

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy}, \\ 2y + x^2 = 9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках S и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $BC = \sqrt{29}$, $AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6, \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leq x \leq 19$, $3 \leq y \leq 19$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\frac{x^2 - 2x + 6 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x||x-3|} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{|x-1|^2 - 4|x-1| + 4}{4x(x-3) + |x||x-3|} \leq 0$$

~~Т.ч. $(x-1-2)^2$ всегда ≥ 0 , то
дробь ~~отриц.~~ ~~знаменателю~~
отрицателен \Rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} x < 3 \\ x > 0 \end{array} \right.$~~

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 3 \\ x < 0 \\ \frac{(x-1-2)^2}{5x(x-3)} \leq 0 \\ 3 > x \geq 0 \\ \frac{(x-1-2)^2}{3x(x-3)} \leq 0 \end{array} \right.$$

Т.ч. $(x-1-2)^2$ всегда ≥ 0 ; то дробь ~~отриц.~~ ~~знаменателю~~ отрицательна ТИТКИ
её знаменателю отрицательный.

$$3x(x-3) < 0 \Leftrightarrow 3 > x > 0$$

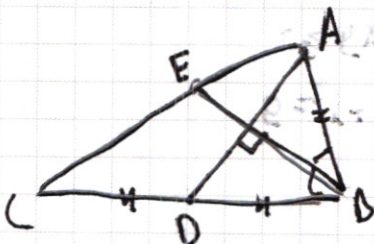
$$3x(x-3) < 0 \Leftrightarrow 3 > x > 0$$

Ответ: ~~0; 3~~ (0; 3)

№2

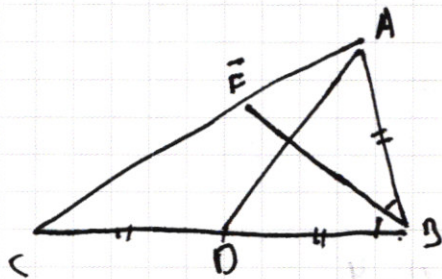
Докажем, что то, что в треугольнике дсс. \perp медиане равносильно тому,
что одна сторона вдвое больше второй.

I) дсс. \perp мед \Rightarrow 2 стороны, то: то $a = 2b$.



$AD \perp EB \Rightarrow$ в $\triangle ABO$ высота совп. с дсс $\Rightarrow \triangle ABO$ р/б $\Rightarrow OB = AB \Rightarrow 2AB = BC$

IV) \square 2 стороны $a; b$; что $a=2b \Rightarrow$ дуга \perp лог.



Пусть AD - лог; BE - дуга.
 Тогда $DB = \frac{BC}{2} = AB \Rightarrow$ дуга BE -
 высота $\Rightarrow BE \perp AD$

Пусть стороны треугольника $a; 2a; b$

Тогда условия задачи равносильны то:

$$\begin{cases} 300 = 3a + b \\ 2a < 180 \\ a < 180 \\ b < 180 \\ a, b \in \mathbb{N} \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{из } a, 2a, b \\ \text{можно сост.} \\ \text{треуг.} \end{array} \right\}$$

$$\begin{cases} 50 < a < 75 \\ b = 300 - 3a \\ a \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 150 < 3a < 300 \\ 2a < 180 \\ b = 300 - 3a \\ a \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Тогда треугольников удовлетворяющих лог условию 24

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 4xy + 4x^2 = xy \\ xy \geq 0 \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y^2 - xy) - (4xy - 4x^2) = 0 \\ xy \geq 0 \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ y = \frac{-2 \pm \sqrt{52}}{2} \\ y = 4x \\ x = 1 \\ x = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y^2 \geq 0 \\ y^2 + 2y - 9 = 0 \\ 4x = y \\ 4x^2 \geq 0 \\ 8x + x^2 - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-x)(y-4x) = 0 \\ xy \geq 0 \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

Ответ: $x=y = \frac{-2 \pm \sqrt{52}}{2}$; $x=1, y=4$; $x=-9, y=-36$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Пусть $\angle OAC = \alpha$.

Тогда; т.к. $AO \perp AB \perp CH$; $\angle ACH = \angle OAC = \alpha$

$\angle HAC = \angle ACH = \alpha$

$\angle ABO = 90^\circ - \angle AOB = \angle OAC = \alpha$

Тогда $\frac{AB}{AO} = \frac{CH}{AH} = \frac{AH}{OH} = \operatorname{ctg} \alpha$

$$\Downarrow \quad \Downarrow$$

$$CH \cdot OH = AH^2$$

$$\frac{AB \cdot OH}{2} = S_{AOB} = 75 \Rightarrow AB = \frac{30}{OH} \quad \frac{AB}{CH} = \frac{AO}{AH} = \frac{6}{AH}$$

Тогда $\frac{AB}{CH} = \frac{30}{OH \cdot CH} = \frac{30}{AH^2}$

Тогда $\frac{AB}{CH} = \frac{30}{AH^2} = \frac{6}{AH} \Rightarrow \frac{AH^2}{30} = \frac{AH}{6} \Rightarrow \frac{AH}{30} = \frac{1}{6} \Rightarrow AH = \frac{30}{6} = 5$

Тогда $\frac{AB}{CH} = \frac{6}{5}$

№5

□ $\triangle CDE$ вписанный Ф.К. $\angle DEB = 90^\circ$
 $\angle OCB = 90^\circ$

Тогда $\angle COB = \angle CEB = 90^\circ - \angle CED = 45^\circ$

↓
 $\triangle COB$ р/с; $CO = BC = \sqrt{29}$

Тогда $AD = \frac{6\sqrt{29}}{2} - \sqrt{29} = \frac{3}{2}\sqrt{29}$

Тогда $AD/AC = 3/5$

~~$\triangle ADE \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AD}{AC}\right)^2 = \frac{9}{25}$~~

~~$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{5 \cdot 29}{4}$~~

~~$S_{ADE} = \frac{5 \cdot 29}{4} \cdot \frac{9}{25} = \frac{29 \cdot 9}{5 \cdot 4} =$~~

Пусть k - коэффициент подобия. Тогда $k = \frac{AO}{AB} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{29}}{\frac{29}{2}} = \frac{3}{\sqrt{29}}$

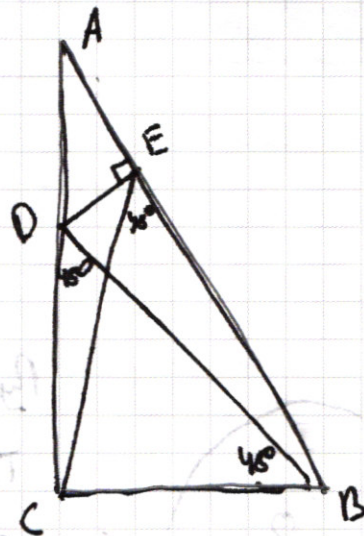
$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{\frac{25}{4} \cdot 29 + 29} = \sqrt{\frac{29 \cdot 29}{4}} = \frac{29}{2}$

$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{5 \cdot 29}{4}$

$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = k^2 = \frac{9}{29}$

↓
 $S_{ADE} = S_{ABC} \cdot \frac{9}{29} = \frac{5 \cdot 29 \cdot 9}{4 \cdot 29} = \frac{5 \cdot 9}{4} = \frac{45}{4}$

Ответ: $S_{ADE} = \frac{45}{4}$; $AD/AC = 3/5$



№6

Рассмотрим ищем точки $(x; y)$ удовл. $|3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6$ (Усл. 1)

Если $6 - 3x - 2y \geq 0$

$$y \leq 3 - 1.5x ; \text{ то } |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6$$

Если $6 - 3x - 2y < 0$; то

$$|3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6$$

$$|3x| + |2y| + 3x + 2y > 12$$

Если $x > 0; y > 0$; то *нер. упр. равенство*

$$3x + 2y > 6$$

$$6 - 3x - 2y < 0$$

Все области *подходит.*

Если $y < 0; x > 0$; то

$$6x > 12 \Leftrightarrow x > 2$$

Все области *подходит.*

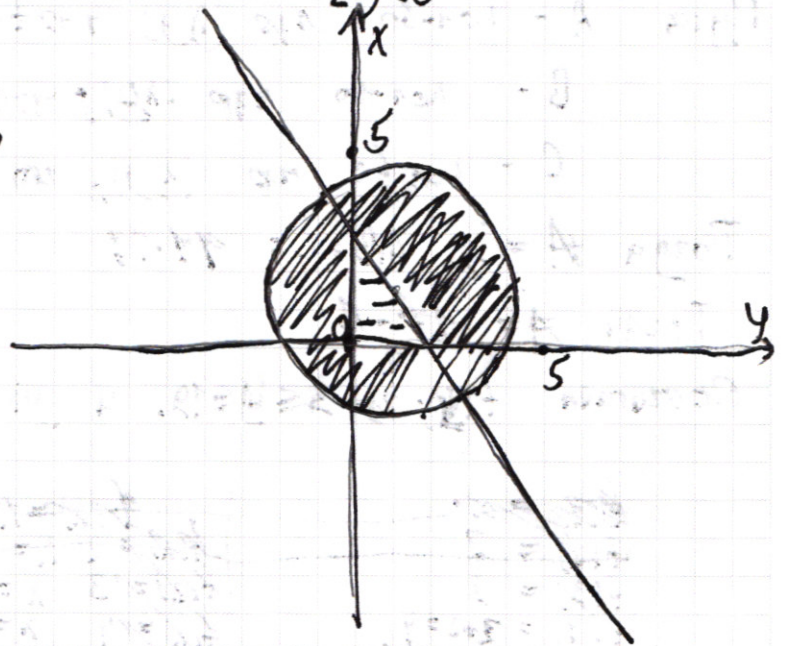
Если $x < 0; y > 0$; то

$$9x > 12 \Rightarrow x > 1.33$$

Все области *подходит.*

$$(3x + 2y) > 3x + 2y$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$$



Рассмотрим, ищем точки $(x; y)$ удовл. $x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0$ (Усл. 2)

Тогда это точки внутри круга с центром в $(1; 1.5)$ и радиусом $r = 1.5$

$$(x-1)^2 - 1 + (y-1.5)^2 - 2.25 \leq 0$$

$$(x-1)^2 + (y-1.5)^2 \leq 3.25$$

Все треугольники *неподходящих* точек усл. 1 *лежат* внутри круга

(т.е. $(0; 0), (3; 0), (0; 3)$) \in кругу.

$$\text{Тогда } S = S_{\text{круга}} - S_{\text{треуг}} = \pi \cdot 3.25^2 - \frac{23}{3} \approx 32.862 - 3 = 29.862$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 7

$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) &= f\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = f(x) \\ \Downarrow \\ f\left(\frac{x}{y}\right) &= f(x) - f(y) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow f(y) > f(x)$$

- Пусть A - кол-во пар (x, y) то $f(x) > f(y)$;
 B - кол-во пар (x, y) то $f(x) = f(y)$;
 C - кол-во пар (x, y) то $f(y) > f(x)$

Тогда $A = C$; $A+B+C = 17 \cdot 17$

Тогда $A = \frac{17^2 - B}{2}$

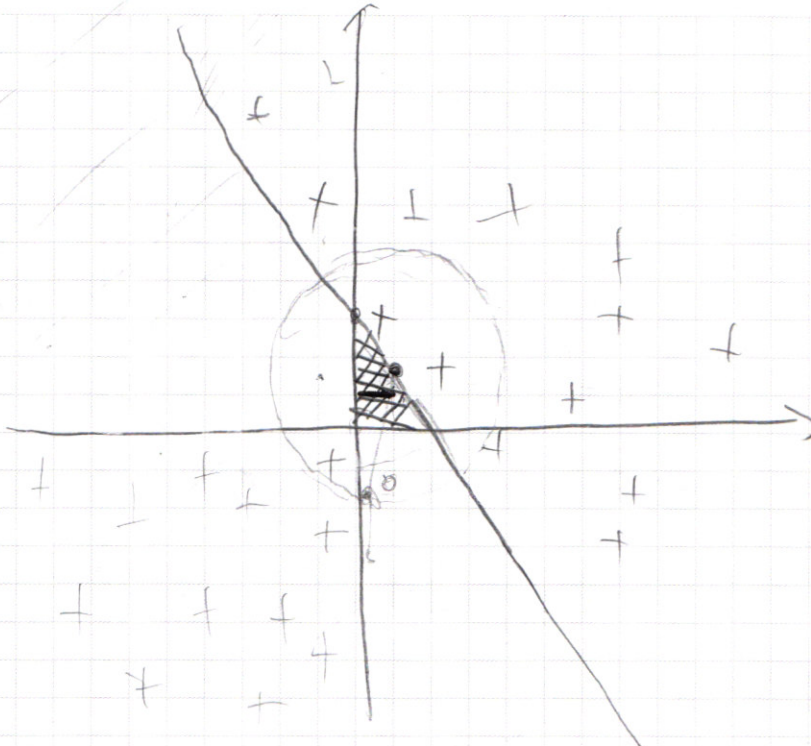
Посчитаем $f(y)$; где $2 \leq y \leq 17$. и где каждой $f(y)$ найдем кол-во ~~то~~ $f(x) = f(y)$

$f(2) = 2$	$f(x) = 2$ $x = 2$	$f(y) = 2$ $x = 2$
$f(3) = 3$	$f(x) = 3$ $x = 3$	$f(y) = 3$ $x = 3$
$f(4) = 2+2=4$	$f(x) = 4$ $x = 4$	$f(y) = 4$ $x = 4$
$f(5) = 2+3=5$	$f(x) = 5$ $x = 5, 6$	$f(y) = 5$ $x = 5, 6$
$f(6) = 2+3=5$	$x = 6, 6$	$f(y) = 6$ $x = 6, 10, 12$
$f(7) = 7$	$x = 7, 10, 12$	$f(y) = 7$ $x = 7, 10, 12$
$f(8) = 2+f(4)=6$	$x = 8, 9$	$f(y) = 8$ $x = 8, 9$
$f(9) = 3+3=6$	$x = 8, 9$	$f(y) = 9$ $x = 9, 18$
$f(10) = 2+5=7$	$x = 7, 10, 12$	$f(y) = 10$ $x = 10, 20$
$f(11) = 11$	$x = 11, 18$	$f(y) = 11$ $x = 11, 22$
$f(12) = 2+f(6)=7$	$x = 7, 10, 12$	$f(y) = 12$ $x = 12, 24$
$f(13) = 13$	$x = 13$	$f(y) = 13$ $x = 13, 26$
$f(14) = 2+f(7)=9$	$x = 9, 14$	$f(y) = 14$ $x = 14, 28$
$f(15) = 3+5=8$	$x = 10, 16$	$f(y) = 15$ $x = 15, 30$
$f(16) = 2+f(8)=8$	$x = 10, 16$	$f(y) = 16$ $x = 16, 32$
$f(17) = 17$	$x = 17$	$f(y) = 17$ $x = 17, 34$
$f(18) = 2+f(9)=11$	$x = 11, 18$	$f(y) = 18$ $x = 18, 36$
$f(19) = 19$	$x = 19$	$f(y) = 19$ $x = 19, 38$

~~B~~ суммар посчитали $B = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 8 + 1 \cdot 6 = 31$

Тогда $A = \frac{17^2 - 31}{2} = \frac{289 - 31}{2} = \frac{258}{2} = 129$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$(x-1)^2 + (y-10)^2 \leq 3,25$$

3,25

3,14

$$x \cdot 3,25 =$$

$$\begin{array}{r} 3,25 \\ \times 3,25 \\ \hline 1625 \\ 650 \\ \hline 10625 \end{array}$$

$$x \cdot 3,14 =$$

$$\begin{array}{r} 3,14 \\ \times 3,14 \\ \hline 1286 \\ 628 \\ \hline 98756 \end{array}$$

$$\frac{9}{4} + \frac{4}{4} = \frac{13}{4}$$

$$8 + 2 + 1 = \frac{13}{4}$$

$$3, 14 + 8 = 22$$

$$\begin{cases} x > 0; y > 0 \\ 6 - 3x - 2y > 0 \\ 6 = 6 \\ 3x + 2y > 6 \Rightarrow y > 3 - 1,5x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0; y < 0 \\ 6 - 3x - 2y > 0 \\ -6x - 4y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0; y < 0 \\ 6x - 3y - 2y > 0 \\ 6 - 4y > 6 \\ -4y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0; y > 0 \\ 6x - 3y - 2y > 0 \\ -6x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0; y > 0 \\ 6x - 3x - 2y < 0 \\ 3x + 4y - 6 > 6 \\ 3x + 2y > 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0; y > 0 \\ 6 - 2x - 2y < 0 \\ 2y - 6 > 6 \\ y > 3 \\ 6x - 6 > 6 \\ x > 2 \end{cases}$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{3+k}{3}\right) = f\left(\frac{3}{3}\right) + f\left(\frac{k}{3}\right)$$

$$\parallel$$

$$+ \left(\frac{19-k}{9}\right)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f\left(\frac{19}{y}\right)$$

$f(3) = 3$

$f(4) = f(2 \cdot 2) = 4$

$f(5) = 5$

$f(6) = 5$

$f(7) = 7$

$f(8) = 6$

$f(9) = 6$

$f(10) = 7$

$f(11) = 11$

$f(12) = 7$

$f(13) = 13$

$14 = 9$

$16 = 8$

$16 = 8$

$17 = 7$

$18 = 6$

$19 = 10$

$3 = f(3) = f(1) + f\left(\frac{3}{1}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) = f(x) = x$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$f(y) = f(x)$

$k(x > y) = k(y > x)$

$k(x = y)$

$\sum = 17 + 17$

$k(x > y) = 17 + 17$

$19 - 2 \cdot 1 = 16, 14$

$k^2 = x^2 + y^2 \leq 2x + 3y$

$k^2 \leq 2x + 3y$

$\frac{k^2 - 2x}{3} = y$

$x^2 - 2x - 3y + y^2 =$

$= (x-1)^2 + y^2 - 3y - 1 = (x-1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$

$\frac{3}{2} = 1,5 \cdot \frac{9}{4} = 2,25$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2 - 2x + 9 - 7|x-1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3|}$$

$$(2x)^2 - 2x \cdot 3 + 9 = (2x-3)^2 = (2(x-3))^2 = 4(x-3)^2$$

$$300 = a + 2a + b$$

$$2a < p = 100$$

$$\frac{(x-1-2)^2}{|x-3| \cdot |x-1|} \quad 150 < 3a < 300$$

$$\frac{(x-1)^2 - 4|x-1| + 4}{4(x-3)^2}$$

$$2a < 200$$

$$\frac{(x-1-2)^2}{3x(x-3)}$$

если $x \geq 3$
 $x < 0$

если $3 > x \geq 0$
3 1

$$\frac{(x-3)^2}{6x(x-3)} = \frac{x-3}{6x} \quad 2-1$$

$$3 > x \geq 0$$

$$\frac{(x-3)^2}{6x(x-3)}$$

$$76 - 60 = 26$$

$x^2 + y^2 - 2x - 3y \leq 0$
 $x(x-2) + y(y-3) \leq 0$
 $x^2 + y^2 - 2x - 3y \leq 0$
 $\begin{cases} y = x \\ 2y + x^2 = 0 \end{cases}$
 $x^2 + y^2 \leq 2x + 3y$

134
82

$$y - 2x = \sqrt{xy}$$

$$\begin{cases} y^2 - 4xy + 4x^2 = xy \\ xy \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 4^2 + 9 \cdot 4 \\ \hline 4 \\ \hline 81 + 9 \cdot 8 - 9 \end{array}$$

$$(y^2 - xy) = y^2 - 6xy + 4x^2 = 0$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 = 0$$

$$y(y-x) + 4x(x-y) = (y-4x)(y-x)$$

$289 \overline{) 177}$
 $\underline{-177}$
 119
 $\underline{-119}$
 17

$17 \overline{) 177}$
 $\underline{-177}$
 49

$\frac{AD}{AC} =$

$x^2 + y^2 = 2x + 3y$

$AB \cdot DH = 30 \Rightarrow AB = \frac{30}{DH}$

$CH/AC = \cos \alpha = \frac{AC}{12} \Rightarrow CH = \frac{AC^2}{12}$

$AH/DH = \frac{CH}{AH} \Rightarrow DH = \frac{AH^2}{CH} = \frac{AH^2}{AC^2} \cdot 12 = \dots$

$AB = \frac{30}{DH} = \frac{30}{12} \cdot \frac{AC^2}{AH^2} =$

$\frac{AB}{CH} = \frac{30}{AH^2}$

$\frac{AB}{AC} = \frac{CH}{AH} = \frac{AH}{DH} \Rightarrow CH \cdot DH = AH^2$

$\frac{AB}{CH} = \frac{AO}{AH} = \frac{6}{AH}$

$\frac{AB}{CH} = \frac{30/DH}{CH} = \frac{30}{DH \cdot CH} = \frac{30}{DA \cdot DP}$

$39 \left(\frac{29}{4} + \frac{4}{4} = \frac{39}{4} \cdot 29 \right)$

$x^2 - 2x \leq 3y - y^2$

$x^2 + y^2 \leq 2x + 3y$

$|a| + |b| + |6 - 9 - 5| \geq 9 + 16 + 9 = 37$

$\frac{9}{9} + \frac{b}{6} \leq a + b \leq |a + b|$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

$8 \cdot 3 = 24$

$x + 2y \leq 6$

$2y = 6 - 3x$

$y = 3 - 1.5x$

$x^2 - 2x \leq 3y - y^2$

$2x = y^2 - 2y$

$y^2 + 3y = y^2 - 2y$

$3y = -2y$

$5y = 0 \Rightarrow y = 0$

$x^2 - 2x \leq 0$

$x(x - 2) \leq 0$

$0 \leq x \leq 2$