МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

+ 1. [3 балла] Решите неравенство
$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

+ 2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

+ 3. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

• 4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

+ 5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

+ 6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе
$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

— 7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$

$\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=(\sqrt{x})^2-2(\sqrt{y})^2$

$(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}-2(\sqrt{y})^2$

$y^2+2y=5-\sqrt{xy}$

$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})-\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=0$

$y^2+2y-5=-\sqrt{xy}$

$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-2\sqrt{y})=0$

$\sqrt{x}$

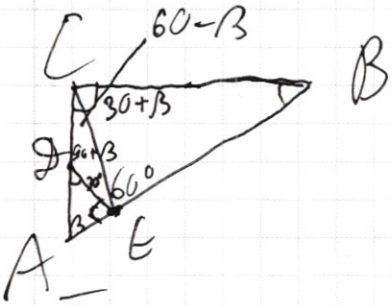
убито

$\times 3{,}14$

$1+\frac{\pi}{2}-1=2$ $4\pi=12{,}6$

$\pi\cdot1=2\pi>6{,}$

№ 5



Пот. акс.

$AC=\sqrt{7}$

$BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$

$\angle CED=30^\circ$

$\frac{AD}{AC}$ — ?

$S_{\triangle AED}$ — ?

$AB^2=7+4\cdot\frac{7}{3}=7+\frac{28}{3}=7+9\frac{1}{3}=16\frac{1}{3}=\frac{49}{3}$

$AB=7\sqrt{\frac{1}{3}}$

$4\cdot\frac{7}{3}=CE^2+BE^2-\cancel{2\cos 60^\circ}\,BE\cdot CE$ (1)

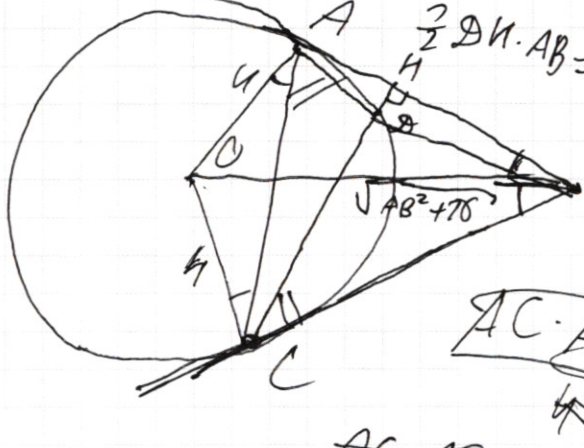
$7=CE^2+(7\sqrt{\frac{1}{3}}-BE)^2+(7\sqrt{\frac{1}{3}}-BE)\cdot CE$ (2)

(2) − (1):

$\frac{21}{3}$ $7-\frac{28}{3}=(7\sqrt{\frac{1}{3}}-BE)^2+CE\cdot7\sqrt{\frac{1}{3}}$

$-\frac{7}{3}=BE^2+\frac{49}{3}-14\sqrt{\frac{1}{3}}BE+CE\cdot7\sqrt{\frac{1}{3}}$

$-\frac{56}{3}$



$\frac{1}{2}DH\cdot AB=\frac{S}{6}$ $\triangle AB\cancel{D}=6$

$R=4$

$\frac{AB}{CH}$ — ?

$\frac{AB}{CH}=$

~~AC·AD·DC = 6~~

~~4R 26~~

~~AC·AD·DC = 6·26~~

черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4 & (2) \\ x^2-2x-4y+y^2\le 0 & (1) \end{cases}$$

1) $(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)-1-4\le 0$

$(x-1)^2+(y-2)^2\le 5$

2) $|a|+|b|\ge|a+b|$

$2x+y+4-2x-y>4$

$2x+y+2x+y-4>4$

$4x+2y>8$

$2x+y>4$

$-2x-y+4-2x-y>4$

$-4x-2y>0$

~~$x-2y=\sqrt{xy}$~~

~~$x+y^2=5$~~

~~$x=5-y^2$~~

~~$5-y^2-2y=\sqrt{(5-y^2)y}$~~

x^2-

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\,|x-2|}\le 0$$

$\frac{16}{3}-\frac{28}{3}=-\frac{12}{3}=-4$

$16\cdot 4=64$

12

$\frac{7}{9}\sqrt3$

$\frac{7}{3}\sqrt3$

$\frac{\frac{7}{3}}{\frac{7}{9}}=\frac{7\cdot 9}{3}=21$

$\frac{\sqrt3}{(\sqrt3)^4}=\frac{1}{(\sqrt3)^3}=$

$=\frac{1}{3\sqrt3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt3}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = p$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{7}{y}\right) = f(7) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$x=2$
$y=7$

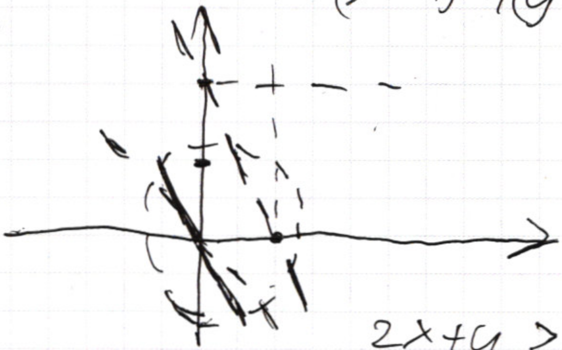
$f\left(\frac{x}{y}\right) = x + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$|2x| + |y| + |4-2x-y| > 4$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 \le 5$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y} > 0$

$2x+y-4$



$7 + 4 \cdot \frac{7}{3} =$

$= \frac{28+21}{3} = \frac{49}{3}$

$2x+y > 4$

$4-2x-y > 4$

$-4x-2y > 0$

$-y+4-2x-y+2x > 4$

$-2y > 0$

$-2x+y < 0$

$7\sqrt{\frac{7}{3}}$

$4x \le 600$

$\frac{\sqrt{7}\sqrt{7}}{7\sqrt{\frac{7}{3}}} =$

$6x > 600$

$149 - 101 + 1 = 49$

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x||x-2|} < 0$$

$2x^2-4x+|x||x-2|$

$2x^2-4x+x^2+2x$

$x^2-6x+10-2x+6=0$

$3x^2-6x$

$x^2-8x+16=(x-4)^2$

$3x(x-2) > 0$

$x^2-6x+10-6+2x = x^2-4x+4$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{x}+\sqrt{xy} \ (1) \\ x+y^2=5 \ (2) \end{cases}$$

ОДЗ: $xy\geq 0 \Leftrightarrow$

1) $(\sqrt{x})^2-2(\sqrt{y})^2=\sqrt{xy}$

$(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})-\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=0$

$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-2\sqrt{y})=0$

$\sqrt{x}=-\sqrt{y}$ или $\sqrt{x}=2\sqrt{y}$

$$\frac{x^2-6x+16-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leq 0$$

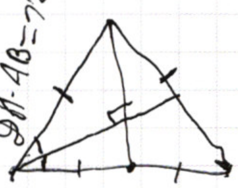
№2

$P=600$

$2x+x=3x$

$3x>y$

$3x+y=600$



$\frac{?}{=}$ ДН·АВ=6

ДН·АВ=12

R=1

$S_{\triangle ABD}=6$

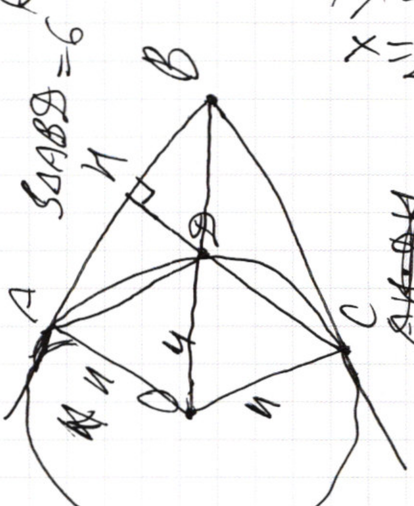
$4x=600$

$x=\cancel{2}150$

$3x>300$

$x>100$

101



$y+x>2x$

$3x>y$

$4x+y>2x+y$

$y>x$

$AH^2=HD\cdot DC$

$(BD+8)$

BC^2

$303+y=600$

$BE(BE+8)=$

$BE+H=\sqrt{HB+16}$

$BE^2+8BE=BE^2+16+8BE-16$

$x(2-x)=$

$=2x-x^2$

$-x(2-x)=-2x+x^2$

$x^2-2x=x(x-2)$

$\frac{12}{\frac{x^{33}}{3}}$

$\frac{}{4112}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

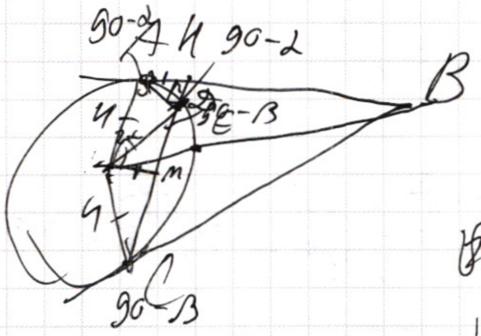
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$DH + 2\sqrt{16 + 2HD - 2\sqrt{HD(HD+16)}} - CH$

$CH^2 + DH^2 - 2DH \cdot CH = 4 \cdot 16 + 4HD - 4\sqrt{HD(HD+16)}$

$AH^2 = HD \cdot DC$



$4 \cdot (\sqrt{16 - AH^2}$

$\sqrt{16 - AH}$

$\sqrt{16 - AH^2} + 4$

$HD = \frac{12}{AB}$

$\frac{12}{AB} + \frac{AH \cdot AB}{12}$

$\cancel{7\sqrt{3}}$

$\frac{144 + (AH \cdot AB)^2}{12AB} = \sqrt{16 - AH^2} + 4$

$DH + 2\sqrt{16 - AH^2} = HC$

$AH^2 = HD \cdot 2\sqrt{16 - AH^2}$ $\quad 144 + (AH \cdot AB)^2 = \cancel{12AB}$

$AH^4 = 4HD(16 - AH^2)$ $\quad \cancel{144^2 + (AH \cdot AB)^4 + 144(AH \cdot AB)^2 = 16 - AH^2 + 16}$

$AH^4 + 4AH^2 HD - 64HD$

$D = 16HD^2 + 16 \cdot 16\, HD = 16HD(HD + 16)$

$AH^2 = \frac{4\sqrt{HD(HD+16)} - 4HD}{2} = 2\sqrt{HD(HD+16)} - 2HD$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$\cancel{\sqrt{16-AH^2}+16}$

$OM = \cancel{16-16-AH^2 \Rightarrow A}$

$OM - ?$

$OM^2 = \frac{12}{AB} \cdot 2 \cdot \sqrt{16-OM^2}$

$OM^2 = \frac{24\sqrt{16-OM^2}}{AB}$

$AB^2 = \frac{24^2 \cdot 16 - (24 \cdot OM)^2}{OM^4} = 24^2 \cdot 4 -$

$\left(\frac{12}{AB} + 2 \cdot \sqrt{16-OM^2}\right)^2 = \frac{144}{AB^2} + 4 \cdot 16 - 4OM^2$

$\frac{OM^4}{4(16-OM^2)} + 64 - 4OM^2$

$OM^4 + \cancel{64 \cdot 4}\,256\,(16-OM^2) - 16 \cdot (16-OM^2)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \; (1) \\ x+y^2=5 \; (2) \end{cases}$$

~~ОДЗ:~~ $xy>0$

При $x=0$ 1) $-2y=0 \Rightarrow y=0$

2) $0+0=5$ неверно

При $y=0$ 1) $x=0$

2) $0+0=5$ неверно

ОДЗ:

$$xy>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, y>0 \; (I) \\ x<0, y<0 \; (II) \end{cases}$$

I 1) $(\sqrt{x})^2-2(\sqrt{y})^2=\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$

$(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})-\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=0$

$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-2\sqrt{y})=0$

$\sqrt{x}=-\sqrt{y}$ или $\sqrt{x}=2\sqrt{y}$

$\sqrt{x}=-\sqrt{y}$ неверно, т.к. $\sqrt{x}>0$; $-\sqrt{y}<0$

Подставим $\sqrt{x}=2\sqrt{y}$ в (2):

2) $4y+y^2=5$

$y^2+4y-5=0$

$y_1=1 \Rightarrow \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4$

$y_2=-5$ п.к., т.к. $y>0$

II Заменим переменные: $x=-n$; $y=-m$, где $n,m>0$

$-(\sqrt{n})^2-(-2(\sqrt{m})^2=\sqrt{m}\cdot\sqrt{n}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$(\sqrt{m}-\sqrt{n})(\sqrt{m}+\sqrt{n})+\sqrt{m}(\sqrt{m}-\sqrt{n})=0$

$(\sqrt{m}-\sqrt{n})\cdot(2\sqrt{m}+\sqrt{n})=0$

$\sqrt{m}=\sqrt{n}$ или $\sqrt{n}=-2\sqrt{m}$ неверно, т.к. $\sqrt{n}>0$, а $-2\sqrt{m}<0$

Подставим $\sqrt{m}=\sqrt{n}$ в (2) $\left(y^2=(-m)^2=n^2=(\sqrt{m})^4=(\sqrt{n})^4=n^2\right)$:

$-n+n^2=5$

$n^2-n-5=0$

$D=1+4\cdot5=21$

$n_1=\frac{1-\sqrt{21}}{2}<0$ н.к., т.к. $n>0$

$n_2=\frac{1+\sqrt{21}}{2} \Rightarrow x=-\frac{1+\sqrt{21}}{2}$; $y=-m=-(\sqrt{m})^2=-(\sqrt{n})^2=-n=$
$=-\frac{1+\sqrt{21}}{2}$

Ответ: $(4;1)$, $\left(-\frac{1+\sqrt{21}}{2};-\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$

№6 $\begin{cases}|2x|+|y|+|4-2x-y|>4 & (1)\\ x^2-2x-4y+y^2\le 0 & (2)\end{cases}$

Преобразуем (2):

$(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)-5\le 0$

$(x-1)^2+(y-2)^2\le 5$

Решения неравенства – множество точек, ограниченных окружностью с ц. в т. $(1;2)$ и радиусом $\sqrt{5}$

Рассмотрим (1):

при $2x+y>4$ ~~неравенство~~; $x\ge0$; $y\ge0$ неравенство принимает вид:

$2x+y+2x+y-4>4$

$2x+y>4$, т.е. ~~при $2x+y>4$~~ неравенству (1) удовлетворяют все $x\ge0$ $y\ge0$ такие, что $2x+y>4$

при $2x+y<4$; $x\ge0$; $y\ge0$:

$2x+y+4-2x-y>4 \Leftrightarrow 4>4$ неверно

при $2x+y>4$; $x\ge0$; $y<0$:

$2x-y+2x+y-4>4 \Leftrightarrow x>2$

при $2x+y<4$; $x\ge0$; $y<0$

$2x-y+4-2x-y>4 \Leftrightarrow y<0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

при $2x+y>4$; $x<0$; $y\geq 0$

$-2x+y+2x+y-4>4 \Leftrightarrow y>4$

при $2x+y<4$; $x<0$; $y\geq 0$:

$-2x+y+4-2x-y>4 \Leftrightarrow x<0$

при ~~2x+y~~ $x<0$; $y<0$ $2x+y<4$ всегда, ведь ~~тогда~~ тогда ~~2x+~~ $2x+y<0$, поэтому при $x<0$; $y<0$:

$-2x-y+4-2x-y>4 \Leftrightarrow 2x+y<0$

любые $x<0$, $y<0$ подходят (1) ~~нерав~~ неравенству

Т.е. неравенству (1) удовлетворяют все x, y, кроме таких $x\geq 0$, $y\geq 0$, что $2x+y<4$

Построим фигуру, удовлетворяющую системе:

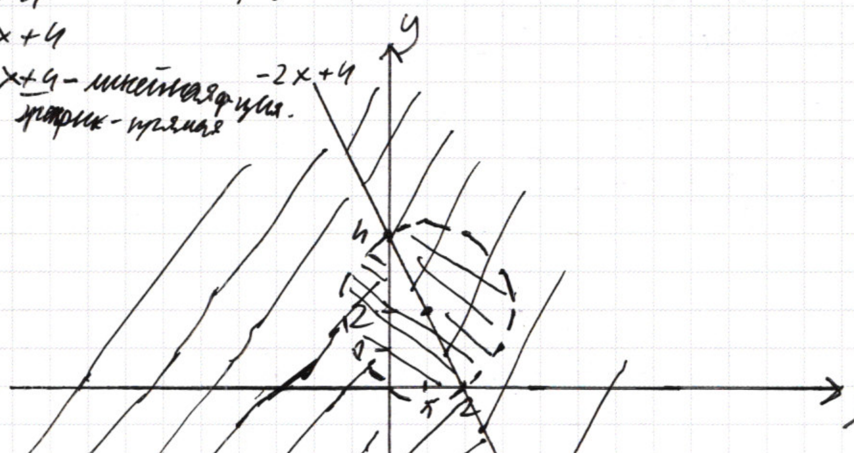
$2x+y>4$

$y>-2x+4$

$f(x)=-2x+4$ - линейная функция.

$y>f(x)$ ~~граф~~ график - прямая

x	0	2
y	4	0



Наша фигура является окружностью с радиусом $\sqrt{5}$, ~~радиус~~ из которой ~~вырезан~~ вырезан треугольник ~~с катет~~ прямоугольный с катетами 2 и 4

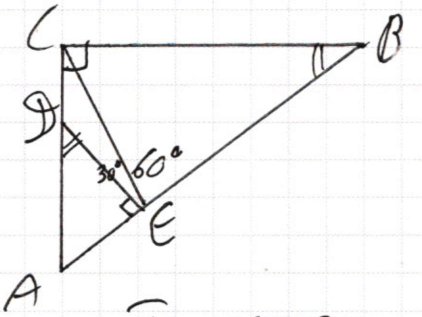
~~По~~ Площадь окружности равна $\pi\cdot R^2$, а прямоугольного треугольника — $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2=4=S_\Delta$

$S_{окр}=\pi\cdot R^2=\pi\cdot(\sqrt{5})^2=5\pi \Rightarrow$ площадь фигуры

$S_{фигуры}=S_{окр}-S_\Delta=5\pi-4$

Ответ: площадь фигуры равна $5\pi - 4$

№ 5



Дано:

$\triangle ABC$ – прямоугольный

$AC = \sqrt{7}$

$BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$

$\angle CED = 30°$

$DE \perp AB$

Найти:

$\frac{AD}{AC}$ – ?

$S_{\triangle AED}$ – ?

Решение:

По т. Пифагора в $\triangle ABC$:

$AC^2 + BC^2 = AB^2 \Rightarrow AB = \sqrt{7 + \frac{28}{3}} = \sqrt{\frac{49}{3}} = 7\sqrt{\frac{2}{3}}$

$DE \perp AB \Rightarrow \angle DEB = 90° \Rightarrow \angle CEB = 90° - 30° = 60°$

~~По т. косинусов~~

$\cancel{BC^2 = CE^2 + BE^2 - 2\cdot\cos 60° \cdot BE \cdot CE = \frac{28}{3}}$

$\cancel{AC^2 = CE^2 + (AB - BE)^2 - 2\cos\angle CEA \cdot (AB - BE)\cdot CE = 7}$ $\Rightarrow$

$\cancel{\angle CEA = \angle CED + \angle DEA = 30° + 90° = 120°}$

$\cancel{\Rightarrow 7 = CE^2 + \left(7\sqrt{\frac{2}{3}} - BE\right)^2 + \left(7\sqrt{\frac{2}{3}} - BE\right)\cdot CE \ ;(1)}$

$\cancel{\frac{28}{3} = CE^2 + BE^2 - BE\cdot CE \ ;(2)}$

$\cancel{(1) - (2):}$

$\cancel{-\frac{7}{3} = 14\sqrt{\frac{2}{3}}\,BE + \frac{49}{3} + 7\sqrt{\frac{2}{3}}\,CE}$

$\angle BE$

$\sin\angle CAB = \frac{CB}{AB} = \frac{2\sqrt{\frac{7}{3}}}{7\sqrt{\frac{7}{3}}} = \frac{2\sqrt{7}}{4}$

$\sin\angle CBA = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{7}}{7\sqrt{\frac{7}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$

~~В $\triangle ADE$ $\angle CAB + \angle CBA = 90°$~~

~~В $\triangle ABC$ $\angle CAB + \angle$~~

В $\triangle ADE$: $\angle CAB + \angle ADE = 90°$

В $\triangle ABC$: $\angle CAB + \angle CBA = 90°$

$\Downarrow$

$\angle ADE = \angle CBA$

$\Downarrow$

$\sin\angle ADE = \sin\angle CBA = \sqrt{\frac{3}{7}}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Ответ: $\frac{AD}{AC}=\frac{7}{3}$; $S_{\triangle AED}=\frac{\sqrt{3}}{9}$

№7

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leq 0$$

$x\geq 3$:

$$\frac{x^2-6x+10-2x+6}{2x^2-4x+x^2-2x}\leq 0$$

$(x-4)^2\geq 0$

$$\frac{(x-4)^2}{3x(x-2)}\leq 0 \;;$$ $\cancel{(x-4)^2\geq 0}$ всегда, т.к. квадрат всегда ≥ 0

при $x\geq 3$ $3x(x-2)>0$.

$x=4$ – единственное решение при $x\geq 3$

$x\in[2;3)$:

$$\frac{x^2-6x+10-6+2x}{2x^2-4x+x^2-2x}\leq 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{3x(x-2)}\leq 0$$

$(x-2)^2\geq 0$ всегда

при $x\in(2;3)$ $3x(x-2)>0$

при $x=2$ знаменатель обращается в нуль, что означает, что решений нет при $x\in[2;3)$

при $x\in[0;2)$:

$$\frac{(x-2)^2}{2x^2-4x+2x-x^2}\leq 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{x(x-2)}\leq 0$$

$(x-2)^2\geq 0$ всегда

при $x\in(0;2)$ $x>0$; $x-2<0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ неравенство верно при $x\in(0;2)$

(при $x=0$ знаменатель обращается в нуль)

при $x<0$:

$$\frac{(x-2)^2}{3x(x-2)}\leq 0$$

$(x-2)^2\geq 0$ всегда

~~при $x<0$~~ $3x(x-2)>0$, т.к. $x<0$ и $x-2<0$ при $x<0$

при $x<0$ решений нет

Итак, подходят только значения на промежутках $(0;2)\cup\{4\}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

По т. синусов в $\triangle CBE$:

$$\frac{CB}{\sin 60^\circ} = \frac{CE}{\sin\angle CBA} = \frac{BE}{\sin\angle BCE}$$

$\Downarrow$

$$CE = CB\cdot\frac{\sin\angle CBA}{\sin 60^\circ} = CB\frac{\sqrt{\frac{3}{7}}}{\frac{\sqrt3}{2}} = CB\sqrt{\frac{4}{7}} = CB\cdot 2\sqrt{\frac{1}{7}} = 2\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot 2\cdot\sqrt{\frac{1}{7}} =$$
$$= 4\sqrt{\frac{1}{3}}$$

По т. косинусов в $\triangle CBE$:

$$CE^2 + BE^2 - 2\cdot\cos 60^\circ\cdot BE\cdot CE = BC^2 = 4\cdot\frac{7}{3}$$

$$16\cdot\frac{1}{3} + BE^2 - BE\cdot 4\cdot\sqrt{\frac{1}{3}} = 4\cdot\frac{7}{3}$$

$$BE^2 - 4\sqrt{\frac{1}{3}}BE - 4 = 0$$

$$D = \frac{16}{3} + 16 = \frac{64}{3}$$

$$BE_1 = \frac{4\sqrt{\frac13} + 8\sqrt{\frac13}}{2} = 6\sqrt{\frac13} \Rightarrow AE = AB - BE =$$
$$BE_2 = \frac{4\sqrt{\frac13} - 8\sqrt{\frac13}}{2} < 0 \text{ п.к.} \qquad = 7\sqrt{\frac13} - 6\sqrt{\frac13} = \sqrt{\frac13}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac12 AC\cdot BC = \frac12\sqrt7\cdot 2\sqrt{\frac73} = 7\sqrt{\frac13}$$

$\angle CBA = \angle ADE$
$\angle ACB = \angle DEA = 90^\circ$ $\Rightarrow$ $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ по двум углам

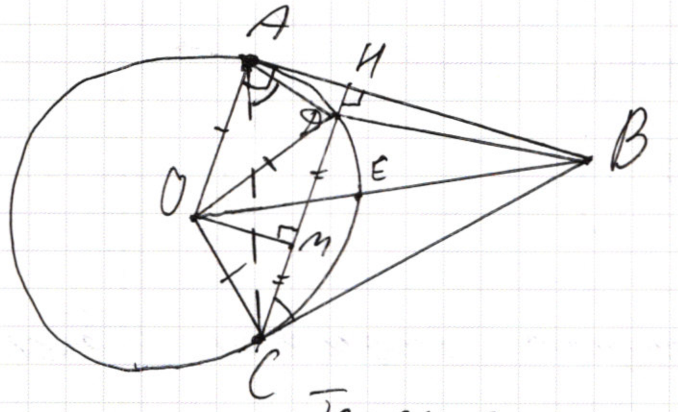
$$k = \frac{AE}{AC} = \frac{\sqrt{\frac13}}{\sqrt7} = \sqrt{\frac{1}{21}} = \frac{AD}{AB}$$

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = k^2 = \frac{1}{21} \Rightarrow S_{\triangle ADE} = \frac{1}{21}\cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{21}\cdot 7\sqrt{\frac13} =$$
$$= \frac13\sqrt{\frac13} = \frac{\sqrt3}{3\cdot 3} = \frac{\sqrt3}{9}$$

$$\frac{AD}{AB} = \sqrt{\frac{1}{21}} \Rightarrow AD = \sqrt{\frac{1}{21}}\cdot AB = \sqrt{\frac{1}{21}}\cdot 7\sqrt{\frac13} =$$
$$= \frac13\sqrt{\frac71} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{\frac13\sqrt{\frac71}}{\sqrt7} = \frac{\cancel{7}}{3\cdot\sqrt7\cdot\sqrt7} = \frac13$$

Ответ: 49

№ 4



Дано:

$\omega(O; R)$

$R = 4$

$CH \perp AB$

$CH \cap \omega = D$

$AB; BC$ - касательные к ω

$S_{\triangle ABD} = 6$

Найти:

$\frac{AB}{CH}$ - ?

Решение:

Из т. B проведены две касательные

$AB = BC$ (~~касательные~~ отрезки касательных к окружности, проведённых из одной т. равны)

$AO \perp AB$ (касательная $\perp$ радиусу всегда)

$CH \perp AB$

$AO \parallel CH$; Построим $OM \perp CH$, тогда

$AHMO$ - ~~прямоугол~~ прямоугольник

$(AO \parallel CH;\ OM \parallel AH (CH \perp AB;\ OM \perp CH))$

$OM = AH;\ AO = HM = R = 4$

В $\triangle OMC$ - прямоугольном по т. Пифагора:

$MC^2 = OC^2 - OM^2$

$OC = R = 4;\ OM = AH$ $\Rightarrow MC = \sqrt{16 - AH^2}$

$S_{\triangle ABD} = 6 = \frac{1}{2} DH \cdot AB \Rightarrow DH = \frac{12}{AB}$

$OD = OC = R \Rightarrow OM$ - высота, медиана, биссектриса, т.к. $\triangle ODC$ - р/б.

По т. Пифагора $OB^2 = R^2 + AB^2$

$(BE+R)^2 = R^2 + AB^2 \Rightarrow EB^2 + 8BE = AB^2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

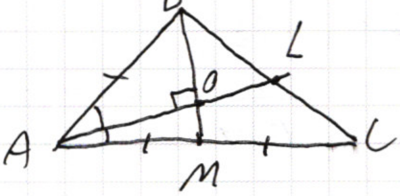
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $x \in (0;2) \cup \{4\}$

№2

Построим Δ, у которого медиана и биссектриса $\perp$:



У ΔABO и ΔAOM:

1) $\angle BAL = \angle LAM$ (AL-биссектриса)

2) AO-общая

3) $\angle BOA = \angle AOM = 90°$ ($BM \perp AL$)

$\Downarrow$

$\Delta ABO = \Delta AMO$ по стороне и прилежащим к ней углам

$\Downarrow$

надо искать треугольники, у которых одна сторона x, другая — $2x$, тогда пусть третья равна y. По неравенству Δ:

$x+y>2x \Rightarrow y>x$

$x+2x>y \Rightarrow y<3x$ $\Rightarrow$

$P_\Delta = x+2x+y=600 \Rightarrow y=600-3x$

$\Rightarrow \begin{cases} x<150 \\ x>100 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$ таких x будет от 101 до 149 включительно, т.е. 49 вариантов значений x при каждом из которых y определяется однозначно по формуле $y=600-3x$

$\Downarrow$

таких треугольников ровно 49

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle HAC = \angle HCB$ (по т. об угле между хордой и касательной)