МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

√ 1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leqslant 0.$$

√ 2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

√ 3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

√ 6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, & ? \\ x^2-2x-4y+y^2\leqslant 0. & ✓ \end{cases}$$

√ 7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 18$, $1\leqslant y\leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 7.

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = p.$

$f(\frac{x}{y}) < 0;\ x, y \in \mathbb{N};\ 1 \leq x, y \leq 18.$

а) Заметим, что $f(1) = 0$, т.к.

$$f(1 \cdot p) = f(1) + f(p) = f(p) = p$$

$$\Downarrow$$

$$f(1) = 0.$$

б) Заметим, что $f(\frac{1}{p}) = -p = -f(p)$, т.к.

$$f(p^2 \cdot \frac{1}{p}) = f(p)$$

$$\parallel$$

$$f(p^2) + f(\frac{1}{p}) = p$$

$$f(p) + f(p) + f(\frac{1}{p}) = p$$

$$\Downarrow$$

$$f(\frac{1}{p}) = -p$$

в) Заметим, что для $n \notin$ простым $f(n) = p_a + p_b$, если

$n = p_a + p_b$, т.к.

$$f(n) = f(p_a \cdot p_b) = f(p_a) + f(p_b) =$$

$$= p_a + p_b.$$

Таким образом любое преобр. нат. число = Σ своих простых делителей (кр-1)

Из этих свойств функции f следует:

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$$

↖ это работает даже не для прост. чисел (т.к. св-во „в")

Т.к. $x; y \in N$

необходимо, чтобы $f(x) < f(y)$

Составим таблицу для $f(n)$, для $n \in N$ и $n \leq 18$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(n)$	0	2	3	4	5	5	7	6	6

n	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$f(n)$	7	11	7	13	9	8	8	17	8

Теперь будем отдельно рассматривать случаи $f(y)$ и считать для каждого число меньших $f(x)$.

1. $f(y)=0 \Rightarrow n_x = 0;\ n_y = 1 \Rightarrow n = 0$
2. $f(y)=2 \Rightarrow n_x = 0;\ n_y = 1 \Rightarrow n = 0$
3. $f(y)=3 \Rightarrow n_x = 1;\ n_y = 1 \Rightarrow n = 1$
4. $f(y)=4 \Rightarrow n_x = 2;\ n_y = 1 \Rightarrow n = 2$.
5. $f(y)=5 \Rightarrow n_x = 3;\ n_y = 2 \Rightarrow n = 6$
6. $f(y)=6 \Rightarrow n_x = 5;\ n_y = 2 \Rightarrow n = 10$
7. $f(y)=7 \Rightarrow n_x = 7;\ n_y = 3 \Rightarrow n = 21$
8. $f(y)=8 \Rightarrow n_x = 10;\ n_y = 3 \Rightarrow n = 30$
9. $f(y)=9 \Rightarrow n_x = 13;\ n_y = 1 \Rightarrow n = 13$
10. $f(y)=11 \Rightarrow n_x = 14;\ n_y = 1 \Rightarrow n = 14$
11. $f(y)=13 \Rightarrow n_x = 15;\ n_y = 1 \Rightarrow n = 15$
12. $f(y)=17 \Rightarrow n_x = 16;\ n_y = 1 \Rightarrow n = 16$.

Ответ: $n_\Sigma = \underline{128}$ способов

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leqslant 0$$

Рассмотрим ряд случаев:

1. $x-3\geqslant 0 \Rightarrow x-2;\ x>0$
2. $x-3\leqslant 0;\ x-2\geqslant 0 \Rightarrow x>0$
3. $x-3\leqslant 0;\ x-2\leqslant 0;\ x\geqslant 0$
4. $x-3\leqslant 0;\ x-2\leqslant 0;\ x\leqslant 0$

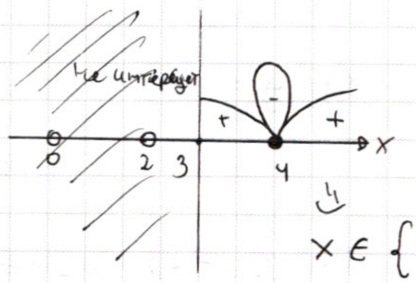
Других вариантов не существует!

а) $x-3\geqslant 0 \Rightarrow x\geqslant 3.$

$$\frac{x^2-8x+16}{3x(x-2)}\leqslant 0$$

$\Updownarrow$

$$\frac{(x-4)^2}{3x(x-2)}\leqslant 0$$

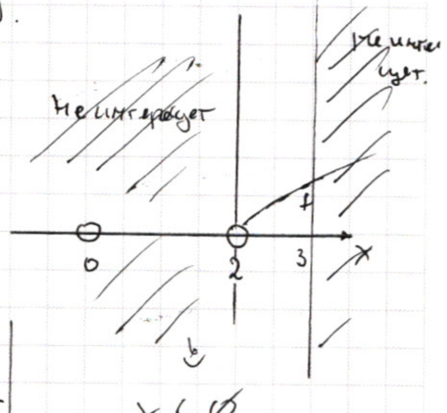


$\Downarrow$

$x\in\{4\}.$

б) $x-3\leqslant 0;\ x-2\geqslant 0 \Rightarrow x\in[2;3]$

$$\frac{x^2-4x+4}{3x^2-6x}\leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{3x(x-2)}\leqslant 0$$

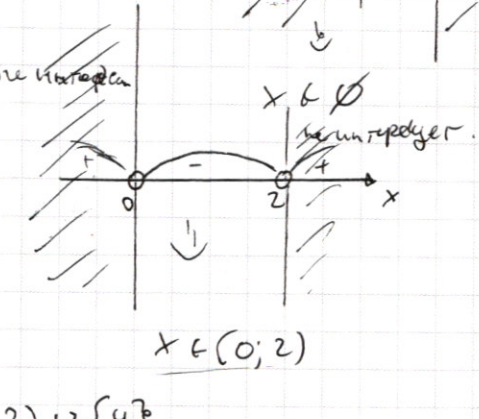


$\Downarrow$

$x\in\varnothing$

в) $x\geqslant 0;\ x-2\leqslant 0 \Rightarrow x\in[0;2]$

$$\frac{x^2-4x+4}{x^2-2x}\leqslant 0 \quad \frac{(x-2)^2}{x(x-2)}\leqslant 0$$



$\Downarrow$

$x\in(0;2)$

д) Аналогично „б" $\Rightarrow$ Ответ: $x\in(0;2)\cup\{4\}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Задача 3.

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \quad x - 2y \geq 0 \, ; \quad xy \geq 0$$

$x \geq 2y$; x и y - одного знака (или один из них $= 0$)

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 = xy \\ x = 5 - y^2 \end{cases}$$

$$(5-y^2)^2 - 5y(5-y^2) + 4y^2 = 0$$

$$25 - 10y^2 + y^4 - 25y + 5y^3 + 4y^2 = 0$$

$$y^4 + 5y^3 - 6y^2 - 25y + 25 = 0$$

$D = 1 + 20 \Rightarrow y' = \dfrac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$

$$(y-1)(y+5)(y^2 + y - 5) = 0$$

а) $y = 1 \Rightarrow x + 1^2 = 5 \Rightarrow x = 4$

$4 \geq 2 \cdot 1$; 4 и 1 - одного знака

б) $y = -5 \Rightarrow x + (-5)^2 = 5 \Rightarrow x = -20$

$-20 < -5 \cdot 2 \Rightarrow y \neq -5$

в) $y = \dfrac{\sqrt{21} - 1}{2}$

$\cancel{x + \dfrac{21 - 4\sqrt{21} + 1}{2}}$

$$x + \frac{21 - 2\sqrt{21} + 1}{2} = 5$$

$$x = \sqrt{21} - 6$$

x и y - разного знака

$y \neq \dfrac{\sqrt{21} - 1}{2}$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

д) $y = \frac{-\sqrt{21} - 1}{2}$

$\Downarrow$

$x + \frac{22 + 2\sqrt{21}}{2} = 5$

$x = -\sqrt{21} - 6$ x и y - одного знака;

$-\sqrt{21} - 6 \not> -\sqrt{21} - 1$

$\Downarrow$

$y \neq \frac{-\sqrt{21} - 1}{2}.$

Ответ: $x = 4;\ y = 1;$

Задача 6.

а) $x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0$

$x - 2x + 5 - 4y + y^2 \leq 5$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 5$

б) $|2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4$

$|4 - 2x - y| > 4 - |2x| - |y|$

1. $x \geq 0;\ y \geq 0;$

$|4 - 2x - y| > 4 - 2x - y$

$\Downarrow$

$4 - 2x - y < 0$

$\Downarrow$

$4 - 2x < y$

2. $x \leq 0;\ y \leq 0 \Rightarrow 4 - 2x - y \geq 0$

$|4 - 2x - y| > 4 + 2x + y$

$\Downarrow$

~~x; y ∈ ∅~~ $x; y \in \mathbb{R}$

3. $x \geq 0;\ y \leq 0;$

3.1. $4 - 2x - y \geq 0$

$4 - 2x \geq y$

$\Downarrow$

$4 - 2x - y > 4 - 2x + y$

$-y > y$

$\Downarrow$

$y < 0$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

3.2. $4-2x-y \le 0$

$y+2x-4 > 4-2x+y$

$4x > 8$

$\underline{x > 2}$

4. $x \le 0;\ y \ge 0$

4.1 $4-2x-y \ge 0$

$\cancel{4}-2x-\cancel{y} > \cancel{4}+2x-\cancel{y}$

$-x > x$

$\Downarrow$

$x < 0$

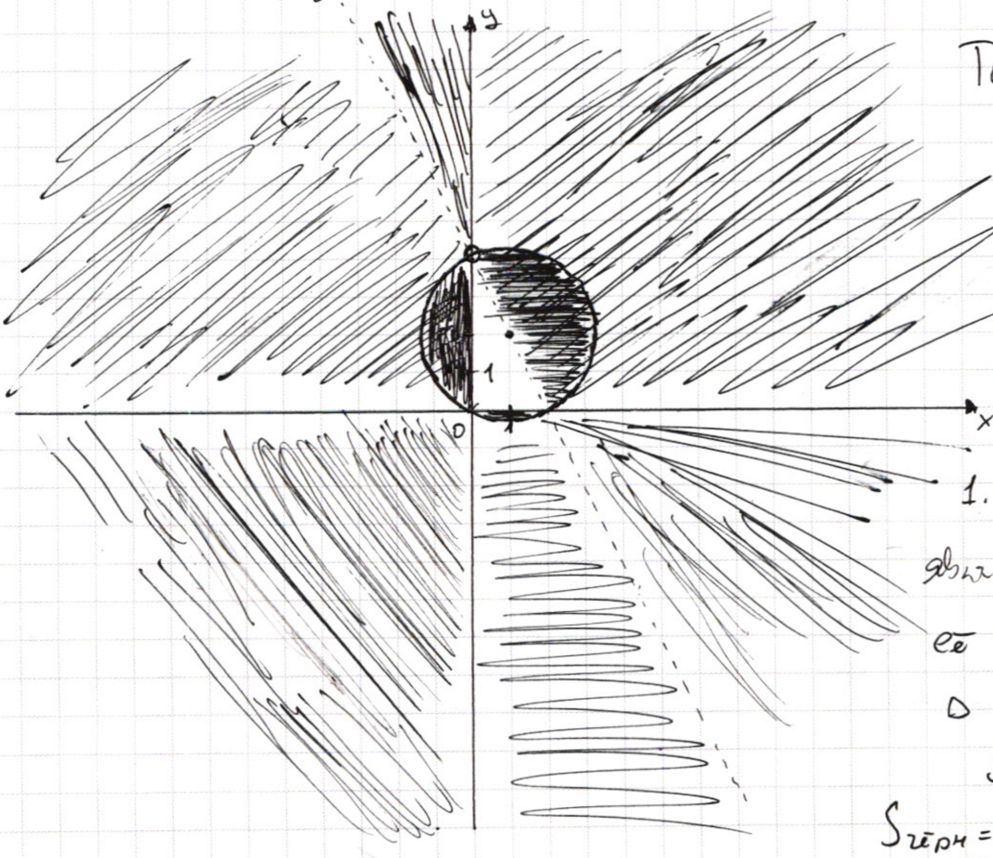
4.2. $4-2x-y \le 0$

$y+2x-4 > 4+2x-y$

$2y > 8x$

$y > 4.$

~~Нз~~ Изобразим это на графике.



Таким образом задача свод к нахожд площади чёрной фигуры.

1. Заметим, что окруж является описанной, т.к. её $R\ (\sqrt{5}) = \frac{1}{2}$ сторон Δ $\left(\sqrt{2^2+4^2} = 2\sqrt{5}\right)$.

$\Downarrow$

$S_{чёрн} = S_{круг} - S_{\Delta} =$

$= \pi \cdot (\sqrt{5})^2 - \frac{2 \cdot 4}{2} =$

$= 5\pi - 4 \approx \underline{\underline{11,7}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

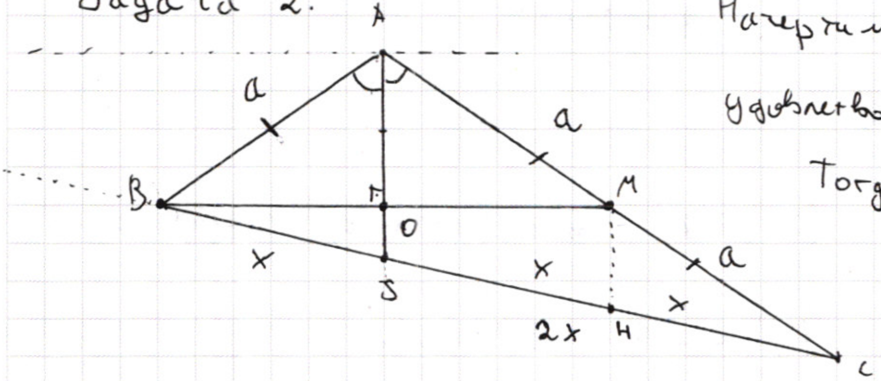
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2.



Начертим произвольный Δ, удовлетворяющий условию.

Тогда в нём:

а) п/у Δ AOM = п/у Δ AOB, по острому углу (при A) и катету (AO – общ.)

$\Downarrow$

$AM = AB$

б) $\dfrac{BS}{CS} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1}{2}$

~~в) Продлим CB за точку B, а через точку A проведём прямую ∥ BM. Точку ∩ этих прямых назовём Q. Тогда Δ QCA ~ Δ BMC (по 2-м углам [угол C – общий, при M и A – соотв. при ∥ прямых]).~~

~~в) Заметим, что прямая AC и прямая SC равны по горизонтали, но AC в 3 раза более длин по горизонтали (и это не частный случай)~~ $\cancel{\Rightarrow 4x^2 = l^2 + h^2 \Rightarrow l^2 = 4x^2 - h^2}$

$\cancel{4a^2 = 9(l^2 + h^2)}$

$\cancel{\Downarrow}$

$\cancel{4a^2 = 36x^2 - 9h^2 + h^2}$

$\cancel{4(a^2 - x^2) = 8l^2}$

$\cancel{a^2 - x^2 = 2l^2}$

в) По т. ~~косинусов~~ синусов: $\dfrac{BM}{\sin(2\alpha)} = \dfrac{a}{\sin(90^\circ-\alpha)}$

$$a\sin(2\alpha) = BM\cos(\alpha)$$

$$\Downarrow$$

$$BM = 2a\cdot\sin\alpha$$

г) По т. косинусов:

$$BC^2 = a^2 + (2a\cdot\sin\alpha)^2 - 2\cdot a\cdot(2a\cdot\sin\alpha)\cdot\cos(90+\alpha)$$

$$BC^2 = a^2 + 4a^2\cdot\sin^2\alpha + 4a^2\cdot\sin^2\alpha$$

$$BC^2 = a^2(8\sin^2\alpha+1)$$

$$\Downarrow$$

$$BC = a\sqrt{8\sin^2\alpha+1}$$

Таким образом:

$$600 = 3a + a\sqrt{8\sin^2\alpha+1}$$

$$\Downarrow$$

$$600 = a\left(3+\sqrt{8\sin^2\alpha+1}\right)$$

$$\Downarrow$$

$3+\sqrt{8\sin^2\alpha+1}$ – это делитель 600 (не меньше 5)

$$5 = 3+\sqrt{8\sin^2\alpha+1} \iff 2 = \sqrt{\dots}$$

$$\Downarrow$$

$$4 = \dots + 1$$

$$\Downarrow$$

$$3 = 8\sin^2\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\arcsin\left(\sqrt{\tfrac{3}{8}}\right) = \alpha.$$

$\Downarrow$

каждому делителю 600, кроме 1; 2; 3 соотв-ет один △.

$$600 = 2^3\cdot 3\cdot 5^2$$

$$\Downarrow$$

Число делителей:

$$\Downarrow\ 1+\bar{C}_1^6+\bar{C}_2^6+\ldots+\bar{C}_6^6 =$$

$$= 1 + C_6^6 + C_6^7 + \ldots =$$

$= 1238 \Rightarrow$ Всего $\underline{1235}$ таких треугольников.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{array}{l|l} y^3 + 6y^2 + 0 + 25 & y+5 \\ \hline - \; y^3 + 5y^2 & y^2 + y - 5 \\ \quad y^2 + 0 & \\ - \; y^2 + 5y & \\ \quad -5y - 25 & \\ - \; -5y - 25 & \\ \quad 0 & \end{array}$$

$0{,}5 \cdot 31.$

$8 + 11.$

$D < 0$

$$(y-1)(y+5)(y^2+y-5) = 0$$

$\Downarrow$

а) $y = 1$

$\Downarrow$

$x + 1^2 = 5$

$\Downarrow$

$\underline{x = 4.}$

17.

$4 - 2 \cdot 1 = \sqrt{4 \cdot 1}$

$2 = \sqrt{4}$

б) $y = -5$

$\Downarrow$

$x + 25 = 5$

$\Downarrow$

$x = -20.$

$-20 + 10 \neq \sqrt{100}$

$\Downarrow$

$\underline{\underline{y = 1; \; x = 4}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

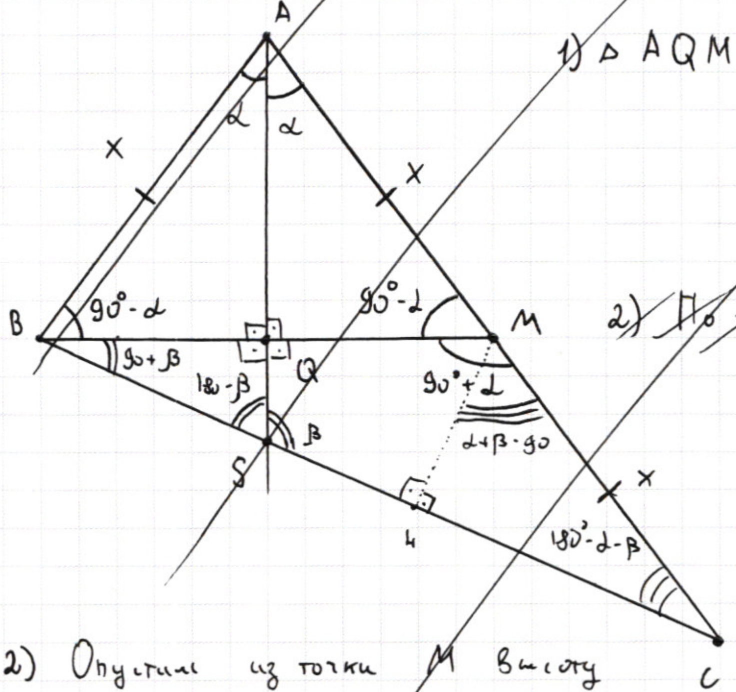
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача ~~3~~ 2

Начертим произвольный Δ, который удовлетворяет данному св-ву:



1) $\Delta AQM = \Delta AQB$, т.к. $\angle QAM = \angle QAB$; AQ - общий катет.

$\Downarrow$

$AB = AM = MC = x$

~~2) По т. косинусов:~~

~~$BM^2 = 2x^2(1-\cos 2\alpha)$~~

~~$BC^2 = BM^2 + x^2 - 2BM \cdot x \cdot \cos(90+\alpha)$~~

2) Опустим из точки M высоту MH на сторону BC, тогда

пускай $\angle QSH = \beta$, но тогда $\angle QMH = 180° - \beta$ (т.к. 4-х угольник $QMHS$ - вписанный) $\Rightarrow \angle HMC = 90° + \alpha - (180° - \beta) = \alpha + \beta - 90°$

$\Downarrow$

$\angle HCM = 90° - (\alpha + \beta - 90°) = 180° - \alpha - \beta$

$9 + 25 = 38$

72. 2

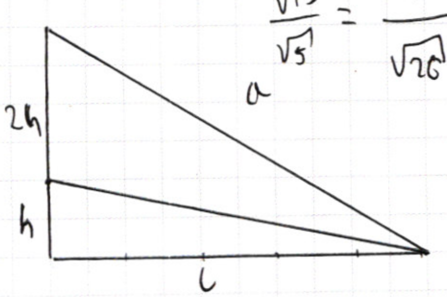
144 + 36 180

3) $\sum \angle \Delta = 180° = 2\alpha + 90° - \alpha + 90° + \beta + 180° - \alpha - \beta$

$\Downarrow$

$180° = 360°$

$\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{26}}$

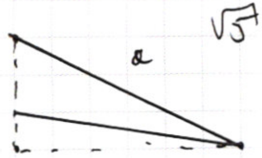


$6\sqrt{5} = 13\sqrt{2}$

$h^2 + l^2 = x^2$

$36 \cdot 5 = 169 \cdot 2$

$9h^2 + l^2 = a^2$ ~~180~~ $\neq$



$\sqrt{5}$ $\sqrt{13}$

$6 \cdot 10 \cdot 10$

☑ черновик ■ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1

(Нумеровать только чистовики)

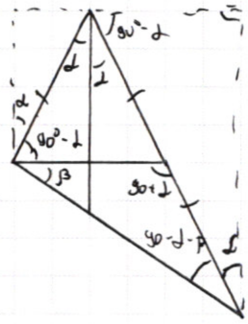
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$f(ab) = f(a) + f(b) \qquad a; b > 0$

$f(p) = p$

$1 \le x \le 18; \quad 1 \le y \le 18 \qquad f(x/y) < 0.$

$90 - \alpha - \beta$

$2\alpha + 90^\circ - \alpha + \beta + 90 - \alpha - \beta = 180.$

$\cancel{f(1/2)}$

$p = 1 \cdot p$

(4)

$f(p) = p \Leftrightarrow f(p \cdot 1) \Leftrightarrow f(p) + f(1)$

(1.1)

$p + f(1)$

$f(1) = 0.$

$\cancel{p^2} \qquad \frac{1}{p} \cdot p^2 = p$

(6)

$f(\frac{1}{p} \cdot p^2) = p = f(\frac{1}{p}) + f(p^2)$

$p = f(\frac{1}{p}) + f(p) + f(p)$

$-p = f(\frac{1}{p})$

(4)

$\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y} \Rightarrow f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

$f(ab) = f(a) + f(b) \Rightarrow f(1) = 0.$

$f(p) = p \Rightarrow \cancel{f}\ f\left(\frac{1}{p} \cdot p^2\right) = p$

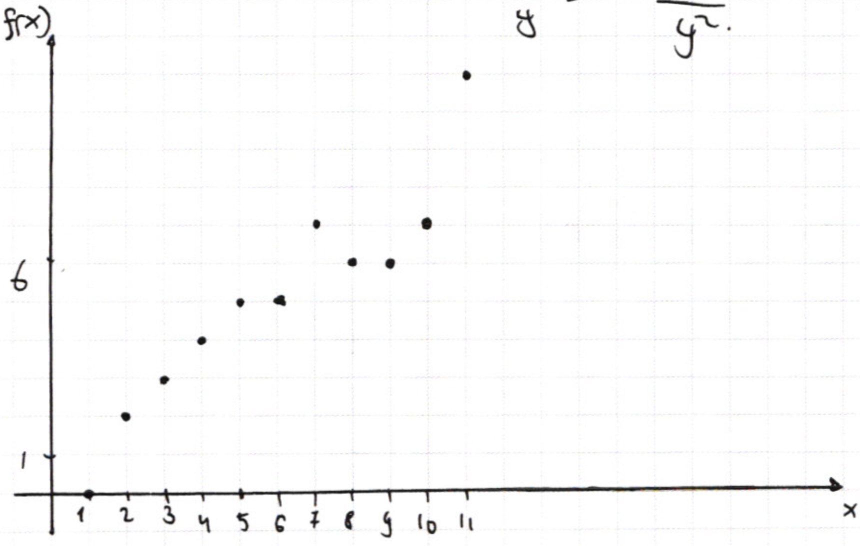
$f\left(\frac{1}{p}\right) + f(p \cdot p) = p$

$f\left(\frac{1}{p}\right) + f(p) + f(p) = p$

$f\left(\frac{1}{p}\right) + p + p = p$

$\underline{f\left(\frac{1}{p}\right) = -p}$

$\frac{x}{y} = \frac{xy}{y^2}.$



$f(4) = f(2) + f(2)$

$f(6) = f(3) + f(2)$

$f(8) = f$

$f(9) = 6\ \cancel{2}$

$f(10) = 7.$

$f(8) = f(4) + f(2)$

$x < y.$

$x > y \quad \left(\frac{8}{5}\right)$

$\cancel{x < y} \Rightarrow x = 1$

$y = 2 \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = -2.$

$y = p \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = -p.$

$y = 8 \Rightarrow f\left(\frac{1}{8}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) =$

$= -6.$

$f(8) + f\left(\frac{1}{5}\right) =$

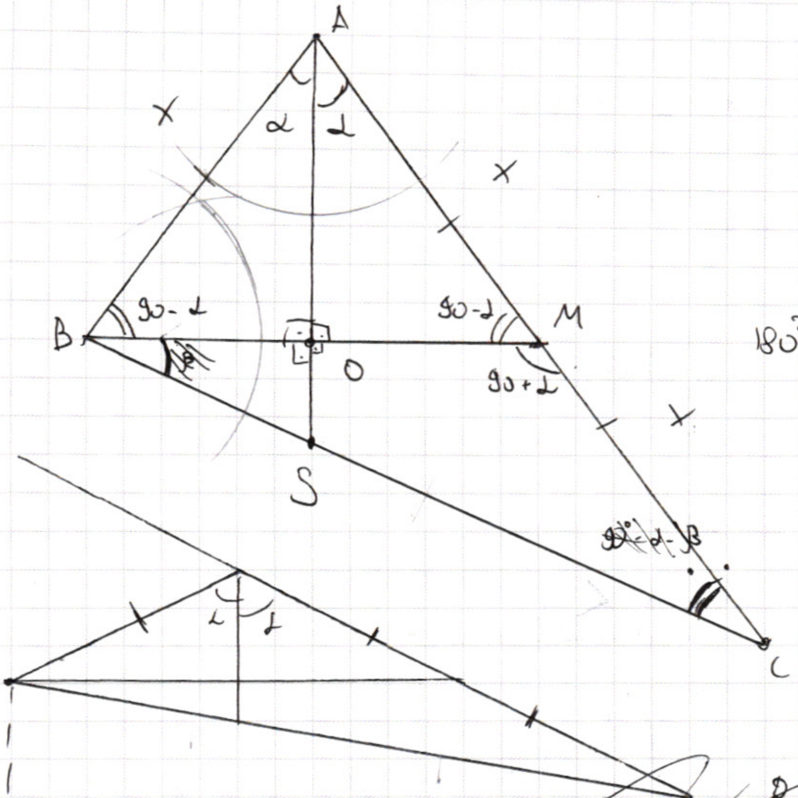
$= 6 + \cancel{7} - 5 = 1.$

$\frac{x}{y} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$180 - 90 + \alpha = 90 + \alpha$

$180^\circ - \beta - 90^\circ - \alpha =$

$90^\circ - \alpha - \beta$

$\frac{3}{18} = \frac{1}{9}$

$\cancel{2\alpha + 90 - \alpha - \beta + 90 - \alpha + \beta} \;{}^{0}$

$\sqrt{(x \cdot \cos\alpha)^2 + (3x \cdot \sin\alpha)^2}$

$90 - \alpha + \beta = 2\alpha$

$90 - \beta = 3\alpha$

$\beta = 90 - 3\alpha$

$\cancel{BM^2 = \sqrt{2x^2 - 2x^2 \cdot \cos(2\alpha)}}$

$\cancel{BM = x\sqrt{2 - 2\cos(2\alpha)}}$

$\cancel{BC = \sqrt{}}$

~~24~~

$31 \cdot 0{,}3 = \quad 9{,}3$

$|2x| + |y| + |4-2x-y| > 4$

а) $x \geq 0$; ~~$y \geq 0$~~; ~~$4-2x-y \geq 0$~~

$|4-2x-y| > 4 - |2x| - |y|$

~~1)~~ $x \geq 0$, $y \geq 0$

$4-2x-y < 0$

$4-2x < y$

$x \leq 0$, $y \leq 0$

$|4-2x-y| > 4 + 2x + y$

⇔

$x; y$ - любые.

$x \geq 0$, $y \leq 0$

$|4-2x-y| > 4-2x+y$

$4-2x-y > 0$

$4-2x > y$

⇔

$4-2x-y > y$

⇔

$y < 0$; x - любые.

$14 \cdot 5 =$

50126

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

3). $\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases}$

x и y - одного знака!

или x или y = 0.

$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy$

$-125 + 150 - 25.$

$\begin{cases} x^2 - 5xy + 4y^2 = 0 \\ x = 5 - y^2 \end{cases}$

~~125~~

$(5-y^2)^2 - 5(5-y^2)y + 4y^2 = 0$

$25 - 10y^2 + y^4 - 25y + 5y^3 + 4y^2 = 0$

~~$5y$~~

125

625

$y^4 + 5y^3 - 6y^2 - 25y + 25 = 0$

~~625 + 625 - 150 - 125 + 25~~

$1 + 5 - 6 - 25 + 25 = 0.$

$$
\begin{array}{r|l}
-\; y^4 + 5y^3 - 6y^2 - 25y + 25 & y - 1 \\
\cline{2-2}
y^4 - y^3 & y^3 + 6y^2 + 0 - 25 \\
\cline{1-1}
-\; 6y^3 - 6y^2 & \\
6y^3 - 6y^2 & \\
\cline{1-1}
-\; 0 - 25y & \\
0 & \\
\cline{1-1}
-\; -25y + 25 & \\
-25y + 25 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$(y^3 + 6y^2 + 0 - 25)(y - 1) = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

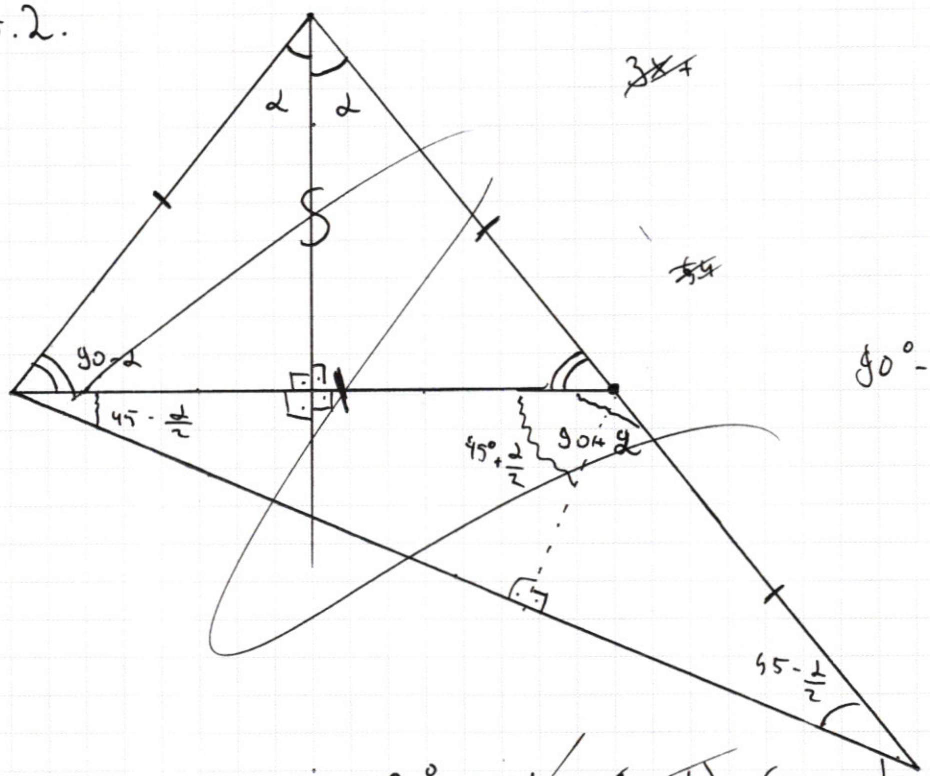
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

8.2.



~~3x+~~

~~3,4~~

$90° - 45° - \frac{\alpha}{2} = 45° - \frac{\alpha}{2}$

$180° - 2\alpha - (90-\alpha) - (45 - \frac{\alpha}{2}) =$

$= 45 - 2\alpha + \alpha + \frac{\alpha}{2} = 45 - \frac{\alpha}{5}$

$2\alpha = 60° \Rightarrow \alpha = 30°$

3-я сторона $= \sqrt{2x^2 - 2x^2 \cdot \cos 120°}$

$\sqrt{x^2} = x$

3-см

$\frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{15}{4} = 3,75$

$\frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{9}{4} =$

$= 2,25$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

б)

$x^2-2x-4y+y^2 \le 0.$

1+2

а) $(x^{\cancel{2}}-1)^2+(y-2)^2 \le 3.$

б). $|2x|+|y|+|4-2x-y| > 4.$

1. ~~2x ≥ 0; y ≥ 0; 4-2x-y ≥ 0~~

$|4-2x-y| > 4-|2x|-|y|$

1. $2x \ge 0;\ y \ge 0$

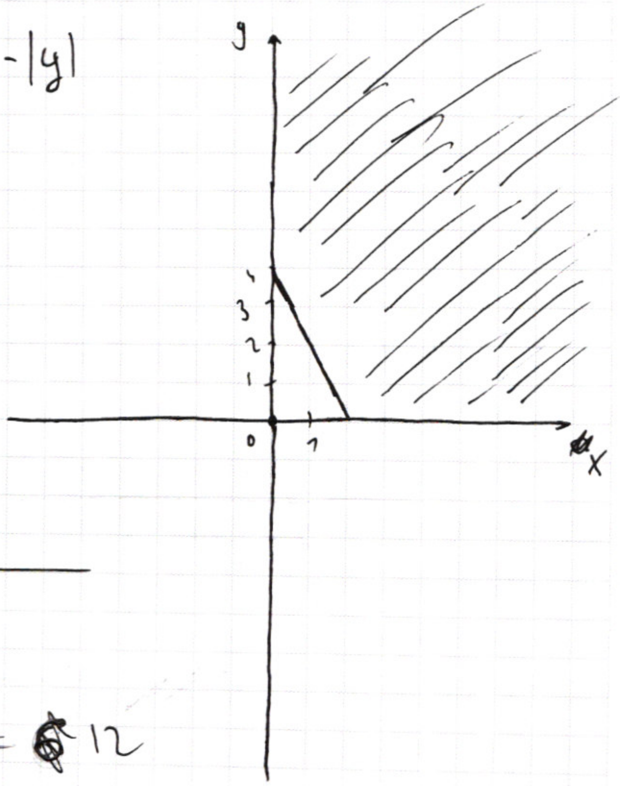
$\Leftrightarrow$

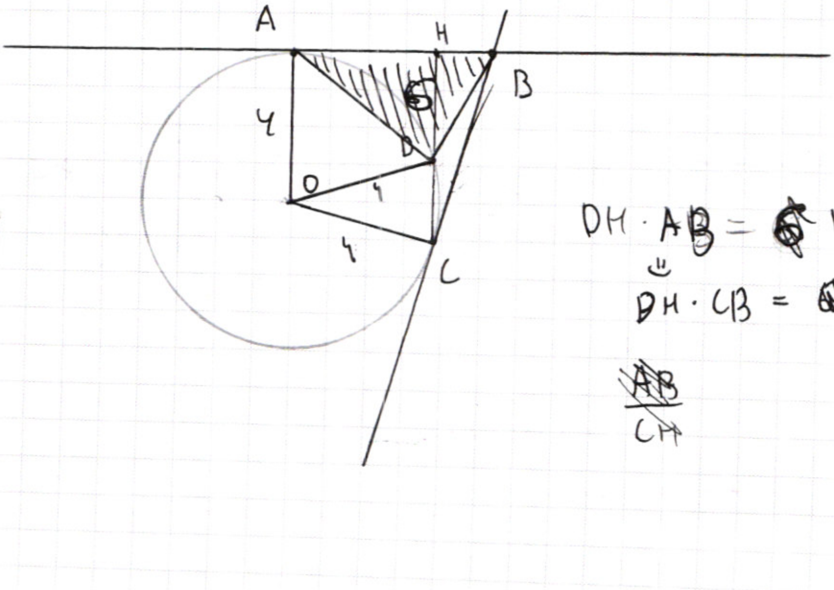
$4-2x-y \le 0$

$\Leftrightarrow$

$y > 4-2x.$

8





$DH \cdot AB = 12$

$DH \cdot CB = 12$

$\frac{\cancel{AB}}{CH}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

... т.к. $x \geq 2$

$\Downarrow$

$x \in \varnothing$.

$$\frac{16-24+10-2)(4-3)}{32-16+4\cdot 2} = \frac{0}{24} = 0 \ V.$$

в) $x \geq 0$; $x-3$; $x-2 \leq 0$

$\Downarrow$

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x-x^2+2x} \leq 0$$

$$\frac{1-6+10-2\cdot 2}{2-4+1} = \frac{1}{-1} \ V$$

$$\frac{x^2-4x+4}{x^2-2x} \leq 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{x(x-2)} \leq 0$$

\+ 0 − 2 + x

$\Downarrow$

$x \in (0;2)$

д) $x \leq 0$; $x-2$; $x-3 < 0$

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x^2-2x} \leq 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \leq 0 \Rightarrow x \in (0;2), \text{ но т.к. } x \leq 0$$

$\Downarrow$

$x \in \varnothing$.

$\Downarrow$

$x \in (0;2) \cup \{4\}$

3, 16, 51, 27, 31

19, 70, 128.

58

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$(x-1)^2+(y-2)^2 \le 3.$ $|y|+|4-y|=4$ $|y|+|-y|=0.$

$y=0$

$|2x|+|y|+|4-2x-y|>4$

6

$|y|+|6-y|=2.$

$y=0$

$y=2$

$y=4$

$\cancel{(4-2x-y)^2}$

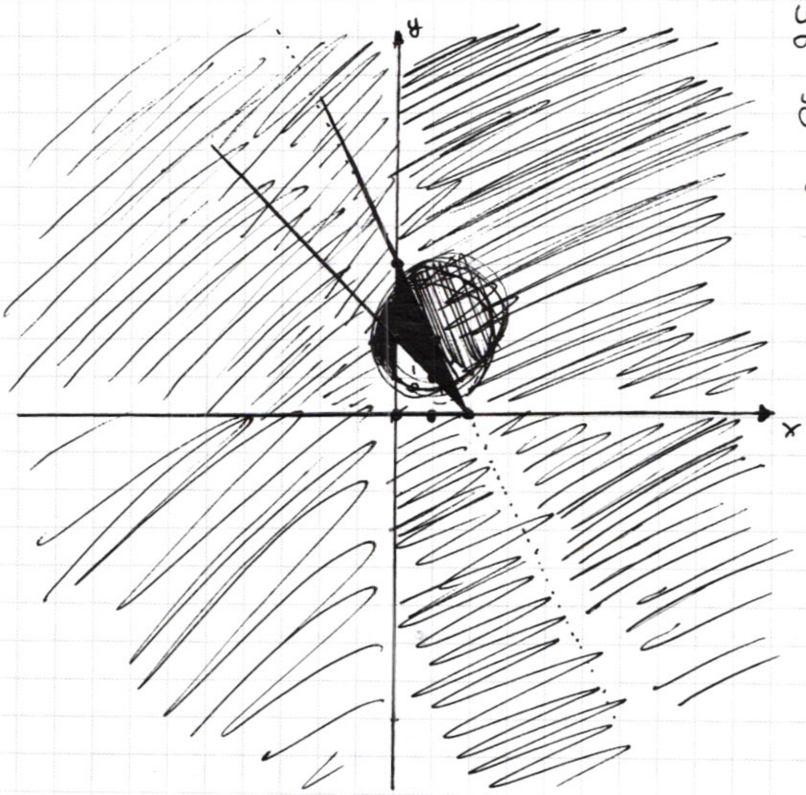
$4-2x-y=0$

$4-2x=y.$

$|4-2x-y| \cancel{> 4-|2x|-|y|}$

$|y|+|2-y|=2$ $0;1;2;$

$|2x|+|y|+|4-2x-y|=4.$



$y(x=0)=0;2;4$

$y(x=1)=0;1;2$

$y(x=2)=0$

$y(x=3)=\varnothing.$

$y(x=-1)=$

$x=1; y=4.$

$2+4+2>4$

$x=-1; y=-4.$

$2+4+$

$x=4; y=1$

$1+0{,}5+|1{,}5|$

$\cancel{1+2}$

$x=0{,}5; y=2.$

1

$1+2+|\cancel{4-1-2}|$

$x=-1; y=1.$

$2+1+|4+2-1|$

$x=-1; y=7$

$2+7$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\dfrac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leq 0$ 1; 2; 3; 5; 6 6·10·10

a) $x-3 \geq 0 \Rightarrow x-2;\ x>0$ $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ $\overline{6}$

$\Updownarrow$

$\dfrac{x^2-6x+10-2x+6}{2x^2-4x+x^2-2x} \leq 0$ $\dfrac{6!}{3!\cdot 1!\cdot 2!} =$

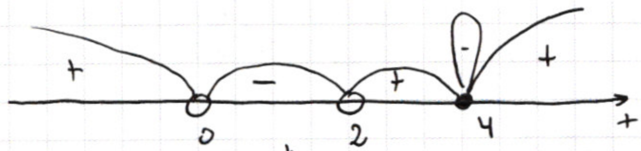
$\Updownarrow$

$\dfrac{x^2-8x+16}{3x^2-6x} \leq 0$ $2\cdot 5\cdot 6 = 60$ $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2$

$\Updownarrow$ $1+1+6+30+120+360+720 =$

$\dfrac{(x-4)^2}{\cancel{3(x}\ 3x(x-2)} \leq 0$ $= \cancel{1080}$ 1200 1238

$\Updownarrow$



$\Updownarrow$

$x \in (0;2) \cup \{4\}$, но т.к. $x \geq 3$

$\Updownarrow$

$\underline{x \in \{4\}}$

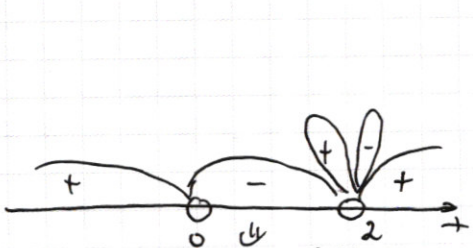
б) $x-3 \leq 0;\ x-2 \geq 0;\ x>0$

$\Updownarrow$

$\dfrac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x^2-2x} \leq 0$ 3 $\overline{C}_k^n = C_{n+k-1}^k$

$\dfrac{x^2-4x+4}{3x^2-6x} \leq 0$ 1+1+

$\dfrac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \leq 0 \Rightarrow$



$x \in (0;2)$, но . . .

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)