МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \le 0 \quad \Big|\ \text{ОДЗ}: x \ne 0; 2$$

$$\frac{(x^2-6x+9)-2|x-3|+1}{2(x^2-2x)+|x^2-2x|} \le 0$$

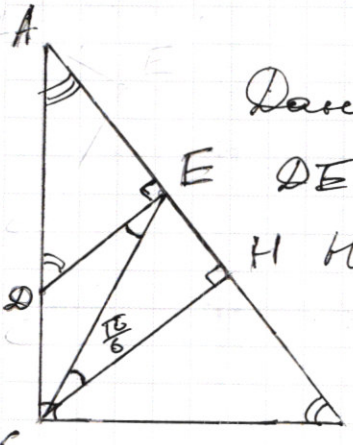
$$\frac{(|x-3|-1)^2}{2(x^2-2x)+|x^2-2x|} \le 0 \iff \left[\begin{array}{l} |x-3|=1 \\ 2(x^2-2x)+|x^2-2x|<0 \end{array}\right.$$

Замечаем, что $2(x^2-2x)+|x^2-2x| = \left[\begin{array}{l} 3(x^2-2x) \\ x^2-2x \end{array}\right.$, поэтому второе нер-во можно заменить на $x^2-2x<0$:

$$\left[\begin{array}{l} x = \left[\begin{array}{l} 4 \\ 2 \notin \text{ОДЗ} \end{array}\right. \\ x \in (0,2) \end{array}\right. \iff x \in (0,2) \cup \{4\}$$

Ответ: $x \in (0,2) \cup \{4\}$

№5



Дано: $\triangle ABC$ − прямоуг. тр., $\angle C = \frac{\pi}{2}$, $D \in AC$, $E \in AB$, т.ч. $DE \perp AB$, $AC = \sqrt{7}$, $BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$, $\angle CED = 30^\circ$

Найти: $\frac{AD}{AC}$ − ?, S_{AED} − ?

Решение: Заметим, что $\triangle AED \sim \triangle AHC$ (по 3 углам). Проведём EC и получим, что $\angle ECH = \angle CED = \frac{\pi}{6} \Rightarrow EH = \frac{CH}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{AC \cdot CB}{\sqrt{AC^2+CB^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\frac{7}{\sqrt{3}}}{\frac{7}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AH} = 1 - \frac{EH}{AH} = 1 - \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{(\sqrt{7})^2-2^2}} = \frac{1}{3}$. Тогда $S_{AED} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot AH \cdot CH = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 2 = \frac{\sqrt{3}}{9}$

Ответ: $\frac{1}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

№ 6

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4 \\ x^2-2x-4y+y^2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2x|+|y|+|4-(2x+y)|>4 \\ (x-1)^2+(y-2)^2\le 5 \end{cases}.$$

Заметим, что:

$$|2x|+|y|+|4-(2x+y)| \underset{\forall x,y\in\mathbb{R}}{\ge} |2x+y|+|4-(2x+y)| \ge$$

$\ge |4-(2x+y)+(2x+y)| = 4$, причём равенство достигается только при $x=y=0 \Rightarrow$ преобразуем систему:

$$\begin{cases} (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus(0,0) \\ (x-1)^2+(y-2)^2\le 5 - \text{~~окружность~~ круг } \omega \end{cases} \Rightarrow \text{т.к. } \omega \text{ сод. точку}$$

$(0,0)$, то получившаяся фигура – это ~~окружность~~ круг без одной точки. Удаление одной точки не изменит площади фигуры, поэтому $S_\omega = \pi\cdot(\sqrt{5})^2 = 5\pi$

Ответ: 5π

№ 7

Заметим, что $f(1\cdot a) = f(1)+f(a) = f(a) \Rightarrow f(1)=0$, тогда $f(a\cdot\frac{1}{a}) = f(a)+f(a^{-1}) = f(1) = 0 \Rightarrow f(a^{-1}) = -f(a)$ и также $f(a^b) = b\,f(a) \Rightarrow$ если $a = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n}$ – разл. на простые мн-ли, то $f(a) = \alpha_1 p_1+\alpha_2 p_2+\dots+\alpha_n p_n$. Теперь, получим, что $f(\frac{x}{y})<0 \Leftrightarrow f(x)-f(y)<0 \Leftrightarrow f(x)<f(y)$. Составим таблицу:

n_i	0	2	3	4	5	6	7	8	9	11	13	17
$f^{-1}(n_i)$	1	2	3	4	5, 6	8, 9	7, 10, 12	15, 16, 18	14	11	13	17
$\#f^{-1}(n_i)$	1	1	1	1	2	2	3	3	1	1	1	1

С её помощью мы можем по формуле $\#_k = (18-\sum_{i=1}^{k}\#f^{-1}(n_i))\cdot\#f^{-1}(n_k)$ ~~где k~~ посчитать кол-во необх. пар (x,y) (k, i – номера столбцов в таблице)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

для фиксированного x:

n_i	0	2	3	4	5	6	7	8	9	11	13	17
$\#_i$	17	16	15	14	24	20	21	12	3	2	1	0

Итого: $17+16+15+\ldots+2+1+0=133$. ~~Проделав аналогичные действия,~~ ~~(ну, или просто сдвинув (x,y)→(y,x))~~ ~~но фикс. y, получим, что суммарное кол-во таких пар $2\cdot 133=266$~~

Ответ: ~~266~~ 133

№3

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

Преобразуем первое ур-ие, положив $u=\sqrt{|x|}$, $v=\sqrt{|y|}$, причём x, y одного знака, тогда:

$\cancel{x-2y}\ u^2-2v^2=uv$

$u^2-uv-2v^2=0$

$(u+v)^2-3uv-3v^2=0$

$(u+v)(u-2v)=0$, но ~~xy по ОДЗ~~ $u,v\geq 0 \Rightarrow$

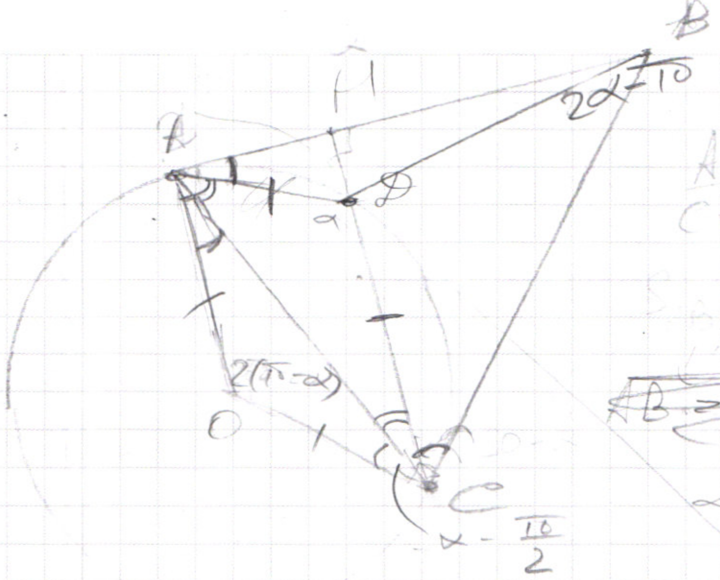
$\Rightarrow u=2v$, т.к. $u=v=0 \Leftrightarrow x=y=0$ – не решение системы.

$\Downarrow$ $|x|=4|y|$ $\Rightarrow x+y^2=5$

$x=4y$ (одного знака) $\quad 4y+y^2=5$

$y=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2}=-2\pm 3$ $\left[\begin{array}{l} 1 \Rightarrow x=4 \\ -5 \text{ – не подх.} \end{array}\right.$

Ответ: $(4, 1)$



$\frac{AB}{CH}$ — ?

$S_{\ldots} = 6,\ R = 4$

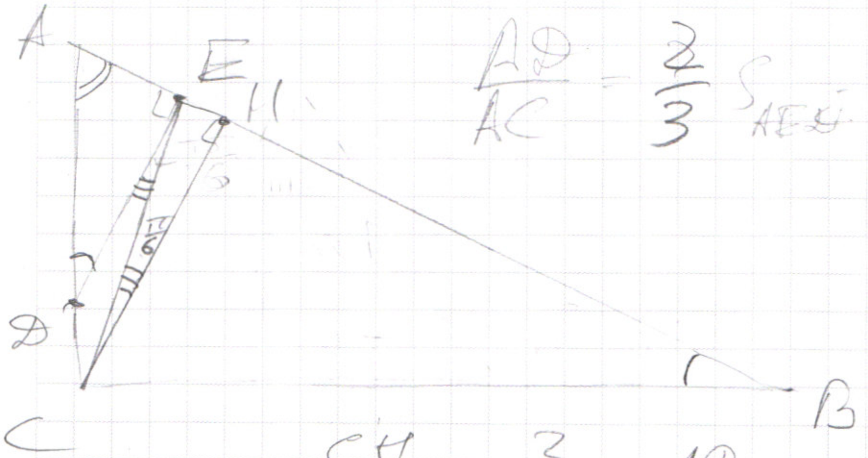
$AB = \frac{12}{DH}$

$\alpha - \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} - 2\alpha = \pi - \alpha$

$\alpha = \frac{2\pi}{3}$, $2\alpha - \pi = \frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3} =$

$= \pi - \alpha \Rightarrow$ треуг. прав. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AB}{CH} = \frac{2}{\sqrt{3}}$



$\frac{AD}{AC} = \frac{2}{3}$ S_{AED} ?

$AC = \sqrt{3}$

$BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$

$\angle CED = \frac{\pi}{6}$

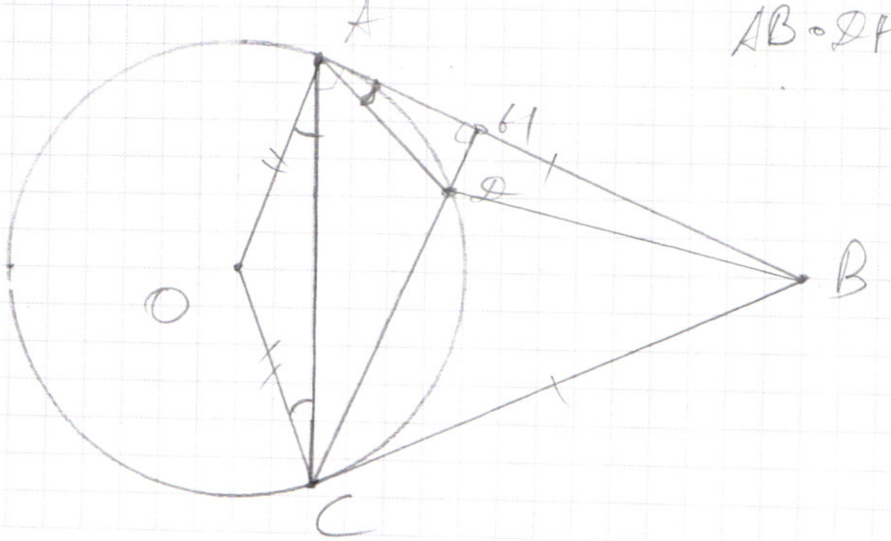
$AB = \frac{7}{\sqrt{3}}$

$CH = \frac{AC \cdot BC}{AB} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow EH = \frac{CH}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\frac{AD}{AC} = \frac{EH}{AH} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{7-4}} = \frac{2}{3}$

$S_{AED} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{4}{9}\sqrt{3}$

$AB \cdot DH = 12$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

x	$f(x)$
1	0
2	2
3	3
4	4
5	5
6	5
7	7
8	6
9	6
10	7
11	11
12	7
13	13
14	9
15	8
16	8
17	17
18	8

$\#(x,1)=0$

$\#(1,y)=17$ (3)

$\#(x,2)=1\cdot 2$ (19)

$\#(2,y)=16\cdot 2$ (41)

$\#(x,3)=2\cdot 1$ (43)

$\#(3,y)=15\cdot 1$ (58)

$\#(x,5)=13\cdot 2$ (64)

$\#(5,y)=13\cdot 2$ (90)

$\#(x,6)=5\cdot 2$ (100)

$\#(6,y)=11\cdot 2$ (122)

$\#(x,7)=7\cdot 3$ (143)

$\#(7,y)=8\cdot 3$ (167)

$\#(x,8)=10\cdot 3$ (197)

$\#(8,y)=5\cdot 3$ (212)

$\#(x,9)=13\cdot 1$ (225)

$\#(9,y)=4\cdot 1$ (229)

$\#(x,11)=14\cdot 1$ (233)

$\#(11,y)=3\cdot 1$ (236)

$\#(x,13)=15\cdot 1$ (241)

$\#(13,y)=2\cdot 1$ (243)

$\#(x,17)=18\cdot 1$ (261)

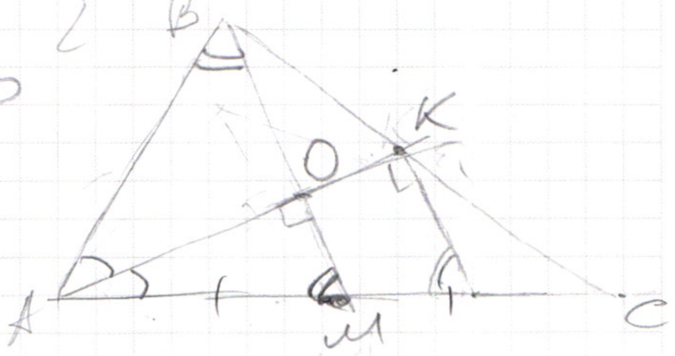
$\#(17,y)=0\cdot 1$

Ответ: 261

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 17, 0

1 1 1 2 2 3 3 1 1 1 1 1

$\left\{ a+b+c=600 \right.$



$\frac{BK}{AB}=\frac{KC}{AC}$

$\frac{OB}{AB}=\frac{OM}{AM}$

$AC=2AM$

$\frac{KC}{BK}=2\frac{OM}{OB}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

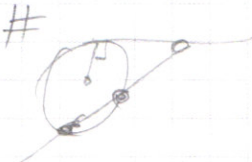
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1	1	1	1	2	2	3	3	1	1	1	1
0	2	3	4	5	6	7	8	9	11	13	17
1	2	3	4	5	8	7	15	14	11	13	17
				6	9	10	16				
						12	18				

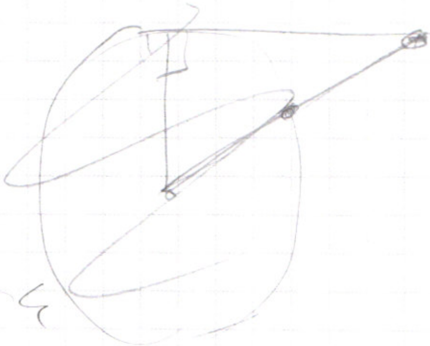
$\cancel{\pi - 2\alpha - \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha}$

$f(x) < f(y)$

$$\#_k = \left(18 - \sum_{i=1}^{k} \# f(n_i)\right) \cdot \#$$



$f(x)$	$\# f(y)$
0	$(18-1)\cdot 1 = 17$
2	$(18-(1+1))\cdot 1 = 16$
3	$(18-(1+1+1))\cdot 1 = 15$
4	$(18-(1+1+1+1))\cdot 1 = 14$
5	$(18-(1+1+1+1+2))\cdot 2 = 24$
6	$(18-(1+1+1+1+2+2))\cdot 2 = 20$
7	$(18-(1+1+1+1+2+2+3))\cdot 3 = 21$
8	$(18-(1+1+1+1+2+2+3+3))\cdot 3 = 12$
9	$(18-(1+1+1+1+2+2+3+3+1))\cdot 1 = 3$
11	$(18-(1+1+1+1+2+2+3+3+1+1))\cdot 1 = 2$
13	$(18-(1+1+1+1+2+2+3+3+1+1+1))\cdot 1 = 1$
17	$(18-(\ldots+1))\cdot 1 = 0$



$17+16+15+14+24+20+21+12+3+2+1 = 18\cdot 3 + 79 =$
$= 133$

$CH \cdot CD = AB$

$\frac{AB}{CH} = CD = CH - HD$

$CH^2 - CH \cdot HD = AB$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases}$$

$(y-1)^2 = 6 - \sqrt{xy} = 6 - x + 2y$

$y^2 - 2y + 1 = 6 - x + 2y$

$y^2 - 4y - 5 = x$

$x + y^2 = 5$

$y^2 - 4y - 5 + y^2 = 5$

$2(y^2 - 2y) = 10$

$y^2 - 2y - 5 = 0 = x$

$x \geq 2y$

$xy \geq 0$

$x - 2y = \sqrt{xy}$

$x = 4$

$4 - 2 = \sqrt{4 \cdot 1} = 2$

$4 + 1 = 3$

$5 \quad x = -10$

$-20 + 10$

$x, y < 0$

$x - 2y > 0$

$x \geq 2y$

~~$x + y^2 = 5$~~

$y, \; y^2 = 5 - x > 0$

$y^2 \geq 2y$

$5 - x \qquad x$

$5 \qquad 2x$

$-1 + 2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\le 0$$

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2(x^2-2x)+|x^2-2x|}\le 0$$

$x-3$: $-$ $-$ $-$ | $+$ (3)

x^2-2x: $+$ | $-$ | $+$ | $+$ (0, 2)

$$\frac{(x-3)^2-2|x-3|+1}{2(x^2-2x)+|x^2-2x|}\le 0$$

$$\frac{(|x-3|-1)^2}{2(x^2-2x)+|x^2-2x|}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|x-3|=1\\ 2(x^2-2x)+|x^2-2x|<0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\left[\begin{array}{l}4\\ \cancel{2}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(0,2)\\ x^2-2x<0\end{cases}\\ \begin{cases}x\in\mathbb{R}\setminus[0,2]\\ x^2-2x<0\end{cases}\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\ x\in(0,2)\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in(0,2)\cup\{4\}$

$f(p)=p \qquad f(1)=0$

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases} \quad f(1\cdot p)=f(1)+f(p)=p$

$y^2+2(x-y)=\sqrt{xy}+5$

$y^2+2y=5-\sqrt{xy} \qquad x^2-4xy+4y^2=xy$

$(y+1)^2=6-\sqrt{xy} \qquad x^2-5xy+4y^2=0$

$b=\sqrt{x} \qquad x^2-2xy+2y(2y-x)=xy$

$x^2-2xy-2y\sqrt{xy}=xy$

$\begin{cases} b^2-2y=\sqrt{by} \\ b^2+y^2=5 \end{cases}$

$f(a\cdot\frac{1}{a})=f(a)+f(\frac{1}{a})=f(1)=0$

$\Downarrow$

$f(a)=-f(\frac{1}{a})$

$|2x|+|y|+|4-(2x+y)|\geq|2x+y|+|4-(2x+y)|\geq$

$\geq|4-(2x+y)+(2x+y)|=4 \Rightarrow x,y$ - любые числа, кроме 0,0

$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-(2x+y)|>4 \\ x^2-2x-4y+y^2\leq 0 \end{cases} \qquad u^2-2v^2=uv$

$u^2-uv-2v^2=0$

$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-(2x+y)|>4 \\ (x-1)^2+(y-2)^2\leq 5 \end{cases} \Rightarrow S=5\pi \qquad (u+v)^2-3uv-3v^2=0$

$(u+v)^2-3v(u+v)=0$

$(u-2v)(u+v)=0$

$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)<0 \Rightarrow f(x)<f(y) \qquad \cancel{\sqrt{x}+u=2v}$

$u=2v$

$\sqrt{x}=2\sqrt{y}$

$f(a)=f(p_1^{\alpha_1}\dots p_n^{\alpha_n})=\alpha_1p_1+\alpha_2p_2+\dots+\alpha_np_n \qquad x=4y$

$4y+y^2-5=0$

$y=\frac{-4+\sqrt{16+20}}{}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)