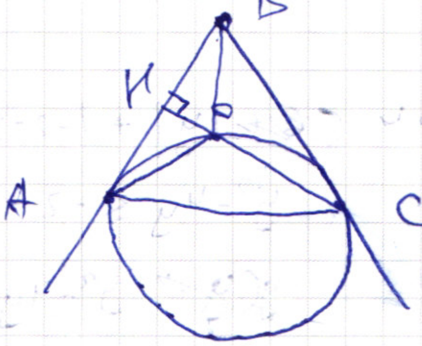


$8^2-1=$

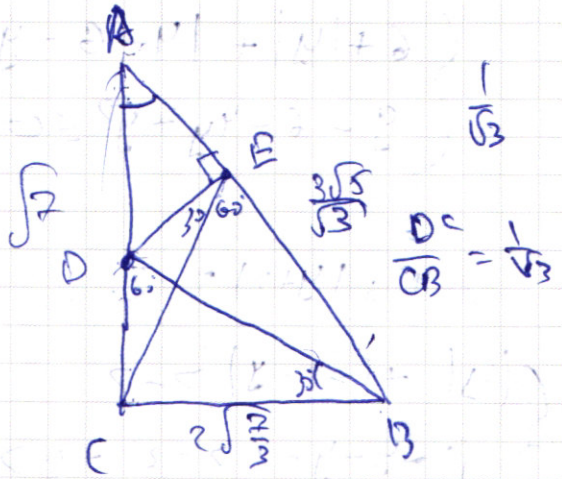




$\begin{array}{r} 27 \\ \times 15 \\ \hline 135 \\ 270 \\ \hline 405 \end{array}$

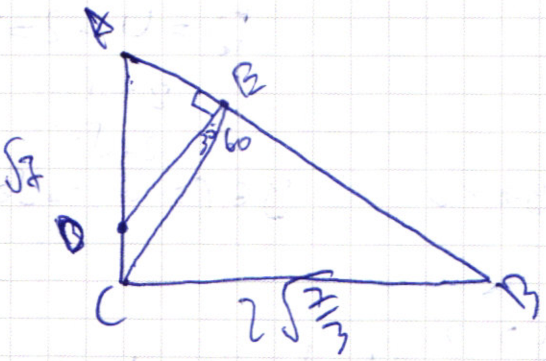


$\frac{AB}{AC}=\frac{AB}{AD}=\frac{BE}{CB}$



$\frac{1}{\sqrt3}$

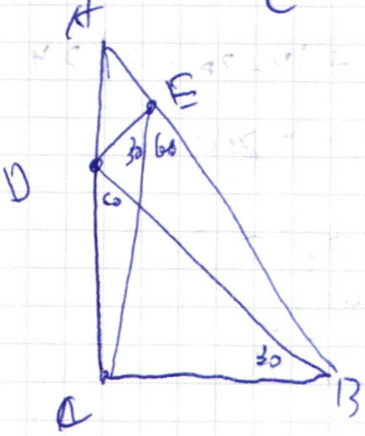
$\frac{DC}{CB}=\frac{1}{\sqrt3}$



$AB^2=7+4\cdot\frac{7}{3}$

$AB^2=\frac{21+4\cdot 7}{3}$

$AB=\sqrt{\frac{45}{3}}=\frac{3\sqrt5}{\sqrt3}=\sqrt5$



☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

При $x=0$ $\begin{cases} |y|+|4-y| > 4 \\ -4y+y^2 \le 0 \end{cases}$

$y \in [0;4]$

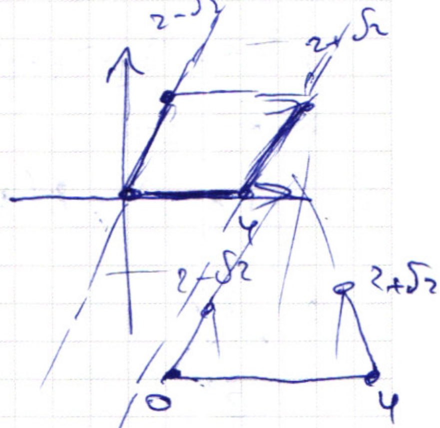
$\begin{cases} y^2-4y \le 0 \\ |y|+|4-y| > 4 \end{cases}$ $\begin{cases} y(y-4) \le 0 \\ -y+y-4>4 \quad \varnothing \end{cases}$

$4-2-\sqrt{2}$

$2-\sqrt{2}$ $2-\sqrt{2}$

$|y|+|4-y|>4$

$y<0$ $\left[\begin{array}{l} -y+4-y>4 \quad -2y>0 \quad y>0 \\ y+4-y>4 \quad \varnothing \\ y+y-4>4 \quad 2y>8 \quad y>4 \end{array}\right.$



при $x=3$

$\begin{cases} 6+|y|+|4-6-y|>4 \\ 9-6-4y+y^2 \le 0 \end{cases}$ $\begin{cases} |y|+|-2-y|>-2 \\ y^2-4y \le -2 \end{cases}$

$y^2-4y+2 \le 0$

$|y|+|y+2|>-2$

$D=4-2=2$

$2-\sqrt{2}$

$2+\sqrt{2}$

$|y|+|-2-y|>-2$

$y \in (2-\sqrt{2};2+\sqrt{2})$

$\left[\begin{array}{l} -y-y-2>-2 \quad -2y>0 \quad y<0 \\ y-y-2>-1 \quad \varnothing \\ y+y+2>-2 \quad 2y>-4 \quad y>-2 \end{array}\right.$

$\begin{cases} |2x|+2+|4-2x-2|>4 \\ x^2-2x-8+4 \le 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y \in (-\infty;0) \cup (-2;+\infty) \\ y (2-\sqrt{2};2+\sqrt{2}) \end{cases}$

$\begin{cases} |2x|+|2-2x|>2 \\ x^2-2x-4 \le 0 \end{cases}$

при $y=3$

$x^2-2x-4\cdot3+3 \le 0$

$\begin{cases} 2|x|+2|1-x|>2 \\ x^2-2x-4 \le 0 \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\le 0$$

$$\frac{16-24-2+10}{2\cdot 16-16+4\cdot 2}$$

0 2 3

$$\frac{1-6+10-4}{2-4+1}$$

$x<0$: $\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+(-x)\cdot(2-x)}$; $\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x-2x+x^2}$; $\frac{x^2-4x+4}{3x^2-6x}$

$0\le x<2$: $\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x(2-x)}$; $\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+2x-x^2}$; $\frac{x^2-4x+4}{x^2-2x}$

$2\le x<3$: $\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x(x-2)}$; $\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x^2-2x}$; $\frac{x^2-4x+4}{3x^2-6x}$

$3\le x$: $\frac{x^2-6x+10-2x+6}{2x^2-4x+x^2-2x}$; $\frac{x^2-6x+10-2x+6}{2x^2-4x+x^2-2x}$; $\frac{x^2-8x+16}{3x^2-6x}$

$\frac{(x-2)^2}{3x(x-2)}\le 0$ $x<0$ $x\ne 2$ $x\ne 0$ $x\in(0;2)$

$\frac{(x-2)^2}{x(x-2)}\le 0$ $0\le x<2$ $x\ne 2$ $x\ne 0$ $x\in(0;2)$

$\frac{(x-2)^2}{3x(x-2)}\le 0$ $2\le x<3$

$\frac{(x-4)^2}{3x(x-2)}\le 0$ $3\le x$ $x=4$

>0 $x<$

x^2-2x $x(x-2)$

$x-2y\ge 0$

$x\ge 2y$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 0\\ y\le 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}x-2y=\sqrt{xy}\\ x+y^2=5\end{cases}$$

$x=5-y^2$

~~$5-y^2-2y=\sqrt{(5-y^2)y}$~~

$y^2+2y=5-\sqrt{xy}$

$y^2+\sqrt{xy}+2y-5=0$

$5-y^2-2y=\sqrt{(5-y^2)y}$

$y^2+2y-5=-\sqrt{(5-y^2)y}$

$y^2+2y-5=$

$-\sqrt{5} \le y \le +\sqrt{5}$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

$x=5-y^2$ $\quad y \ge -\sqrt{5}$ $\quad x \ge 2y$

$x \ge 2y$

$2y \le x \le 5$

$x \ge 0$

$y \ge 0$

$y^2=5x$

$y=\sqrt{5x}$

$5-y^2-2y=\sqrt{(5-y^2)y}$

$(y^2+2y-5)^2=(5-y^2)y$

$\sqrt{5} \vee \sqrt{6}-1$

$y^2+2y-5 \le 0$ $\quad 5 \vee 6-2\cdot\sqrt{6}+1$

$-2 \vee -2\sqrt{6}$

$(y^2+2y-5)(y^2+2y-5)=(5-y^2)y$

$D=4+20=24=2\sqrt{6}$

$y^4+2y^3-5y^2+2y^3+4y^2-10y-5y^2-10y+25=5y-y^3$

$y_1=\frac{-2-2\sqrt{6}}{2}=-1-\sqrt{6}$

$y_2=\frac{-2+2\sqrt{6}}{2}=-1+\sqrt{6}$

$y^4+5y^3-6y^2-25y+25=0$

$-1-\sqrt{6} \le y \le -1+\sqrt{6}$

$y^4+5y^3-6y^2-25y+25 \,|\, y-1$

$-\,y^4-y^3$

$6y^3-6y^2$

$-\,6y^3-6y^2$

$0-25y+25$

$-\,-25+25$

0

y^3+6y^2-25

$y^4+6y^3-25y-y^3-6y^2+25$

$y^4+5y^3-6y^2-25y+25$

$(y-1)(y^3+6y^2-25)=0$

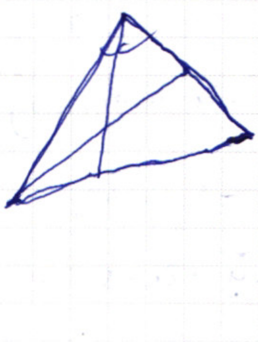
$(y-1)(y^3+5y^2+y^2-25)=0$

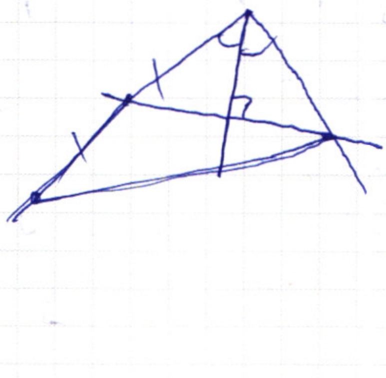
$(y-1)(y^2(y+5)+(y-5)(y+5))=0$

$(y-1)(y+5)(y^2+y-5)=0$

$(y-1)(y+5)\cancel{()}(y+2)=0$

$2{,}5 \le \frac{1+\sqrt{21}}{2} \le 3$ $\qquad 1{,}5 \le \frac{\sqrt{21}-1}{2} \le 2$





☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)