МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 16

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\left(\frac{(x-1)^2+9}{|x-1|}-6\right)(|x-3|+|x|-3) \leqslant 0.$$

2. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2-16y^2}=32, \\ 4y+\sqrt{x^2-16y^2}=23. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Биссектрисы внутреннего и внешнего угла A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках M и N соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника AMN, касается стороны AB в точке A. Найдите радиус окружности, угол ACB и площадь треугольника ABN, если известно, что $AB=\sqrt{5}$, $BM=2$.

4. [5 баллов] Вписанная окружность остроугольного треугольника ABC касается сторон AC и AB в точках E и D. Точка Y – основание перпендикуляра, опущенного из точки E на AB, а X – вторая точка пересечения EY со вписанной окружностью треугольника ABC. Найдите радиус этой окружности, если площадь треугольника AXD равна 5, а $2AD=3EY$.

5. [5 баллов] На доске выписано $6n$ последовательных натуральных чисел ($n \in \mathbb{N}$). Из них выбираются три попарно различных числа, среди которых ровно одно кратно 2 и ровно одно кратно 3. Известно, что можно составить ровно 5 900 таких троек. Чему равно n?

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} 4y+7x \geqslant |4y-7x|, \\ y \leqslant -3x+15, \\ x^2-10y+y^2+15 \geqslant 0 \end{cases}$$

7. [5 баллов] Найдите количество шестизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые две последовательные степени числа десять равна 1356.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

Посмотрим на вторую скобку. $|x-3|+|x|-3$.

Если $x\in(-\infty;0)$, то $|x-3|+|x|-3=(3-x)+(-x)-3=$
$=3-2x-3=-2x$, т.к $x<0$, то $-2x>0$

Если $x\in[0;3]$, то $|x-3|+|x|-3=(3-x)+x-3=0$

Если $x\in[3;+\infty)$, то $|x-3|+|x|-3=x-3+x-3=2x-6$, т.к $x\geq 3$, то $2x-6\geq 0$ И $|x-3|+|x|-3=0$ при $x\in[0;3]$

След-но при любом значении x $|x-3|+|x|-3\geq 0$, но т.к
$\left(\frac{(x-1)^2+9}{|x-1|}-6\right)(|x-3|+|x|-3)\leq 0$, то $|x-3|+|x|-3=0$,
либо $\frac{(x-1)^2+9}{|x-1|}-6<0$

Решим неравенство $\frac{(x-1)^2+9}{|x-1|}-6\leq 0$

Если $x\in(-\infty;1)$, то $\frac{(x-1)^2+9}{|x-1|}-6=\frac{(x-1)^2+9}{1-x}-6=\frac{(1-x)^2+9}{1-x}-6=$
$=\frac{(1-x)^2+9-6(1-x)}{1-x}$, $1-x>0\Rightarrow(1-x)^2+9-6(1-x)\leq 0$ $1-x=t$
$x\neq 1!!!$

$t^2-6t+9\leq 0$ $(t-3)^2\leq 0$ Единственный случай, когда $(t-3)^2\leq 0$, это $t=3\Rightarrow 1-x=3\Rightarrow x=-2$.

Если $x\in(1;+\infty)$, то $\frac{(x-1)^2+9}{|x-1|}-6\leq 0=\frac{(x-1)^2+9}{x-1}-6\leq 0$

$\frac{(x-1)^2+9-6(x-1)}{x-1}\leq 0$ $\quad x-1>0\Rightarrow(x-1)^2+9-6(x-1)\leq 0$ $\quad x-1=t$

$t^2-6t+9\leq 0$
$(t-3)^2\leq 0$
$t=3$
$x=4$

Ответ: $x\in\{-2\}\cup[0;1)\cup(1;3]\cup\{4\}$.

Задача 2

1. $\begin{cases} x+\sqrt{x^2-16y^2}=32 \\ 4y+\sqrt{x^2-16y^2}=23 \end{cases}$

$x-4y=32-23=9$

2. $\begin{cases} x+\sqrt{x^2-16y^2}=32 \\ 4y+\sqrt{x^2-16y^2}=23 \end{cases} = \begin{cases} x+\sqrt{(x-4y)(x+4y)}=32 \\ 4y+\sqrt{(x-4y)(x+4y)}=23 \end{cases} = \begin{cases} x+3\sqrt{x+4y}=32 \\ 4y+3\sqrt{x+4y}=23 \end{cases}$

3. $+\begin{cases} x+3\sqrt{x+4y}=32 \\ 4y+3\sqrt{x+4y}=23 \end{cases}$ $\quad x+4y=t$

$x+4y+6\sqrt{x+4y}=55$

$t+6\sqrt{t}=55$

$55-t=6\sqrt{t}$

$(55-t)^2=36t$

$3025-110t+t^2=36t$

$t^2-146t+3025=0$

$D=146^2-4\cdot3025=9216$

$\sqrt{D}=96$

$t_1=\frac{146-96}{2}=25 \quad t_2=\frac{146+96}{2}=121$

$+\begin{cases} x+4y=25 \\ x-4y=9 \end{cases}$

$2x=34$

$x=17$

$4y=25-17=8$

$y=2$

$+\begin{cases} x+4y=121 \\ x-4y=9 \end{cases}$

$2x=130$

$x=65$

$4y=65-9=56$

$y=14$

Ответ: $(17;2)$; $(65;14)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5

Поймем, что в любой тройке чисел есть либо ровно одно число $\vdots 6$ (Остальные 2 числа $\not\vdots 2$; $\not\vdots 3$), либо два различных числа, где ровно одно $\vdots 2$ и ровно одно $\vdots 3$. (Третье число $\not\vdots 2$; $\not\vdots 3$) Всего чисел $\vdots 6$ в $6n$ последовательных $-n$, чисел $\vdots 2$; $\not\vdots 3$ $-2n$ $(6n:2-n)$, чисел $\vdots 3$; $\not\vdots 2$ $-n$ $(6n:3-n)$, а чисел $\not\vdots 2$; $\not\vdots 3$ $-$ $6n-2n-n-n=2n$. Тогда способов выбрать тройку чисел первого вида есть $C_{2n}^{2}\cdot n$ (Способы выбрать число $\vdots 6$ $\cdot$ способы выбрать 2 числа $\not\vdots 2$ $\not\vdots 3$, не учитывая их порядок) $= \frac{(2n)!}{(2n-2)!\cdot 2!}\cdot n = \frac{2n\cdot(2n-1)}{2}\cdot n = \frac{4n^3-2n^2}{2} =$
$= 2n^3-n^2$. А тройку второго вида можно выбрать $2n\cdot n\cdot n$ способами (Логика аналогична: число $\vdots 2$; число $\vdots 3$; число $\not\vdots 2$; $\not\vdots 3$, все 3 числа $\not\vdots 6$). $2n\cdot 2n\cdot n = 4n^3$

$5900 = 4n^3-n^2+2n^3 = 6n^3-n^2 = n^2(6n-1)$

$5900 = 59\cdot 2^2\cdot 5^2$. Т.к. $n^2\in\mathbb{N}$ и $5900 \vdots n^2$, то

$n^2\in\{1; 4; 25; 100\}$ Если $n^2=100$, то $n^2(6n-1)=5900$.

Если же $n^2<100$, то $n^2(6n-1)<5900 \Rightarrow$

$n^2=100 \Rightarrow n=10$

Ответ: $n=10$

Задача 7

~~Поймем, что если у шестизначного числа сумма~~

~~6-значное число $\equiv x \pmod{10^6}$, $x \neq 0$, то оно же $\equiv x \pmod{10^5}$~~

и Т.к сумма остатков $= 1356$, то для реализации св-ва мы можем использовать 10^3; 10^4; 10^4, 10^5; 10^5, 10^6, т.к 10^2 и 10^3 в сумме максимум дают $99 + 999 < 1356$. Если 6-значное число $a \overset{10^5}{\equiv} x$ и $a \overset{10^6}{\equiv} y$, при этом $0 < x, y < 10^5$ и $x + y = 1356$, то $x = y$, ведь $a = 10^6 \cdot k + x = 10^5 \cdot 10k + x$, а т.к $x + y = 1356$, то $x < 10^5 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}(10^5) \Rightarrow$ x - ~~остаток~~ $a \overset{10^5}{\equiv} y$. Также можем проделать и дальше и понять, что если мы посчитаем сколько 6-значных чисел таких, что сумма остатков при делении на 10^3 и 10^4 $= 1356$ мы посчитаем кол-во чисел, удовлетвор. условиям задачи. Т.к $1356 > 10^3$, то есть два варианта:

1. $a \overset{10^4}{\equiv} x$ $\quad x = 10^3 + r$ $\quad r = 178$
   $a \overset{10^3}{\equiv} r$ $\quad 10^3 + 2r = 1356$

   Всего таких чисел: 900

2. $a \overset{10^4}{\equiv} x$ $\quad x = 678$
   $a \overset{10^3}{\equiv} x$ $\quad$ Таких чисел тоже 900

Ответ: Всего таких чисел 1800

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6

$$\begin{cases} 4y+7x \geq |4y-7x| \\ y \leq -3x+15 \\ x^2-10y+y^2+15 \geq 0 \end{cases}$$

Если $4y-7x \geq 0$, то $y>x$ ~~и~~ $y \geq \frac{7}{4}x$

$4y+7x \geq 4y-7x \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow y, x \geq 0$

Если $4y-7x$ аналогично получаем, что в этом случае

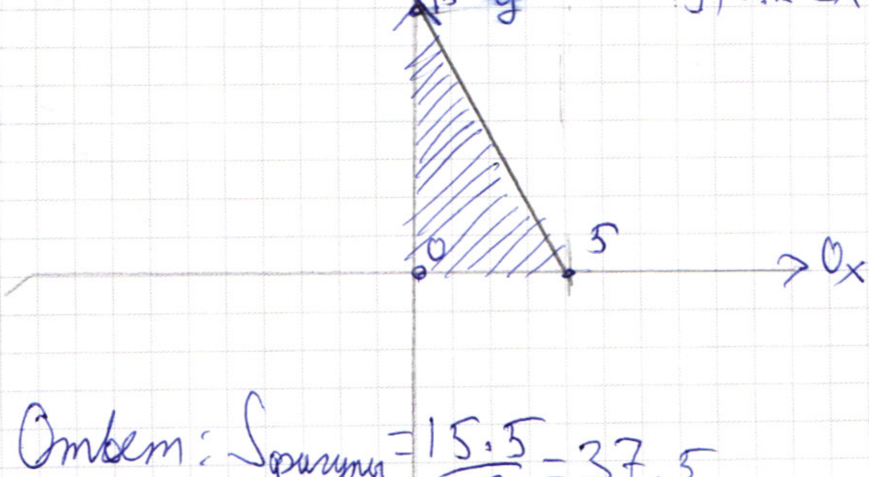
$x \geq \frac{7}{4}y$; а $y \geq 0 \Rightarrow$ всегда $x, y \geq 0$

$y \leq -3x+15 \Rightarrow x \leq 5$, иначе $y<0$, что невозможно, в то время как $y \leq 15$, ~~иначе~~ при $x=0$, т.к $x \geq 0$

$x^2-10y+y^2+15 \leq 25-10y+y^2+15 = 40-10y+y^2 = (y-5)^2+15 \geq 0$,

След-но выполняется ~~всегда~~ при $\forall x, y$ удов. первым двум условиям

Фигура выглядит так: Т.к $3x+y \leq 15$



Ответ: $S_{\text{фигуры}} = \frac{15 \cdot 5}{2} = 37{,}5$

☑ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$32-x=\sqrt{x^2-16y^2}$

$23-4y=\sqrt{x^2-16y^2}=\sqrt{(x-4y)(x+4y)}=3\sqrt{x+4y}$

$23-4y=32-x$

$x-4y=32-23$

$x-4y=9$

$32-x=3\sqrt{x+4y}$

$23=32-\cancel{(x+4y)}-(x-4y)$

$\cancel{x+4y}=9$

$\cancel{1024}-64x+x^2=3x+12y$

$1024-64x+x^2=3x+12y=529-46y+y^2$

$1553-70x-70y+x^2+y^2=0$

$x^2+y^2-70x-70y+1553=0$

$70x+70y-x^2-y^2=1553$

$\cancel{70(}$

$x(70-x)+y(70-y)=1553$

$1024-64x+x^2=9x+36y$

$23\cdot 23=529$

$119\cdot 119=14161$

$x+4y+3\sqrt{x+4y}=55$

$(r+3\sqrt{r}=55)^2$

$3\sqrt{r}=55-r$

$55\cdot 55=3025$

$3025\cdot 4=12100$

2061

$\cancel{r^2+6r\sqrt{r}}+$

$9r=3025-110r+r^2$

$r^2-119r+3025=0$

$D=119^2-3025\cdot 4=2061$

$r_1=\frac{119+\sqrt{2061}}{2}$

$r_2=\frac{119-\sqrt{2061}}{2}$

$x-4y=9$

$x+4y=\frac{119+\sqrt{2061}}{2}$

$x=\frac{138+\sqrt{2061}}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\left(\frac{(x-1)^2+9}{|x+1|}-6\right)\left(|x-3|+|x|-3\right)\le 0$ $x<0$

$\left(\frac{(x-1)^2+9}{1-x}-6\right)$

$(|x-3|+|x|-3)\geqslant 0$

$|x-3|+|x|\geqslant 3$

Если $x\in[0;3)$, то $|x-3|+|x|=3-x+x=$
$=3$

Если $x\in[3;+\infty)$, то $=$

$=2x-3\geq 3$, что верно

Если $x\in(-\infty;0)$, то

$3-x-x\geq 3$, что тоже верно,

След-но вторая скобка всегда $\geqslant 0$

~~больше~~ 0

$x\neq 1$

След-но $\frac{(x-1)^2+9-8}{|x-1|}-6\le 0$

$x\in[1;+\infty)$, то

$\frac{(x-1)^2+9}{x-1}-6\le 0$

$x-1\geq 0$

$(x-1)^2+9-6(x-1)\le 0$

$(x-1)(x-7)\le -9$

~~Но при~~ тогда $t^2-6t+9\le 0$

$(t-3)^2\le 0$

След-но t только 3

$x-1=3$

$x=4$

$xy=y^x$

$y=\cancel{ly\,x\,y^{x+1}}$

$n^2\in\{1;4;25;100\}$

$x\in(-\infty;1)$

$11800=4n^3-2n^2$

$\frac{(x-1)^2+9}{1-x}-6\le 0$

$8n^3=$

$=n^2\cancel{(8n}$

$2n^2(8n-1)$

$200\cdot 59$

$\frac{(1-x)^2+9-6+6x}{1-x}\le 0$

$(1-x)^2+9-6(1-x)\le 0$

$t=1-x$

$11800=n^3-n^2+4n^3=$

$t^2-6t+9\le 0$

$(t-3)^2\le 0$

$=5n^3-n^2=$

$t=3$

$=n^2(5n-1)=11800$

$1-x=3$

$n\in\mathbb{N}\Rightarrow$

$x=-2$

$n\in 1;2;5;10$ $n\cdot C_{2n}^2=\frac{n!}{2\cdot(n-2)!}=\frac{(n-1)\cdot n}{2}$

$2n\cdot n\cdot 2n$

$4n^3=5900$

~~$59\cdot 25=n^3$~~

$\frac{n^2+n}{2}\cdot n+4n^3=5900$

$4n^3+n\cdot 2n-5900=0$

$5n^3$ $\frac{2n\cdot(2n-1)}{2}\cdot n$

$4n^3+2n^2=5900$

$2n^2(2n+1)=5900$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$+\begin{cases} x+\sqrt{x^2-16y^2}=32 \\ 4y+\sqrt{x^2-16y^2}=23 \end{cases}$$

$x-4y=9$

$x+4y=t$

$$\begin{array}{r} \times\ 146 \\ 146 \\ \hline 876 \\ 584 \\ 146 \\ \hline 21316 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\ 21316 \\ 12100 \\ \hline 9216 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 9216 & 2 \\ 4608 & 2 \\ 2304 & 2 \\ 1152 & 2 \\ 576 & 2 \\ 288 & 2 \\ 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$3^2\cdot 2^{10}$

$x+4y+2\sqrt{x^2-16y^2}=55$

$t+2\sqrt{(x-4y)(t)}=55$

$t+6\sqrt{t}=55$

$55-t=6\sqrt{t}$

$3025-110t+t^2=36t$

$t^2-146t+3025=0$

$D=146^2-3025\cdot 4=9216=1024\cdot 9$

$t_1=\frac{146-96}{2}=25$

$t_2=\frac{146+96}{2}=73+48=121$

Система 1

$$\begin{cases} x+4y=25 \\ x-4y=9 \end{cases}$$

$2x=34$

$x=17$

$4y=8 \Rightarrow y=2$

Система 2

$$\begin{cases} x+4y=121 \\ x-4y=9 \end{cases}$$

$2x=130$

$x=65$

$4y=56$

$y=14$

$$\begin{cases} 4y+7x \ge |4y-7x| \\ y \le -3x+15 \\ x^2-10y+y^2+15 \ge 0 \end{cases}$$

$4y-7x>0$

$y \le -3x+15$

$-3x+15 \ge 0$

$4y+7x \ge 4y-7x \quad x \ge 0$

$4y+7x \ge 7x-4y$

$7x \ge -7x$

~~x = 5, если y~~ $=0$, то

$y \le -3x+15 \quad y \le -3(x-5)$

$x \le 5$

$y \ge 0$

$3x+y \le 15$

$356 | 2$

$178 |$

$y^2-10y+25 \; \cancel{x^2-10y+y^2} \ge -15$

$(y+5)^2+x^2 \ge 10$

1356

$10^3 ; 10^4$

678

$10^5 ; 10^4$

$10^5 ; 10^6$

$k \cdot 10^4 + \ldots r$

$y^2-10y \ge -40$

~~81~~ 9

$y^2-10y+40 \le 0$

$4y \; 7x \ge 0$

$x \ge 0$

$y \le -3x+15 \le 15 \quad y \le 15$

$3\cancel{x+y} \quad 15-y-3x \ge 0 \quad y = -3x+15 =$

$= -3(x-5)$

$30x-60+y(x-5)^2+13.7\ldots$

$x, y > 0$

$x \ge 5$

$y, x > 0$

$y \ge \frac{7}{4}x$

или $x \ge \frac{7}{4}y$

$y \le \frac{4}{7} 5 = \frac{20}{7} =$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)