МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE\perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2\leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 18$, $1\leqslant y\leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

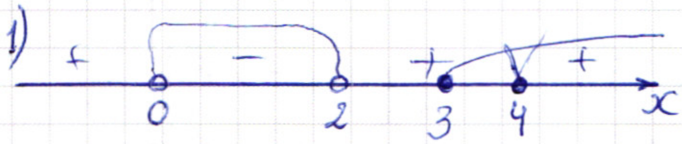
№1

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2-6x+10-2(x-3)}{2x^2-4x+x(x-2)}\le 0, \quad x\ge 3 \\ \dfrac{x^2-6x+10+2(x-3)}{2x^2-4x+x(x-2)}\le 0, \quad 2\le x\le 3 \\ \dfrac{x^2-6x+10+2(x-3)}{2x^2-4x-x(x-2)}\le 0, \quad 0\le x\le 2 \\ \dfrac{x^2-6x+10+2(x-3)}{2x^2-4x+x(x-2)}\le 0, \quad x\le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{(x-3)^2-2(x-3)+1}{2x(x-2)+x(x-2)}\le 0 \\ x\ge 3 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{(x-2)^2}{2x(x-2)+x(x-2)}\le 0 \\ 2\le x\le 3 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{(x-2)^2}{2x(x-2)-x(x-2)}\le 0 \\ 0\le x\le 2 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{(x-2)^2}{3x(x-2)}\le 0 \\ x\le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{(x-4)^2}{x(x-2)}\le 0, \quad x\ge 3 \\ \dfrac{(x-2)^2}{x(x-2)}\le 0, \quad 2\le x\le 3 \\ \dfrac{(x-2)^2}{x(x-2)}\le 0, \quad 0\le x\le 2 \\ \dfrac{(x-2)^2}{x(x-2)}\le 0, \quad x\le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{(x-4)^2}{x(x-2)}\le 0, \quad x\ge 3 \\ \dfrac{(x-2)^2}{x(x-2)}\le 0, \quad x\le 3 \end{array}\right.$$

1)

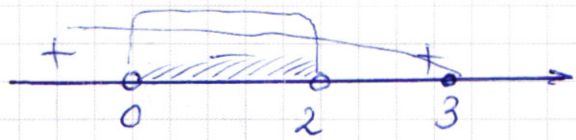


$x=4$

Всего

$x\in(0;2)\cup\{4\}$.

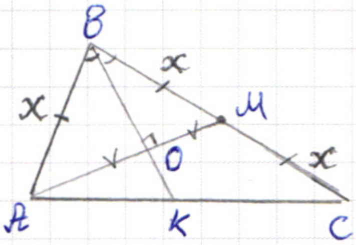
2)



$x\in(0;2)$

Ответ: $(0;2)\cup\{4\}$.

№2



АМ - медиана, ВК - бис-са $AM\perp BK$

Тогда $\triangle ABM$ - р/б по призн.

Пусть $AB = BM = MC = x$

№2 (продолжение)

+ бис-са и медиана из одного угла не могут быть $\perp$

По нер-ву треугольника

$AB + BC = 3x > 300 = \frac{P_{ABC}}{2}$, т.е. $x > 100$, где $x \in \mathbb{Z}$

$BC = 2x < 300 = \frac{P_{ABC}}{2}$, т.е. $x < 150$, где $x \in \mathbb{Z}$

Итог. $100 < x < 150$, $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \{101; 102; 103; \dots; 149\}$ – – 49 значений

$\boxed{49\ \Delta\Delta} \Leftarrow 49\ x$ (значений x)

Ответ: 49 треугольников.

№3

$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases}$

1) Если $x = 0$, то $-2y = 0 \Rightarrow y = 0$ $\quad 0 + 0 = 5$ – неверно

Значит, пара $(x;y) = (0;0)$ не подходит

и $x \neq 0$, и $y \neq 0$

$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - 2\sqrt{\frac{y}{x}} = 1 \\ x + y^2 = 5 \end{cases}$

Пусть $\sqrt{\frac{x}{y}} = t$, $t > 0$

$t - \frac{2}{t} = 1$; $\begin{cases} t^2 - t - 2 = 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -1 \end{array}\right. \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2$

$\sqrt{\frac{x}{y}} = 2$; $\frac{x}{y} = 4 \Rightarrow x = 4y$

$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x = 4y \\ x + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \cancel{\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ 17y^2 = 5 \end{cases}} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x = 4y \\ y^2 + 4y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ \left[\begin{array}{l} y = -5 \\ y = 1 \end{array}\right. \\ x - 2y = \sqrt{xy} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -20 \\ y = -5 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right.$

пара $(x;y) = (-20;-5)$

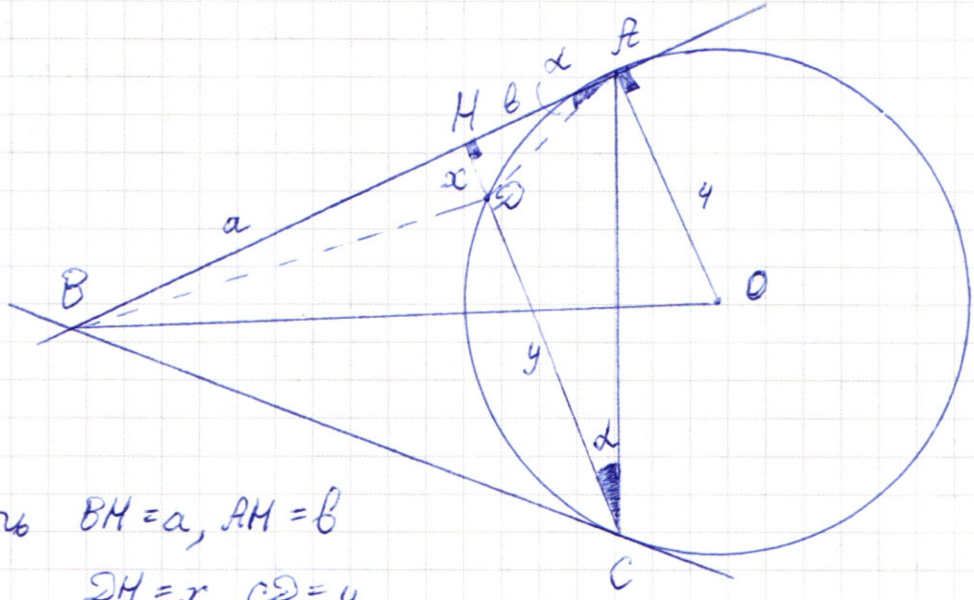
$(x;y) = (4;1)$

Ответ: $\boxed{(-20;-5), (4;1)}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$\frac{AB}{CH}$ - ?



1) Пусть $BH = a$, $AH = b$

$ДH = x$, $CД = y$

$S_{ABД} = \frac{x(a+b)}{2} = 6$ $\quad x(a+b) = 12 \Rightarrow a+b = \frac{12}{x}$

2) $\alpha = \angle BAД = \angle ACH$ (по св-ву угла между хордой и касат.)

Тогда $\triangle AHД \sim \triangle CHA$

$\frac{ДH}{AH} = \frac{AH}{CH}$; $\quad \frac{x}{b} = \frac{b}{x+y}$ $\quad x+y = \frac{b^2}{x}$

2) Из $\triangle AHC$ $\angle HAC = 90° - \alpha$

$\triangle ABC$ - р/б (по св-ву касат. из одной точки $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABO = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$

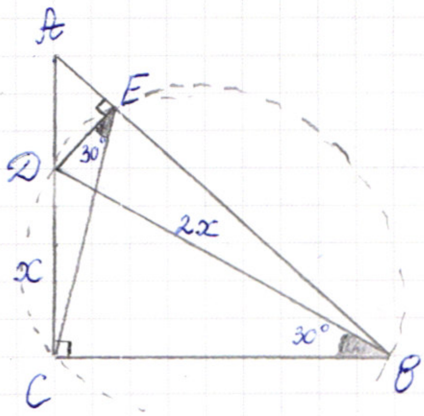
Тогда $\triangle ABO \sim \triangle HCA \sim \triangle ДAH$ $\Rightarrow \frac{AB}{AO} = \frac{AH}{ДH}$; $\quad \frac{a+b}{4} = \frac{b}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow a+b = \frac{4b}{x}$

3) $a+b = \frac{12}{x} = \frac{4b}{x} \Rightarrow b = 3$

Из п. 1 и 2 $\quad \frac{AB}{CH} = \frac{a+b}{x+y} = \frac{12 \cdot x}{x \cdot b^2} = \boxed{\frac{12}{9}}$

Ответ: 12 : 9.



№5

1) $DE \perp AB$ (по усл.) $\angle DEB = 90°$

$\angle DCB = 90°$

$BCDE$ — впис. ч/у (по призн.)

$(\angle DCB + \angle DEB = 180°)$

2) Тогда $\angle CED = \angle CBD = 30°$ (опираются на $\cup CD$)

$\angle CDB$ — п/у, $\angle CBD = 30° \Rightarrow CD = \frac{1}{2} BD$

Пусть $CD = x$, $BD = 2x$

3) По т. Пифагора $BC = \sqrt{3}x = \sqrt{\frac{28}{3}} \Rightarrow CD = x = \sqrt{\frac{28}{9}}$

$AD = AC - CD = \sqrt{7} - \frac{2}{3}\sqrt{7} = \frac{1}{3}\sqrt{7}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{3}$ $\boxed{AD : AC = 1 : 3}$

4) $\triangle AED \sim \triangle ACB$ ($\angle A$ — общий, $\angle AED = \angle ACB = 90°$)

$\cancel{\frac{AD}{AB}}$ $AB = \sqrt{7 + \frac{28}{3}} = \sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$

$k = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot 7} = \frac{1}{\sqrt{21}}$ — коэф. подобия

$S_{AED} = k^2 \cdot S_{ABC} = \frac{1}{21} \cdot \left(\frac{\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{\cancel{7}}{\cancel{21}_{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{27}} = \boxed{\frac{\sqrt{27}}{27}}$

Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$, $S_{AED} = \frac{\sqrt{27}}{27}$

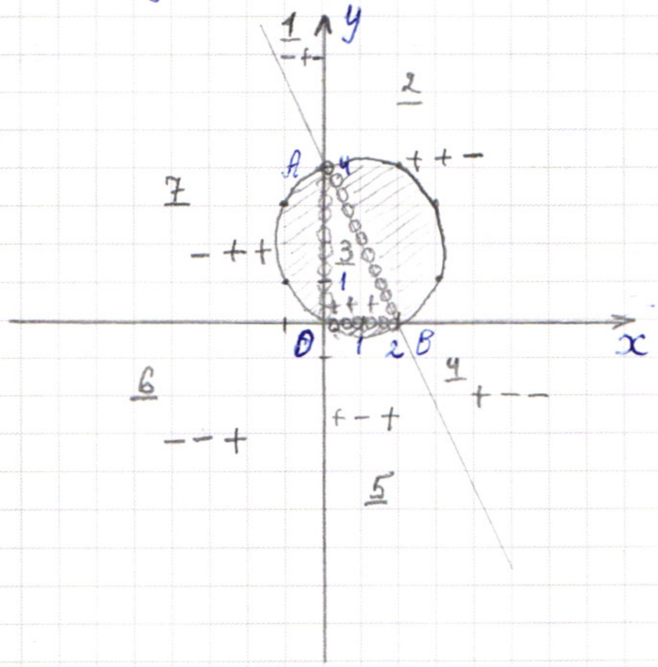
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4 \\ x^2-2x-4y+y^2\le 0 \end{cases}$$



I. $2|x|+|y|+|4-2x-y|>4$

Отметим нули функций

$x=0,\ y=0,\ y=-2x+4$

Линии делят плоскость на 7 частей. ~~...~~

Раскроем модуль для каждой из них

Решим для ур-я.

1) $-\cancel{2x}+y-4+\cancel{2x}+y-4=0$

$y=4$

2) $2x+y-4+2x+y-4=0$

$2x+y=4;\ y=-2x+4$

3) $\cancel{2x}+\cancel{y}+\cancel{4}-\cancel{2x}-\cancel{y}-\cancel{4}=0$

4) $2x-\cancel{y}-4+2x+\cancel{y}-4;\ x=2$

5) $\cancel{2x}-y+\cancel{4}-\cancel{2x}-y-\cancel{4}=0;\ \ y=0$

6) $-2x-y+\cancel{4}-2x-y-\cancel{4}=0;\ \ y=-2x$

7) $-2x+\cancel{y}+\cancel{4}-2x-\cancel{y}-\cancel{4}=0;\ \ x=0$

Получили $\triangle AOB$ т. $(1;2)$ - не подходит $\Rightarrow$ подходит область вне $\triangle AOB$

$2+1+1>4$

II. $x^2-2x-4y+y^2\le 0$

$(x-1)^2+(y-2)^2\le 5$ - окружность ω с центром в т. $(1;2)$ и радиусом $\sqrt{5}$. т. $(1;2)$ - подходит $\Rightarrow$ подходит область внутри ω (центр ω - сер. $AB \Rightarrow \{A,B,O\}\subset\omega$)

№6 (продолжение)

Площадь нашей фигуры $S_{круга} - S_{\Delta} = \pi R^2 - \frac{AC \cdot BO}{2} =$

$= 5\pi - 4 \approx 15{,}7 - 4 = 11{,}7$

Ответ: $\boxed{5\pi - 4 \approx 11{,}7.}$

№7

Все пары простых чисел.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 – 7 простых

Тогда пар, несовпадающих и с различными числами

$\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ Ответ: 21.

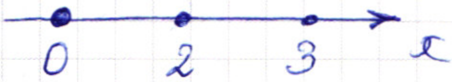
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\frac{x^2-6x+9-2|x-3|+1}{2x(x-2)-|x|\cdot|x-2|}\leq 0$$



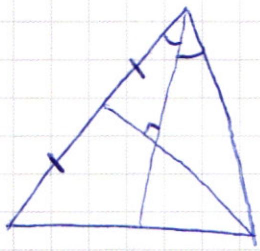
$$\frac{(|x-3|-1)^2}{|x-2|\cdot(2x-|x|)}\leq 0$$

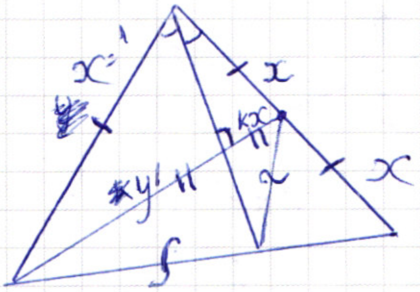
$$\frac{x^2-6x+10-2(x-3)}{2x^2-4x+x\cdot(x-2)}\leq 0 \quad x\geq 3$$

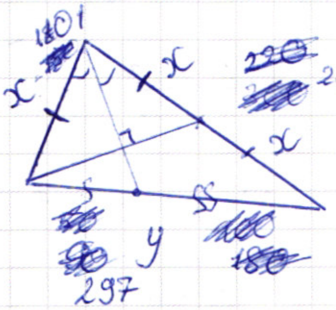
$$\frac{x^2-6x+10+2(x-3)}{2x^2-4x+x(x-2)}\leq 0 \quad 2\leq x\leq 3$$

$$\frac{x^2-6x+10+2(x-3)}{2x^2-4x-x(x-2)}\leq 0 \quad 0\leq x\leq 2$$

$$\frac{x^2-6x+10+2(x-3)}{2x^2-4x+x(x-2)}\leq 0 \quad x\leq 0$$







~~220~~ 202

$3x > 300$ $\quad 2x < 300$

$x > 100$ $\quad x < 150$

~~$450 = 3x$~~

~~$y = 150$~~

330

$5-y^2-2y=\sqrt{5y-y^3}$

~~$x=\sqrt{xy}+2y$~~

$x = 5-y^2$

$5-y^2-2y=\sqrt{5y-y^3}$

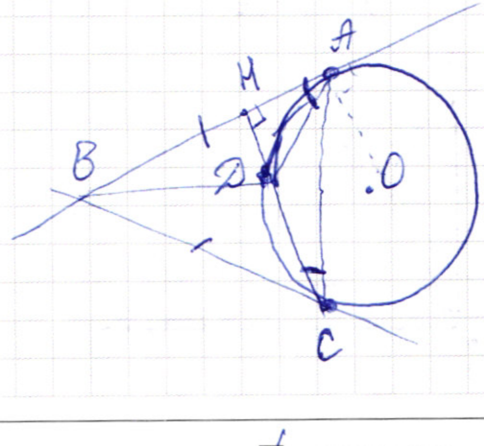
$$\sqrt{\frac{x}{y}}-2\sqrt{\frac{y}{x}}=1$$

$$b-\frac{2}{b}=1$$

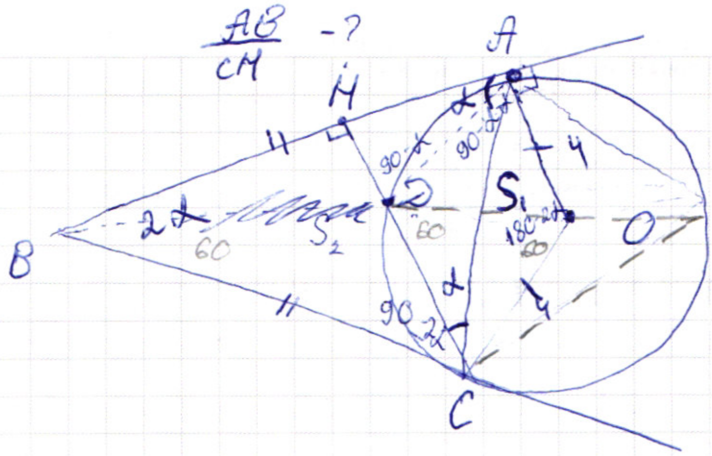
$b^2-b-2=0$

$(b-2)(b+1)=0$

$b=2$



$\frac{AB}{CM}$ — ?



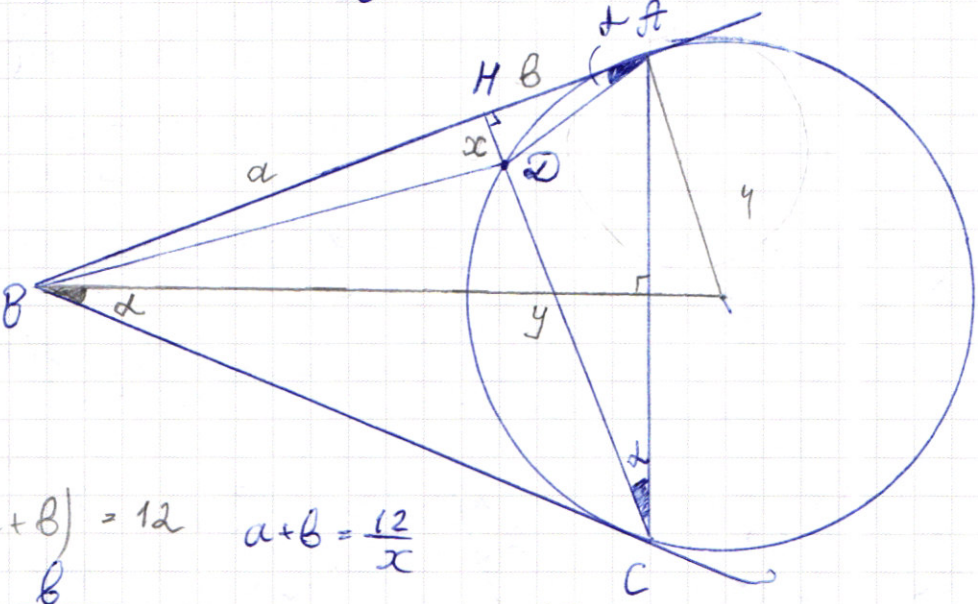
$$\begin{cases} S_1 = \frac{16\cdot\sin 2\alpha}{2} = 8\sin 2\alpha \\ S_2 = \frac{AB^2 \sin 2\alpha}{2} \\ \frac{AB^2\sin 2\alpha + 16\sin 2\alpha}{2} = 4AB \\ AB^2 \sin 2\alpha + 16\sin 2\alpha - 8AB = 0 \end{cases}$$

$90 - \cancel{2}\alpha = 180 - 4\alpha$

$3\alpha = 90$

$\alpha = 30$

$\frac{CM}{AH} = \frac{AM}{DM}$ $\quad CM \cdot DM = AH^2$



$x(a+b) = 12$ $\quad a+b = \frac{12}{x}$

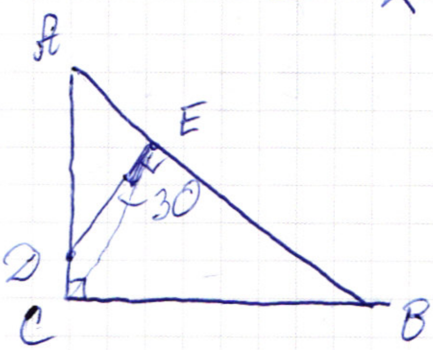
$\frac{x}{b} = \frac{b}{x+y}$ $\quad x+y = \frac{b^2}{x} = \frac{b^3}{3x}$ $\quad 3x\cancel{b^2} = xb^3$

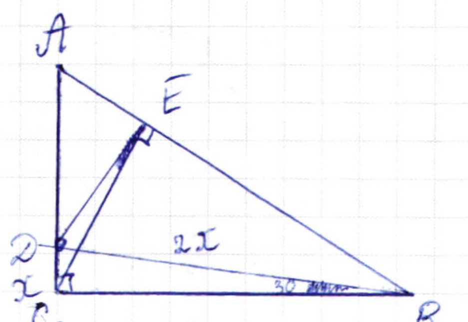
$b^2 = x^2 + xy$ $\quad b = 3$

$\frac{a+b}{4} = \frac{b}{x}$ $\quad \frac{a+b}{x+y} = \frac{12}{b^2}$ $\quad \boxed{\frac{12}{9}}$

$\frac{\frac{\cancel{4}b}{x}}{x+y} = \frac{3}{b^2}$

$a+b = \frac{4b}{x} = \frac{12}{x}$ $\quad x+y = \frac{b^3}{3x}$





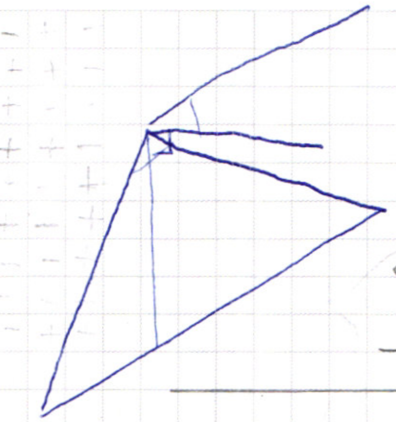
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

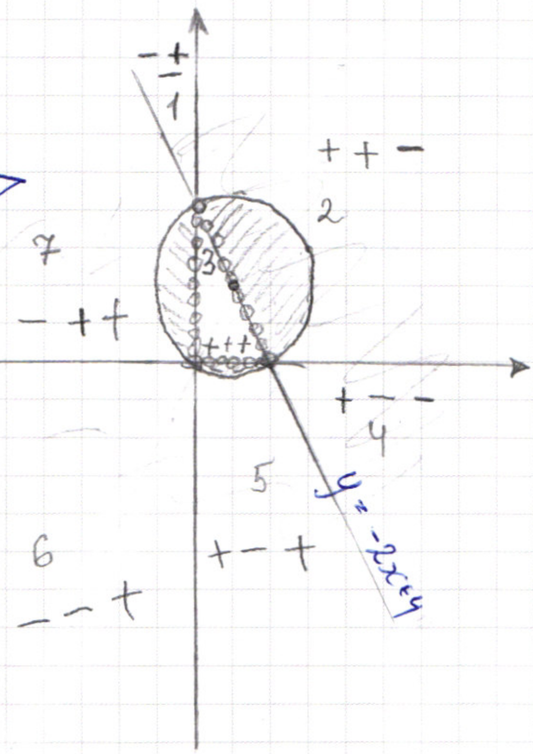
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$|2x| + |y| + |4-2x-y| > 4$

$x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad 4 \geq 2x+y$

$y \leq -2x+4$

$2x+y+4-2x-y$

$2x+y-4+2x+y=4$

$-2x+y+y+2x-4-4=0$

$2y > 8$

$y=4$

$2x+y+2x+y-8=0$

$2x+y-4=0$

$y=-2x+4$

1) $|2x| + |y| + |4-2x-y| - 4 = 0$

$\cancel{-2x} + y - \cancel{4} + \cancel{2x} + y - \cancel{4} = 0 \quad y = 4$

2) $2x+y-4+2x+y-4=0$

$2x+y=4$

3) $2x+\cancel{y}+\cancel{4}-\cancel{2x}-\cancel{y}-\cancel{4}=0$

4) $2x-\cancel{y}-4+2x+\cancel{y}-4=0 \quad x=2$

5) $\cancel{2x}-y+\cancel{4}-\cancel{2x}-y-\cancel{4}=0 \quad y=0$

6) $-2x-y+\cancel{4}-2x-y-\cancel{4}=0 \quad y=-2x$

$2x+y$

7) $-2x+\cancel{y}+\cancel{4}-2x-\cancel{y}-\cancel{4}=0 \quad x=0$

$2+1+1>4$

$1-2-4+4 \leq 0$

πR^2

$\pi \cdot 5 \quad 5\pi - 4$

$\frac{4 \cdot 2}{2} = 4$

$3,14 \cdot 5 = 15,70$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$f(2) = 2$

$f(3) = 3$

$f(4) = \cancel{2}\ 4$

$f(6) = 5$

~~f(a) = ~~ $f(5) = 5$

$f(7) = 7$

$f(8) = 6$

$f(9) = 6$

$f(10) = 7$

$f(11) = 11$

$f(6) = 5$

$f\left(\frac{1}{13}\right) = \frac{1}{13}$

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ~~19~~

~~7 пар~~ 7 шт.

$f(12) = 7$

$f(13) = 13$

$f(14) = 7$

$f(15) = 8$

$f(16) = 8$

$f(17) = 17$

$f(18) = 8$

$f\left(\frac{14}{13}\right) = 13 \cdot$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)