



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy}, \\ 2y + x^2 = 9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром  $O$  касается прямых  $AB$  и  $BC$  в точках  $A$  и  $C$  соответственно. Высота  $CH$  треугольника  $ABC$  пересекает эту окружность в точках  $C$  и  $D$ . Найдите отношение  $AB : CH$ , если площадь треугольника  $ABD$  равна 15, а радиус окружности равен 6.
5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на катете  $AC$  и гипотенузе  $AB$  отмечены точки  $D$  и  $E$  соответственно, такие что  $DE \perp AB$ . Найдите отношение  $AD : AC$  и площадь треугольника  $AED$ , если известно, что  $AC = \sqrt{29}$ ,  $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$ , а  $\angle CED = 45^\circ$ .
6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами  $(x; y)$ , удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6, \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = p$  для любого простого числа  $p$ . Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $3 \leq x \leq 19$ ,  $3 \leq y \leq 19$  и  $f(x/y) < 0$ .



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Пусть  $x \geq 3$ , тогда  $|x| = x$ ,  $|x-1| = x-1$ ,  $|x-3| = x-3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3|} = \frac{x^2 - 2x + 5 - 4(x-1)}{4x^2 - 12x + x(x-3)} =$$

$$= \frac{x^2 - 6x + 9}{5x^2 - 15x} = \frac{(x-3)^2}{5x(x-3)}, \text{ при } x=3 \text{ выражение}$$

не ~~определено~~ принимает значения, а при  $x \neq 3$ ,

$$\frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} = \frac{x-3}{5x}, \text{ т.к. } x \geq 3, \text{ то } x-3 \geq 0 \text{ и } 5x > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  выражение неотрицательно.

Пусть  $3 > x \geq 1$ , тогда  $|x| = x$ ,  $|x-1| = x-1$ ,  $|x-3| = 3-x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3|} = \frac{x^2 - 2x + 5 - 4(x-1)}{4x^2 - 12x + x(3-x)} = \frac{x^2 - 6x + 9}{3x^2 - 9x} =$$

$$= \frac{(x-3)^2}{3x(x-3)} = \frac{x-3}{3x}, \text{ т.к. } x-3 \neq 0, \text{ } x-3 < 0, \text{ } 3x > 0,$$

значит выражение неотрицательно при всех  
таких  $x$ .

Пусть  $1 > x \geq 0$ , тогда  $|x| = x$ ,  $|x-1| = 1-x$ ,

$$|x-3| = 3-x \Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3|} = \frac{x^2 - 2x + 5 - 4(1-x)}{4x^2 - 12x + x(3-x)} =$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 1}{3x^2 - 9x} = \frac{(x+1)^2}{3x(x-3)}, \text{ } (x+1)^2 \geq 0, \text{ } 3x \geq 0, \text{ } x-3 < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3x(x-3) \leq 0 \Rightarrow$  выражение неотрицательно

при всех таких  $x$ , и не имеет значения при  $x=0$ .

Пусть  $x < 0$ , тогда  $|x| = -x$ ,  $|x-1| = 1-x$ ,  $|x-3| = 3-x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3|} = \frac{x^2 - 2x + 5 - 4(1-x)}{4x^2 - 12x + (-x)(3-x)} =$$

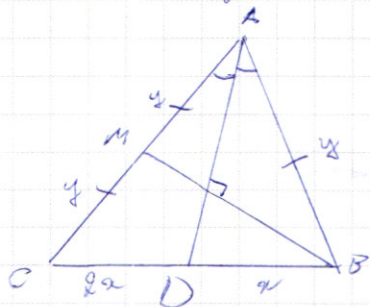
$$= \frac{x^2 + 2x + 1}{5x^2 - 15x} = \frac{(x+1)^2}{5x(x-3)}, \text{ } (x+1)^2 \geq 0, \text{ } 5x < 0, \text{ } x-3 < 0 \Rightarrow$$



$$\Rightarrow 5x(x-3) > 0 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{5x(x-3)} \geq 0, \text{ и равно } 0, \text{ только при } (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1.$$

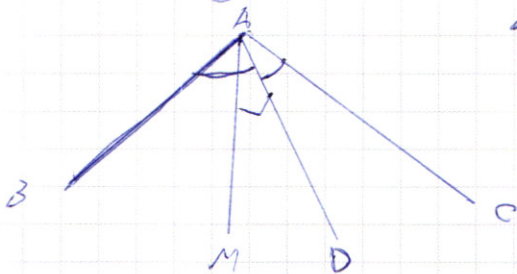
Ответ:  $3 > x > 0$  и  $x = -1$ .

2. Возьмём произвольный треугольник  $\triangle ABC$  удовлетворяющий условию. Пусть в нём  $AD \perp BM$ ,



$AD$  - биссектриса,  $BM$  - медиана.

(Перпендикулярные биссектриса и медиана не могут быть из одной вершины, т.к. тогда  $\angle MAD$  (между биссектрисой и медианой)  $= 90^\circ$ , и меньше  $\angle BAD$  (биссектрисы со стороны, в которой медиана образует меньший угол), тогда  $\angle BAC = 2\angle BAD > 2\angle MAD = 180^\circ$ , что невозможно).



Тогда т.к. в  $\triangle ABM$ ,  $AD$  является биссектрисой и высотой, то он равнобедренный  $\Rightarrow AM = AB$ .

По свойству биссектрисы  $\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{AM+CM}{AB} = \frac{2AB}{AB} = 2$ . Пусть тогда  $BD = x \Rightarrow CD = 2x$ ,  $AB = y \Rightarrow AM = CM = y$ .

По неравенству треугольника

$$BC + AB > AC \Rightarrow 3x + y > 2y \Rightarrow \cancel{3x + y} \quad 3x > y,$$

$$AC + AB > BC \Rightarrow 2y + y > 3x \Rightarrow y > x. \text{ Периметр равен } AB + AC + BC = 3x + 3y = 300 \Rightarrow x + y = 100.$$

$$3x > y \Rightarrow 4x > x + y = 100 \Rightarrow x > 25, \quad y > x \Rightarrow x + y > 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 > 2x \Rightarrow 50 > x. \text{ Ит.к. стороны имеют}$$

целые значения, то  $y$  - целое, а следовательно

$$100 - y = x - \text{целое.}$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

отличается  $x$  принимает значения от 26 до 49, всего 24 значения, осталось проверить, что треугольники не совпадут. Так  $x > 25$ , то  $y < 45$ ,  $3x \geq 26 \cdot 3 = 48 > 45 > y$ , значит  $BC > AB$ ,  $AC > AB$  ( $2y > x$ ), если треугольники совпадут, то совпадет наименьшая сторона  $AB$ , что невозможно только при равном  $y$ , а так как треугольник однозначно определяется по  $x$ , то и другая сторона определится по  $y = 100 - x$ .  
Всего 24 треугольника удовлетворяющих условиям.

$$3. \begin{cases} y = 2x = \sqrt{1-x} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

$$2y = 9 - x^2, \quad y = \frac{9 - x^2}{2}$$

$$\left(\frac{9 - x^2}{2}\right) - 2x = \sqrt{x(9 - x^2)}, \quad \text{возведем в квадрат}$$

$$\left(\frac{9 - x^2}{2}\right)^2 - 2(2x)\left(\frac{9 - x^2}{2}\right) + 4x^2 = 4x^2 \left(\frac{9 - x^2}{2}\right)$$

$$\frac{(9 - x^2)^2}{4} - 2x(9 - x^2) + 4x^2 = x(9 - x^2)$$

$$2x(9 - x^2) + 4x^2 = 4x^2 \left(\frac{9 - x^2}{2}\right)$$

$$2x(9 - x^2) + 4x^2 = 2x(9 - x^2)$$

$$2x(9 - x^2) + 4x^2 = 2x(9 - x^2)$$

$$\frac{(9 - x^2)(9 - x^2)}{4} - 2x(9 - x^2) - \frac{x}{2}(9 - x^2)^2 = -4x^2$$

$$(9 - x^2)\left(\frac{9 - x^2}{4} - 2x - \frac{x}{2}\right) = 4x^2$$

$$(x^2 - 9)(2 - x^2 - 8x - 2x) = 16x^2$$



$$(x^2 - 9)(2x^2 - 10x + 9) = 16x$$

$y - 2x = \sqrt{xy}$ , возведем в квадрат

$$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy$$

$$y^2 - 5xy + 4x^2 = 0$$

$$y = \frac{5x \pm \sqrt{25x^2 - 4 \cdot 4x^2}}{2} = \frac{5x \pm \sqrt{9x^2}}{2} = \frac{5x \pm 3x}{2}$$

$$y_1 = 4x, \quad y_2 = x$$

$$2y + x^2 = 9$$

$$2y_1 + x^2 = 9 \Rightarrow 8x + x^2 = 9$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot (-9)}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-8 \pm 10}{2}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -9$$

$$2y_2 + x^2 = 9 \Rightarrow 2x + x^2 = 9$$

$$x^2 + 2x - 9 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-9)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{10}}{2} = -1 \pm \sqrt{10}$$

$$x_3 = -1 + \sqrt{10}, \quad x_4 = -1 - \sqrt{10}$$

Проверим полученные.  $x_1 = 1, y_1 = 4x = 4$

$$4 - 2 = \sqrt{1 \cdot 4}, \quad \sqrt{4} = \pm 2, \quad 2 = 2$$

$$8 + 1 = 9, \quad 9 = 9$$

$$x_2 = -9, \quad y_1 = 4x = -36$$

$$-36 + 18 = \sqrt{(-9)(-36)}, \quad \sqrt{9 \cdot 36} = \pm 18, \quad -18 = -18$$

$$-4 \cdot 9 + 81 = 9, \quad 9 = 9$$

$$x_3 = -1 + \sqrt{10}, \quad y_2 = x = -1 + \sqrt{10}$$

$$-1 + \sqrt{10} - 2(-1 + \sqrt{10}) = \sqrt{(-1 + \sqrt{10})(-1 + \sqrt{10})}$$

$$\sqrt{(-1 + \sqrt{10})^2} = \pm(-1 + \sqrt{10})$$

$$1 - \sqrt{10} = 1 - \sqrt{10}$$

$$2(-1 + \sqrt{10}) + (-1 + \sqrt{10})^2 = 9$$

$$-2 + 2\sqrt{10} + 1 - 2\sqrt{10} + 10 = 9, \quad 9 = 9$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x_1 = -1 - \sqrt{10}, \quad y_2 = x = -1 - \sqrt{10}$$

$$-1 - \sqrt{10} - 2(-1 - \sqrt{10}) = \sqrt{(-1 - \sqrt{10})(-1 - \sqrt{10})}$$

$$\sqrt{(-1 - \sqrt{10})^2} = \pm(-1 - \sqrt{10})$$

$$1 + \sqrt{10} = 1 + \sqrt{10}$$

$$2(-1 - \sqrt{10}) + (-1 - \sqrt{10})^2 = 0$$

$$-2 - 2\sqrt{10} + 1 + 2\sqrt{10} + 10 = 0, \quad 0 = 0.$$

Ответ:  $x = 1, y = 4; x = -9, y = -36; x = y = -1 + \sqrt{10}; x = y = -1 - \sqrt{10}.$

4. Пусть число  $x$  представимо в виде  $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ , где  $p_i$  — различные простые числа,  $\alpha_i$  — степень вхождения  $p_i$  в  $x$ . Тогда  $f(x) = f(p_1 \cdot \frac{x}{p_1}) = f(p_1) + f(\frac{x}{p_1}) = p_1 + f(\frac{x}{p_1})$ . Выделяя так простые числа из  $x$ , получим, что  $f(x)$  равно сумме всех его простых делителей, умноженных на степень вхождения.

$$f\left(\frac{xy}{x}\right) = f(xy) + f\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = f(y) - f(xy) = f(y) - (f(x) + f(y)) = -f(x), \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$$

Нам нужно найти все пары  $(x, y)$ , так что  $f(x/y) < 0 \Rightarrow f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$

Найдём значения  $f$  для чисел от 3 до 19.

$$f(3) = 3, \quad f(5) = 5, \quad f(4) = 4, \quad f(11) = 11, \quad f(13) = 13, \quad f(17) = 17,$$



$$f(12) = 12, f(4) = 2+2=4, f(6) = 2+3=5, f(8) = 2+2+2=6, \\ f(9) = 3+3=6, f(10) = 2+5=7, f(12) = 2+2+3=7, f(14) = 2+4=6, \\ = 9, f(15) = 3+5=8, f(16) = 2+2+2+2=8, f(18) = 2+3+3=8.$$

Получились числа: 3, 5, 7, 11, 13, 14, 12, 4, 6, 6, 6, 7, 7, 9, 8, 8, 8. Упорядочим: 3, 4, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 11, 13, 14, 12.

Чтобы получить нужное кол-во пар, нужно для каждого числа посчитать кол-во чисел до него с большим значением  $f$ , так для каждого  $x$  получим все  $y$ .

~~12-0, 14-1, 13-2, 11-3, 9-4, 8-5 \times 3, 7-8 \times 3,~~  
~~6-11 \times 3, 5-14, 4-15, 3-14.~~

Всего пар получится  $1+2+3+4+5+3+8+3+11+3+6+14+15+14=122$ .

~~122~~



**ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**

$x^2$   $9$   $(9-x)^2(x+9)^2$   $y-2x = \sqrt{xy}$   
 $2xy + x^2 = 9$

$(9-x)(9+x)$   $x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|$   $x - 3 \neq 0$

$81 - 90x + 616x^2 - 12x + |x|/|x-3|$   $(9-x)(9+x) = 24$

$x^2 - 2x + 5 - 4|x-1| = 0$

$4x(x-3) \frac{24}{x}$   $x - 1 < 0$

$81 - 90x + 616x^2 - 12x + |x|/|x-3|$   $x^2 - 2x + 5 - 4|x-1| = 0$

$90 + 2x + 17$   $8x^2(x=2)$

$180$   $-10x = 9$   $4 \cdot 9 = 12 \cdot 3$   $x^2 - 6x + 9$

$3x = 9$   $3 = 0$   $(x-3)^2$

$x = 3$   $(x+1)^2$

$50 > x$   $3x > 3x$   $f(x) = f(y)$

$50 + y > 100$   $3x = 3y$   $f(\frac{x}{2}) = f(\frac{y}{2})$

$y > 50$   $x + y = 100$   $f(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2})$

$100 > 25 + y$   $y > x$   $f(2) = f(2)$

$y < 75$   $3x = 3x$   $f(4) = f(4)$

$42 = 3x$   $3x > 4x$   $f(8) = f(8)$

$16 + 26 \cdot 8 - 8 - 180 + 8M \cdot 2 > 100$   $f(16) = f(16)$

$81 \cdot 2 = 26 \cdot 24 - 18 - 240$

$f(3) = 3$	$f(4) = 4$	$f(11) = 11$	$f(16) = 8$
$f(9) = 4$	$f(8) = 6$	$f(12) = 13$	$f(14) = 16$
$f(5) = 5$	$f(9) = 6$	$f(13) = 13$	$f(18) = 8$
$f(6) = 5$	$f(10) = 4$	$f(14) = 9$	$f(19) = 9$
		$f(15) = 8$	

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)



$$\left(\frac{900}{2}\right) = (900) + \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$y = \frac{9 - x^2}{4} - 2x - \frac{x}{2} = -\frac{9}{4}x^2 - \frac{5}{2}x$$

$$\sin \alpha = \frac{BD}{DH}$$

$$(4) - (900) = 2^{40} \cdot 10^2 - 9$$

$$y = -10 \pm \sqrt{100 + 36}$$

$$25 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 4 = 5$$

$$196$$

$$k \cdot H = 2y$$

$$36 \left(\frac{9^{25}}{DH^2}\right)$$

$$\frac{90}{DH} = \frac{90}{DH}$$

$$(4) - (2) = (4) = 2$$

$$-5 \pm \sqrt{34}$$

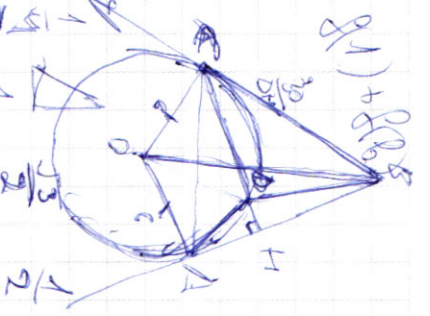
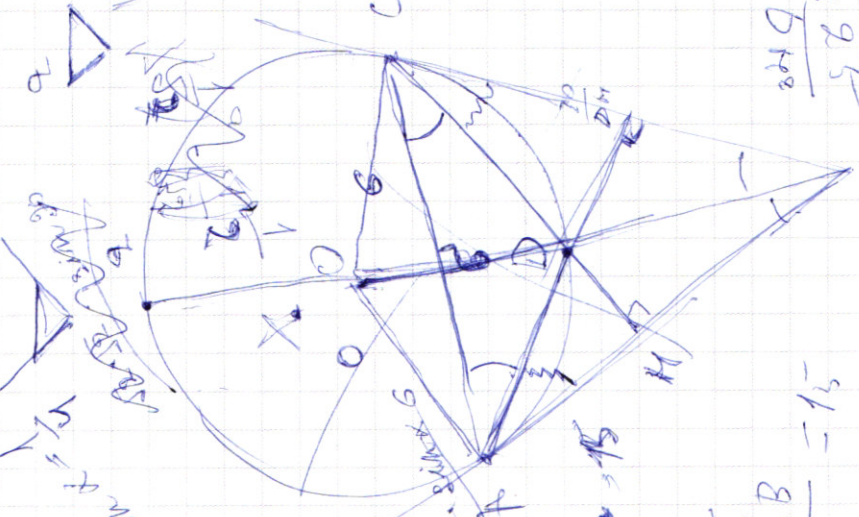
$$-(2-2)(x+9) = (2+5\sqrt{34})(x+5-\sqrt{34})$$

$$(2+5)^2 - 34$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 = 2y$$

$$y^2 - 5xy + 4x^2 = 0$$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

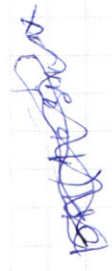
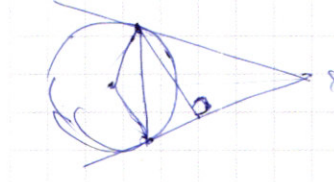


$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot DH \cdot AB = 15$$

$$BO = DH \cdot \sin \alpha$$

$$(2) = \frac{25}{3} = \frac{25}{3}$$

$$\frac{25}{DH^2} = \frac{25}{25} = 1$$



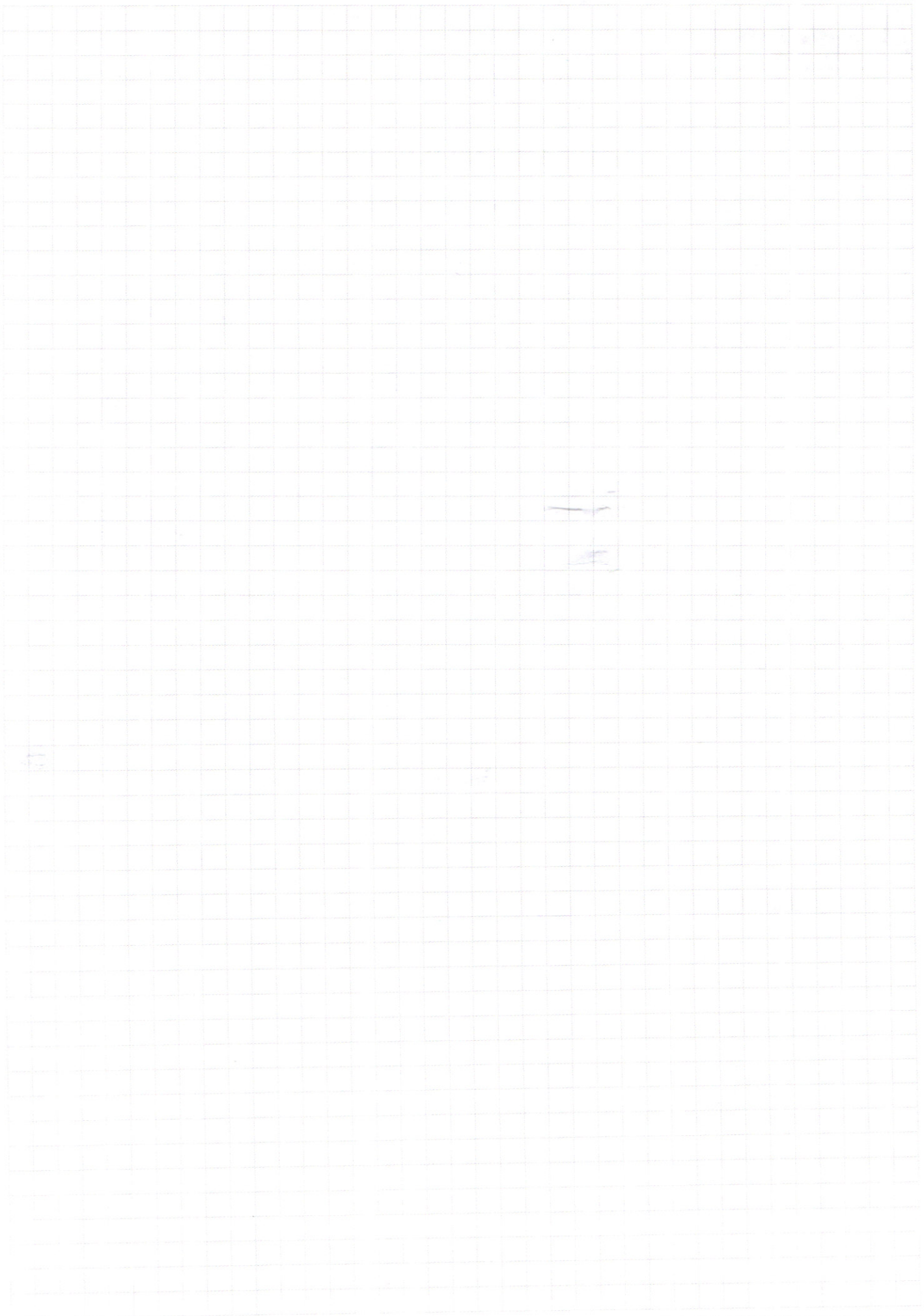


### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten mathematical work on graph paper. The diagrams and equations are as follows:

- Top Left:** A triangle with a circle inscribed inside it. The circle is tangent to the sides of the triangle. The equations  $3x + 2y = 6$  and  $2x = 3y$  are written near the triangle.
- Top Right:** A triangle with a circle inscribed inside it. The equations  $x^2 - 2x = x(x-2)$  and  $2(x-2)$  are written near the triangle.
- Middle Left:** A triangle with a circle inscribed inside it. The equations  $3x + 2y = 6 - 3y$  and  $2x = 3y$  are written near the triangle.
- Middle Right:** A triangle with a circle inscribed inside it. The equations  $(x-1) + (y - \frac{3}{2})$  and  $\frac{5\sqrt{20}}{2}$  are written near the triangle.
- Bottom Left:** A triangle with a circle inscribed inside it. The equations  $6 - 3x = \frac{2y}{A}$  and  $y = \frac{1.5x}{\sqrt{20}}$  are written near the triangle.
- Bottom Right:** A triangle with a circle inscribed inside it. The equations  $6 - 3x = 2y - 3y = x^2 - 2x$  and  $\sqrt{9 - 4x^2 + 8x}$  are written near the triangle.





черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)