МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство
$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE\perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе
$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2\leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 18$, $1\leqslant y\leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\dfrac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leq 0$

1) Заметим, что $|x|\cdot|x-2| = \begin{cases} x^2-2x \ (0>x \text{ или } x>2) \\ -x^2+2x \ (0\leq x\leq 2) \end{cases}$

2) $0\leq x\leq 2$, тогда $x<3$, т.е. $|x-3| = -(x-3)$. Раскрыв модуль, получим

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x-x^2+2x}\leq 0$$

$$\frac{x^2-4x+4}{x^2-2x}\leq 0,$$

$$\frac{(x-2)^2}{x(x-2)}\leq 0 \qquad (*)\ x\neq 2,\ x\neq 0$$

Решим неравенство методом интервалов

$+\ 0\ -\ 2\ +$ $\rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>2 \end{array}\right.$ учитывая, что, раскрывая модуль, мы считали $0\leq x\leq 2$, на пром-ке нет реш-я

3) $x<0$, $\rightarrow x<3$ $|x-3| = -(x-3)$.

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x^2-2x}\leq 0$$

$$\frac{x^2-4x+4}{3x(x-2)}\leq 0$$ Аналогично п.2 $\left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>2 \end{array}\right.$, ~~т.к.~~ $(x<0)$, ~~Ответ~~ реш-е на данном пром-ке $(-\infty;0)$ (1)

4) $x>2$, для $x\leq 3$ аналогичное ~~п.2~~ п.3 неравенство, т.е. $\left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>2 \end{array}\right.$ считая, что $\begin{cases} x>2 \\ x\leq 3 \end{cases}$

получим $[2;3]$ (2)

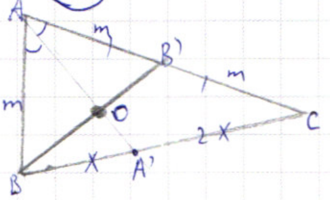
5) $x>3$, выражение примет вид

$$\frac{x^2-6x+10-2x+6}{2x^2-4x+x^2-2x}\leq 0 \text{ или } \frac{x^2-8x+16}{3x^2-6x}\leq 0 \quad \frac{(x-4)^2}{3x(x-2)}\leq 0$$

опять же т.к. верхняя часть ≥ 0 при любом x, ~~а нижняя~~ то неравенство эквивалентно п 2-4. ($x=4$ учтен ~~т.к.~~ при котором $(x-4)^2=0$ учтен), т.е. $\left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>2 \end{array}\right.$ т.к. $x>3$, то $(x>3$ $(3;+\infty)$ (3)

Объединяя промежутки (2) и (3) получим Ответ: $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$

2



Дано:
ΔABC
AA' - бис-са
BB' - медиана
$AA' \perp BB'$

Найти: AB; BC; AC

1) Для начала решим задачу, указанную справа. Выразим стороны Δ-на через минимальное кол-во переменных

2) ~~Заметим~~ введем $AB' = B'C = m$ (BB' - медиана)

3) ~~Заметим, что т.к.~~ Введем $AA' \cap BB' = O$

4) Заметим, что т.к. $AO \perp BB'$ и AO - бис-са $\angle A$, то $\Delta BAB'$ - р/б, т.е. $AB = AB' = m$

5) По св-ву бис-сы она делит сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам:
$\frac{BA'}{A'C} = \frac{AB}{AC}$ $\quad BA' = \frac{1}{2}A'C$ введем $A'B = x$, тогда $A'C = 2x$

~~6) P_{ABC}~~ Таким образом, получаем ΔABC со сторонами $m; 2m; 3x$, где $m; x$ - некие целые (т.к. $m, x > 0$, то натуральные) числа.

$P_{ABC} = m + 2m + 3x = 600$, откуда $3(m+x) = 600$ $\quad m + x = 200$ $\quad x = 200 - m$

Запишем неравенство Δ-на для ΔABC:

$$\begin{cases} AB < AC + BC \\ AC < AB + BC \\ BC < AB + AC \end{cases} \quad \begin{cases} m < 2m + 3x \\ 2m < m + 3x \\ 3x < m + 2m \end{cases}$$

считая, что $m > 0$ и $x > 0$, т.е. $m + x > 0$ упростим систему до

$\begin{cases} m < 3x \\ x < m \end{cases}$ подставив $x = 200 - m$, получим

$$\begin{cases} m < 600 - 3m \\ 200 - m < m \end{cases} \quad \begin{cases} 4m < 600 \\ 2m > 200 \end{cases} \quad \begin{cases} m < 150 \\ m > 100 \end{cases}$$

, Заметим, что для любого $m \in (100; 150)$ выполняется $\begin{matrix} m > 0 \\ x > 0 \end{matrix}$. Т.е. кол-во решений исходной задачи равно кол-ву чисел из промежутка $(100; 150)$ или 49

Ответ: 49 треугольников

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} & (1) \\ x^2+y^2=5 & (2) \end{cases}$

1) Возведем ур-е (1) в квадрат, получим

$4y^2+x^2-2\cdot 2y\cdot x = x\cdot y$ или

$4y^2-5xy+x^2=0$

2) Заметим, что при $x=0$ y должен быть равен 0, но пара $(0;0)$ – не является решением для (2)

3) Значит, мы можем умножить ур-е на $\frac{1}{x^2}$, сохранив корни:

$\frac{4y^2}{x^2}-\frac{5y}{x}+1=0$ введем $t=\frac{y}{x}$, ур-е примет вид

$4t^2-5t+1=0$ $D=25-4\cdot 4=9=3^2$ $t_{12}=\frac{5\pm 3}{8}$ $\begin{cases} 1 \\ \frac{1}{4}\end{cases}$

4) Вернувшись к $t=\frac{x}{y}$ получим, что либо $x=y$, либо $x=4y$,

5) причем для $x=y$ ур-е (1) принимает вид $y-2y=\sqrt{y^2}$, $-y=|y|$ или $y\leq 0$. Подставив $x=y$ в (2), получим $y^2+y-5=0$.

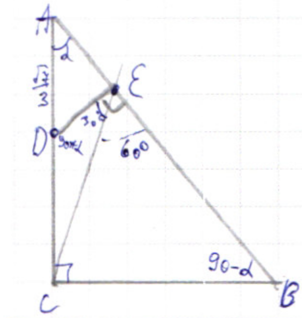
$D=1+4\cdot 5=21$ $y=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$, причем $y=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}>0$, что не уд-ет $(y\leq 0)$ т.е. одно из решений $(x;y)=\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2};\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)$

6) Если $x=4y$, то $4y-2y=\sqrt{4y^2}$ $2y=|2y|$ $y=|y|$ или $y\geq 0$

Подставив $x=4y$ в (2), получим $y^2+4y-5=0$, по теор. Виета

$y_1=-5$ $y_2=1$ $y_1=-5$ не уд $y\geq 0$, т.е. $y=1$, $x=4y=4$, решение №2 $(x;y)=(4;1)$

Ответ: $(4;1)$ $\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2};\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)$



Дано: $\triangle ABC$ – прямоуг
$\angle C = 90°$
$DE \perp AB$
$AC = \sqrt{7}$
$BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$
$\angle CED = 30°$
Найти: $AD:AC$; S_{ADE}

1) По теор. Пифагора $AB = \sqrt{AC^2+BC^2} = \sqrt{7 + \frac{4\cdot 7}{3}} = \sqrt{\frac{3\cdot 7 + 4\cdot 7}{3}} = 7\sqrt{\frac{1}{3}}$

2) Введем $\angle CAD = \alpha$, $\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{2\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}}{\frac{7}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$

$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{7}}{7\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}{7} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

3) Заметим, что $\angle EDC = 90° + \alpha$ (внешний для $\triangle ADE$)

~~4) $\angle ECD = 180° - 30° - 90° - \alpha$~~ ~~DE~~ 4) По теор. синусов $\frac{CE}{\sin(90+\alpha)} = \frac{CD}{\sin(30)}$ ($\triangle DEC$)

Заметим, что $\sin(90+\alpha) = \sin(180-(90+\alpha)) = \sin(90-\alpha) = \cos\alpha$, т.е.

$\left[CE = \frac{CD}{\frac{1}{2}}\cdot\cos\alpha = \frac{2CD\cdot\sqrt{21}}{7} \right)$ $\frac{CE}{\cos\alpha} = 2CD$

5) в $\triangle CEB$ по теор. синусов $\frac{BC}{\sin 60} = \left(\frac{CE}{\sin(90-\alpha)}\right)$ $\frac{BC}{\sin 60} = 2CD$ $CD = \frac{2\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{1}{2}$

$\frac{2\cdot\sqrt{7}\cdot 2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{7}}{3}$

6) $AD = AC - CD = \sqrt{7} - \frac{2}{3}\sqrt{7} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

7) $AD : AC = \frac{\sqrt{7}}{3} : \sqrt{7} = \underline{\underline{1:3}}$

8) Заметим, что $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC\cdot BC = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot 2\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$

9) $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ по двум углам $k = \frac{AD}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{3}}{\frac{7}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{7} = \sqrt{\frac{1}{21}}$

10) $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = k^2 = \frac{1}{21}$ $S_{ADE} = \frac{7\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{21} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

Ответ: 1:3 ← отношение; $\frac{\sqrt{3}}{9}$ ← площадь

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7

1) заметим, что подставив $a=b$ получим $f(a^2)=2f(a)$

в частном случае $a=1$ $f(1)=2f(1)$, т.е. $f(1)=0$

2) Подставив $b=\frac{1}{a}$, получим $f(a\cdot\frac{1}{a})=f(a)+f(\frac{1}{a})$ $f(1)=f(a)+f(\frac{1}{a}) \rightarrow$

$f(a)+f(\frac{1}{a})=0$ $f(a)=-f(\frac{1}{a})$, ~~т.е. f(x)~~

3) Тогда $f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)$, т.е. $f(x/y)<0$, когда $f(x)<f(y)$

4) Посчитаем $f(a)$ для $1\le a\le 18$

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
f(a)	0	2	3	4	5	5	7	6	6	7	11	7	13	9	8	8	17	8

f(простых) = число по условию

$f(4)=2f(2)=4$ (п.1)

$f(6)=f(2)+f(3)=2+3=5$

$f(8)=f(2)+f(4)=2+4=6$

1) Заметим, что $f(2k)=f(k)+2$ (для четных)

$f(3k)=f(k)+3$ (для $\vdots 3$)

вообще т.к. $f(ab)=f(a)+f(b)$ то если a или b составное, можно его разложить далее, т.е. $f(a)=f(p_1)+f(p_2)+f(p_3)\ldots$ где p_i – простой делитель

2) упорядочим таблицу в порядке $\uparrow f(a)$.

a	1	2	3	4	5	6	8	9	7	10	12	15	16	18	14	11	13	17
f(a)	0	2	3	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	11	13	17

~~f(a) f(x)~~ | f(x) 0 | f(y), f(y)>f(x)

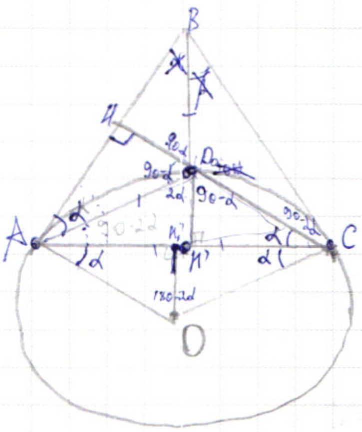
f(x)	кол-во f(x)	кол-во f(y), что f(y)>f(x)	кол-во пар (x;y) по правилу произведения
0	1	17	17
2	1	16	16
3	1	15	15
4	1	14	14
5	2	12	24
6	2	10	20
7	3	7	21
8	3	4	12
9	1	3	3
11	1	2	2
13	1	1	1
17	1	0	0

$=N(f(x))\cdot N(f(y))$ N – кол-во

итого $17+16+15+14+24+20+21+12+3+2+1=$
$=20+20+30+30+45=145$

Ответ: 145 пар

(*) повторов не было, т.к. брались f(x) в возрастании



Дано:
окр-ть O
BA; BC-кас-е (A; C-точки кас-я)
$CH \cap O = D$ (CH- высота)
$S_{\Delta ABC} = 6$ $R = 4$
Найти: $AB \cdot CH$

1) Заметим, что $\angle HDC = \frac{1}{2} \smile AD$ (между AD и AH) пусть $\angle HAD = \alpha$, тогда $\smile AD = 2\alpha$

2) ~~3a~~, Заметим, что $\angle DCA = \frac{1}{2} \smile AD$ (вписанн) $= \alpha$

3) значит $\Delta HAD \sim \Delta HAC$ $\frac{HA}{HC} = \frac{HD}{HA} = \frac{AD}{AC}$

4) Проведем OA; OC ($\perp BA$ и $\perp BC$, $= R$)

5) Заметим, что $\angle HDA = 90° - \alpha$;

6) $\angle OAH = 90°$; $\Rightarrow \angle DAO = 90° - \alpha$

7) т.к. $\angle HAC = 90° - \alpha$, то $\angle HAD = \angle CAO$ (между // прямыми) $= \alpha$

8) ΔAOC - р/б $\Rightarrow \angle ACO = \alpha$

9) т.к. $\angle OCB = 90°$, то $\angle BCO = 90° - 2\alpha$
~~$\angle BDC = \angle HD$~~

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4-2x-y| > 4 & (1) \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \le 0 & (2) \end{cases}$$

из (2) $x^2 - 2x + y^2 - 4y \le 0$, дополнив до полного кв-та получим

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 - 5 \le 0$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 \le 5$ — круг с центром $(1;2)$ $R = \sqrt{5}$

2) видоизменив (1) получим $|2x| + |y| + |2x+y-4| > 4$

$(|2x| + |y| - 4) + |2x+y-4| > 0$

1) пусть $x > 0$

1.1) а $y \ge 0$ $2x + y - 4 + |2x+y-4| > 0$. если $2x+y-4 < 0$, то

$2x + y - 4 - 2x - y + 4 > 0$ $0 > 0$ $\rightarrow$ $\varnothing$

если $2x+y-4 > 0$, то $2x+y-4+2x+y-4 > 0$ $2x+y-4 > 0$ $y > 4-2x$

1.2) $y < 0$ $2x - y - 4 + |2x+y-4| > 0$, если $2x+y-4 < 0$, то

$2x - y - 4 - 2x - y + 4 > 0$ $-2y > 0$ $y < 0$ - у-ие $\begin{cases} y < 2x-4 \\ y < 0 \end{cases}$ из. системы

если $2x+y-4 > 0$, то $2x - y - 4 + 2x + y - 4 > 0$ $4x - 8 > 0$ $x > 2$, то

если $x > 2$, то $2x > 4$, $2x + 4 > 0$, $y < -(2x+4)$

$y < -4$

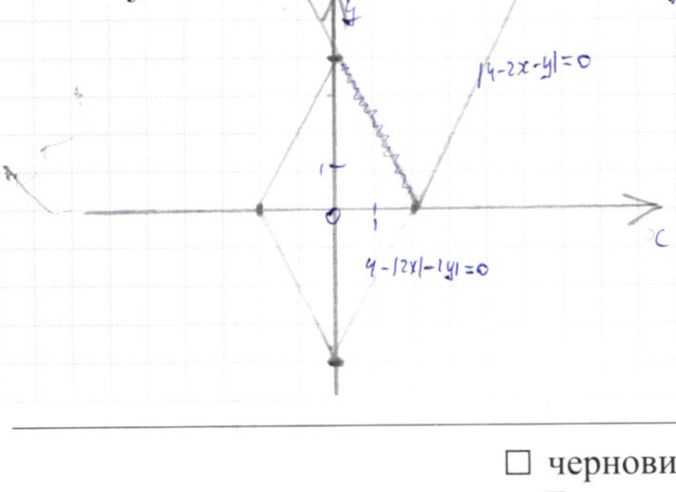
2) $x < 0$

~~2.1) $y > 0$~~ $-2x + y - 4 + |2x+y-4| > 0$, $2x+y-4 < 0$, то $-2x + y - 4 - 2x - y - 4$

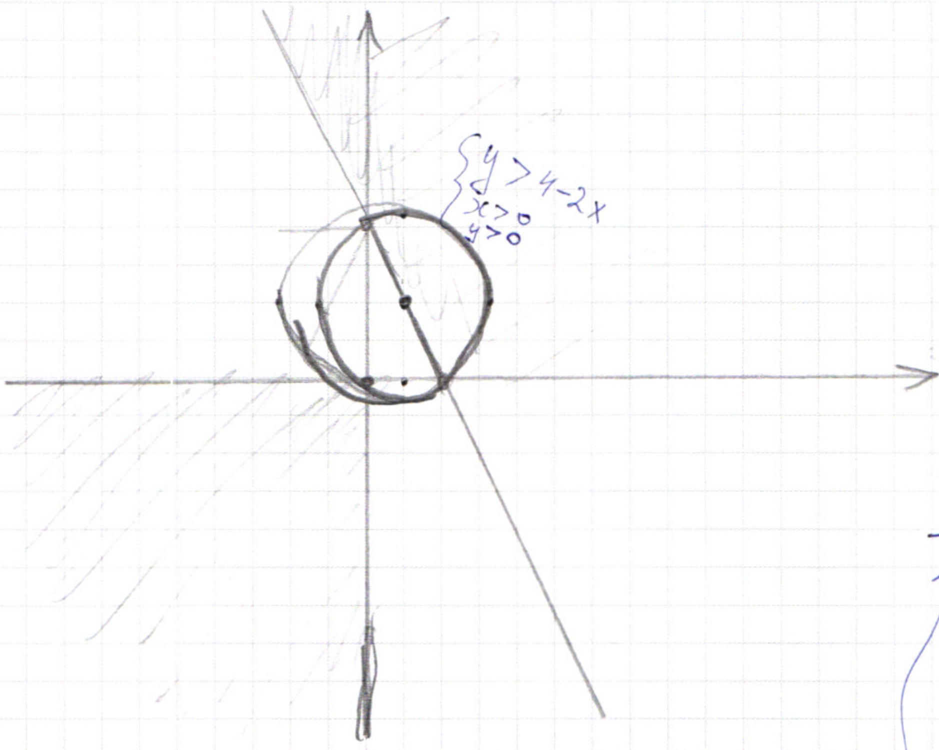
2) видоизменив (1) получим $|2x| + |y| + |4-2x-y| > 4$

$|4-2x-y| > 4 - |2x| - |y|$, пользуясь тем, что $|a-b| \ge |a| - |b|$,

получим экв. неравенство $|4-2x-y| \ne 4 - |2x| - |y|$



~ - пересечение



I) $x > 0$

$y > 0$

$2x + y + |4 - 2x - y| > 4$

1) $y \leq 2x - 4 \Rightarrow$

$2x + y + 4 - 2x - y > 4$

$4 > 4$ – ложь

2) $y \geq 2x - 4 \Rightarrow$

$2x + y - 4 + 2x + y > 4$

$2x + y - 4 > 0$ $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

II) $x < 0$

$y \geq 0$

~~$2x$ $-2x + y + |4 - 2x - y| > 4$~~

~~1) y~~ $-2x + y + |y - (-2x + 4)| > 4$

1) $y \geq -2x + 4$ (т.к. $-2x+4 > 4$ при $\forall x < 0$ то)

$-2x + y + y + 2x - 4 > 4$

$2y > 8$ ($y \geq -2x+4$)

$y > 4$

2) $y < -2x + 4$

$-2x + y - y - 2x + 4 > 4$

$-4x > 0$

$x > 0$ $\varnothing$

1) $-2x + y + |y - (-2x + 4)| > 4$

1) $y \geq -2x + 4$

$-2x + y + y + 2x - 4 > 4$

$2y > 8$ $y > 4$ т.к. $-2x + 4 > 4$ при $\forall x < 0$, то решение $y \geq -2x + 4$

2) $y < -2x + 4$

$-2x + y - y - 2x + 4 > 4$ $-4x > 0$ $x > 0$ но $x < 0$, $\varnothing$

III) $x < 0$ $-2x - y + |4 - 2x - y| > 4$

$y < 0$

1) $y \geq 4 - 2x > -y$ $y < 2x - 4$

$-2x - y + 4 - 2x - y > 4$

$4x + 2y > 0$

$y > 2x$

$\begin{cases} y < 2x - 4 \\ y > 2x \end{cases}$

$2x < y < 2x - 4$

$0 < y - 2x < -4$

$0 < -4$ – ложь $\varnothing$

$\varnothing$

2) $y \geq 2x - 4$ ~~но~~ но все ~~$\forall$~~ y лежат во II четверти

IV) $x \geq 0$

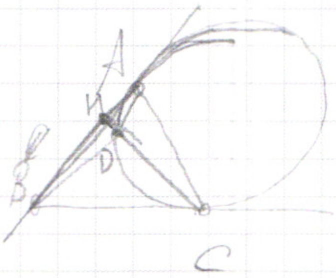
$y < 0$

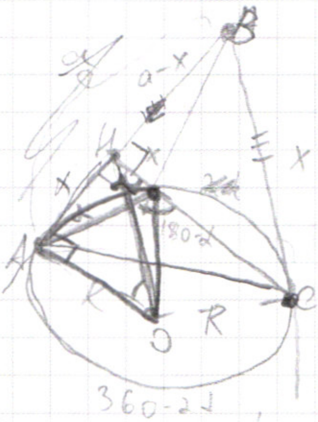
a III $x < 0$ ~~$4 + 2x + y$~~

$y < 0$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)





$S_{ABD} = 6$ $AB : CH$

$R = 4$ $x(a-x) = 6$

$x^2 = HD \cdot CH$

$x^2 = \frac{S}{\cancel{x(a-x)}\,a} \cdot CH$

$ax^2 = 6 \cdot CH$

$CH = \frac{ax^2}{6}$

$\frac{AB}{CH} = \frac{a}{ax^2} \cdot 6 = \frac{1}{x^2}$

$\frac{(ax^2)^2}{36} + (a-x)^2 = x^2$ $\frac{1}{2} \smile AC$

$\frac{a^2x^4}{36} + a^2 + x^2 - 2ax = x^2$

$180 - \alpha = 90 + \alpha$

$2\alpha = 90$ $a \cdot x = 6$

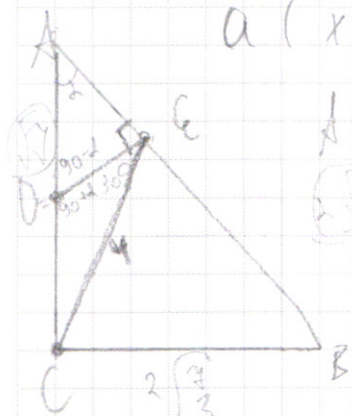
$\sin(90+\alpha) = \sin(180-90-\alpha) = \sin(90-\alpha) = \cos\alpha$

$a^2x^4 + 36a^2 = 72ax$

$ax^4 + 36a = 72x$

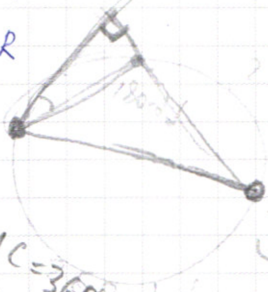
$a(x^4+36) = 72$ $\frac{AD}{AC} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $a = \frac{72x}{x^4+36}$ $f\left(\frac{a}{6}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{6}\right)$

$\frac{AD}{AC} = tg\,\alpha$



$AC = \sqrt{7}$

$\frac{AD}{\sin\alpha} = 2R$



$f\left(\frac{a}{6}\right) + f\left(\frac{6}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) + f(6) + f\left(\frac{1}{6}\right)$

$180 - 2\alpha$

$= f\left(\frac{a}{6}\right) + f\left(\frac{6}{a}\right) = 0$

$\smile ADC + \smile AC = 360$

$\smile ADC = 180 + 2\alpha$

$\smile AD = 2\alpha$

$\sin(90+\alpha) = \cos(-\alpha)$

$\frac{CH}{AC} = \cos\alpha$

$CH = 2R \cos^2\alpha$

$180 + 2\alpha$

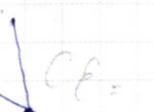
$\sin\angle CAB = 2\sqrt{7}$ $\frac{3 \cdot 7 + 4 \cdot 7}{3} = \frac{7 \cdot 7}{3} = 7 \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

$\frac{AB \cdot DH}{2} = S$ $HD = AH \cdot tg\,\alpha$ $+2\alpha + \smile = 360$ $\cos 2\alpha$

$HD \cdot HC = AH^2$ $AH = AC \cdot \sin\alpha$ $\smile DC = 180 - 4\alpha$

$\sin(90+\alpha) = \sin(180-90-\alpha) = \sin(90-\alpha) = \sin\alpha$

$\frac{AB}{HC} = \frac{2S}{AH^2}$ $\angle OAC = 90 - 2\alpha$



$HD : DA = AD : CD = AH : CH$ $AH^2 = 4R \cdot \sin^4\alpha$ $AH : HC = tg\,\alpha$

$AC = 2R \cdot \cos\alpha$ $BH : HC = tg\,2\alpha$

$\frac{AH}{HD} = \frac{R}{AC/2} =$ $AH = AC \cdot \sin\alpha = 2R\sin\alpha \cdot \cos\alpha = R \cdot \sin 2\alpha$

$\frac{AH}{AD} = 2R \cdot \sin\alpha$ $\frac{AH}{2R\sin\alpha} = \sin\alpha$ $tg\,2\alpha + tg\,\alpha$

$= \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$AH = 2R \cdot \sin^2\alpha$ $2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$\sin\alpha\cos\alpha\,(2\cos 2\alpha + 1)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

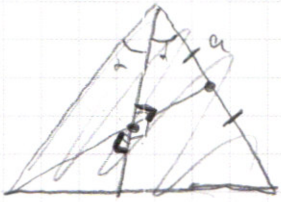
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

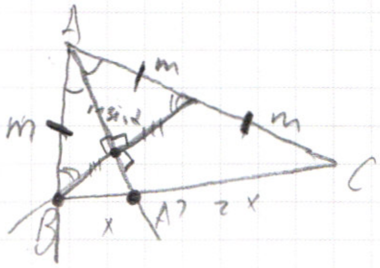
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$\frac{BA'}{A'C} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$

$P = 3m + 3x = 600$

$\underline{m + x = 200}$

$m + x = 200 \qquad x = 200 - m$

$\begin{cases} x < m \\ 2m < m + 3x \\ m < 3x \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x < m \\ m < 3x \end{cases}$ $\qquad \begin{matrix} 200 - m < m \\ m < 600 - 3m \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 200 < 2m \\ 4m < 600 \end{matrix}$

$\begin{cases} 100 < m \\ m < 150 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases} \qquad x = 5 - y^2$

$4y^2 + x^2 - 2xy = xy \qquad 4y^2 + x^2 - 5xy = 0$

$\frac{4y^2}{x^2} - \frac{5y}{x} + 1 = 0$

$t = \frac{y}{x} \qquad 4t^2 - 5t + 1 = 0$

$D = 25 - 16 = 9$

$t = \frac{5 \pm 3}{2 \cdot 4} \quad \frac{1}{4}, \; 1$

$5 - y^2 - 2y = \sqrt{(5 - y^2)y}$

$(y^2 + 2y - 5)(y^2 + 2y - 5) = y(5 - y^2)$

$y^4 + 2y^3 - 5y^2 + 2y^3 + 4y^2 - 10y - 5y^2 - 10y + 25 = 5y - y^3$

$y^4 + 5y^3 - 6y^2 - 25y + 25 = 0 \qquad y = 1$ реш-е.

$y^4 + 5y^3 - 6y^2 - 25y + 25 \;|\; (y - 1)$

$y^4 - y^3 \qquad\qquad y^3 + 6y^2 - 25$

$6y^3 - 6y^2$

$0 - 25y$

$-25y + 25$

~~$(y^3 + 6y - 25)(y - 1) = 0$~~

~~$y^3 + 6y - 25 > 0$~~

~~$y(y^2 + 6) > 25$~~

$\frac{-1 - \sqrt{21}}{2} + \frac{1 - (-1 - \sqrt{21})^2}{4} = 0$

$\frac{-2 - 2\sqrt{21} + 1 + 22 + 2\sqrt{21}}{4} =$

$f(1) = 0 \quad f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

$= \frac{48}{4} \quad \frac{20}{4} = 5$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(1)=0$ $f(0)=2f(0)$ $f(0)=0$ $\cancel{f(0\cdot a)=f(0)+f(a)\quad f(a)=0}$

$f(a)+f(\frac{1}{a})=0$ $f(a\cdot a)=f(a)+f(a)$ $f(a^2)=2f(a)$ $f(a^2)=2f(a)$

$f(p\cdot a)=p+f(a)$

$\cancel{f(a\cdot 1)=f(1)+f(a)\quad f(a)=f(\frac{a^2}{a})=f(a^2)+f(\frac{1}{a})=}$ $f(a^2)=2f(a)$

$f(p^2)=2p$ $\cancel{f(p+1)(p+1)=2f(p+1)}$ $f(a)=0$

$f(a\cdot(a+1))=f(a)+f(a+1)$ $f(a^2+a)=f(a)+f(a+1)$

$\cancel{f(4)=2f(2)}$ $f(36)=2f(6)$ $f(2\cdot 2)=2\cdot f(2)$

$f(4)=2f(2)$

$\cancel{f(6)=f(6)+f(1)}$ $f(36)=f(18)+f(2)$ $f(9)=2f(3)$

$f(12)=f(6)+f(2)$ $2f(6)=f(2)+f(18)$ $f(a^3)=f(a)+f(a^2)$

$f(12)=f(3)+f(4)$ $f(6)+f(2)=f(3)+f(4)$ $f(a^3)=3f(a)$

$2f(6)=2f(3)+2f(4)-2f(2)$

$\cancel{f(9)+f(16)-f(4)}$

$f(a)+f(\frac{1}{a})=0$ $f(9)+4f(2)-2f(2)=f(2)+f(18)$

$f(2a^2)=f(a)+f(2a)=f(a^2)+f(2)$ $f(2)+f(9)=f(18)$ $=2f(a)+f(2)$

$f(6a)=f(2a)+f(3a)=f(a)+f(2)+f(a)+f(3)$

$2f(a)+f(2)+f(3)$

$f(4)=2f(2)\rightarrow f(4)=2\cdot 2=4$ $f(9)=2\cdot f(3)=6$ $f(9)+f(\frac{1}{9})=0$

$f(\frac{1}{x})=-f(x)$ $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$ $f(\frac{1}{9})=-f(9)=-6$

$f(x)>f(y)$ $f(1)=0$ $f(2)=2$ $f(3)=3$ $f(4)=4$ $f(5)=5$

$f(6)=f(2)+f(3)=5$ $f(7)=$ $f(8)=3f(2)=6$ $f(9)=2f(3)=6$

$f(18)=f(6)+f(3)=f(3)+f(2)+f(3)$ $f(10)=f(5)+f(2)=5+2=7$ $f(11)=11$ $f(12)=\cancel{12}$ $=f(3)+f(4)=3+4=7$ $f(13)=13$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$|2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4$

$x^2 - 2x - 4y + y^2 \le 0$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 - 5 \le 0$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 \le 5$ — окр-ть $\quad 2x + y - 4 \ge 0$ $\quad 2x+y=$

$(|2x| + |y| - 4) + |2x + y - 4| > 0$

1) $x > 0 \quad y \ge 0 \quad (2x+y-4) + |2x+y-4| > 0 \quad 2x+y+4<0 \Rightarrow 0 \ \varnothing$

$2x+y+4>0 \quad 4x+2y-8>0$

$2x+y-4>0$

2) ~~x>0 y>0~~ 2) $x<0 \quad y<0 \quad (-2x-y-4+|2x+y-4| - 8 > 0 \ \varnothing$

$(-2x-y-4 \mp 2x - y - 4 \quad -4x-y-8<0 \ \varnothing$

3) $x>0 \quad y<0 \quad 2x-y-4+|2x+y-4|>0 \quad 4x-8>0 \quad x>2 \quad y\ldots$

$2x-y-4 \ -2x-y+4 \quad -2y>0 \quad y<0 \quad 2\cdot2>0+y-4>0$

$y>0 \ \varnothing$

4) $x<0 \quad y>0$

$|9-16| > |9| - |16|$

~~$|16-9|=$~~

$|a-b| \ge |a| - |b|$

$|4-2x-y| > 4 - 2|x| - |y|$

$y = 4 - 2x$

1) $y>0$

$4 - 2|x| = y$

2) $y<0$

$y = 2|x| - 4$

$|2x| + |y| + |2x| + |y| + |-4| > 4$

$|3| + |5| \quad |8|$

$|-9| + |16| > |-7|$

$|2x| + |y| - 4 + |2x| + |y| + |-4|$

~~$|2x+y-y|>$~~

$|4-2x-y| > |4| - |2x| - |y|$

$y + 2x - 4$

$y > -2x+4$

$y - (-2x+4)$

$-2x+4>0$