

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 16

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\left(\frac{(x-1)^2 + 9}{|x-1|} - 6 \right) (|x-3| + |x| - 3) \leq 0.$$

2. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 16y^2} = 32, \\ 4y + \sqrt{x^2 - 16y^2} = 23. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Биссектрисы внутреннего и внешнего угла A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках M и N соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника AMN , касается стороны AB в точке A . Найдите радиус окружности, угол ACB и площадь треугольника ABN , если известно, что $AB = \sqrt{5}$, $BM = 2$.
4. [5 баллов] Вписанная окружность остроугольного треугольника ABC касается сторон AC и AB в точках E и D . Точка Y – основание перпендикуляра, опущенного из точки E на AB , а X – вторая точка пересечения EY со вписанной окружностью треугольника ABC . Найдите радиус этой окружности, если площадь треугольника AXD равна 5, а $2AD = 3EY$.
5. [5 баллов] На доске выписано $6n$ последовательных натуральных чисел ($n \in \mathbb{N}$). Из них выбираются три попарно различных числа, среди которых ровно одно кратно 2 и ровно одно кратно 3. Известно, что можно составить ровно 5 900 таких троек. Чему равно n ?
6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} 4y + 7x \geq |4y - 7x|, \\ y \leq -3x + 15, \\ x^2 - 10y + y^2 + 15 \geq 0 \end{cases}$$

7. [5 баллов] Найдите количество шестизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые две последовательные степени числа десять равна 1356.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1. $\left(\frac{|k-1|^2+9}{|k-1|} - 6\right)(|k-3| + |k| - 3) < 0$ $\begin{matrix} |k-1| \neq 0 \\ k-1 \neq 0 \\ k \neq 1 \end{matrix}$

$\frac{|k-1|^2+9}{|k-1|} - 6 = \frac{|k-1|^2+9-6|k-1|}{|k-1|} = \frac{(|k-1|-3)^2}{|k-1|}$ + то выражение всегда
больше или равно 0 \Rightarrow в неравенстве $|k-3| + |k| - 3$ должно быть ≤ 0 .

Рассмотрим промежуток: $|k-3| + |k| - 3 \leq 0$

I $k < 0$

$-k+3-k-3 \leq 0$
 $-2k \leq 0$
 $k \geq 0$

$\begin{cases} k \geq 0 \\ k \leq 0 \end{cases} \Rightarrow k = 0$

II $k \in (0; 3]$

$-k+3+k-3 \leq 0$

$\begin{cases} k \in \mathbb{R} \\ k \in (0; 3] \end{cases} \Leftrightarrow k \in (0; 3]$

III $k \in (3; +\infty)$

$k-3+k-3 \leq 0$
 $2k \leq 6$
 $k \leq 3$

$\begin{cases} k \leq 3 \\ k > 3 \end{cases} \Leftrightarrow k \in \emptyset$

Ответ: $k \in [0; 1) \cup [1; 3]$

Задача 2. $\begin{cases} x + \sqrt{x^2-16y^2} = 32 & (1) \\ 24y + \sqrt{x^2-16y^2} = 23 & (2) \end{cases}$ Пусть $\begin{cases} \sqrt{x-4y} = k, & k \geq 0 \\ \sqrt{x+4y} = t, & t \geq 0 \end{cases}$

(1) - (2) $x - 4y = 9 \Rightarrow \begin{cases} k^2 = 9 \\ k = 3 \quad k = -3 \end{cases}$

(не мож. по усл. на k)

(1) + (2) $x + 4y + 2\sqrt{(x-4y)(x+4y)} = 55$

$t^2 + 2kt - 55 = 0$

$t^2 + 6t - 55 = 0$

(по Т. Виета) $\begin{cases} t = -11 \\ t = 5 \end{cases}$
(не мож. по усл. на t)

$\sqrt{x-4y} = 3 \Rightarrow x-4y = 9 \quad (1)$

$\sqrt{x+4y} = 5 \Rightarrow x+4y = 25 \quad (2)$

(1) + (2) $\begin{cases} 2x = 34 \\ x = 17 \end{cases}$

$y = \frac{x-9}{4} = \frac{17-9}{4} = 2$

Ответ: $(17; 2)$

$$1. \left(\frac{|k-1|^2 + 9}{|k-1|} - 6 \right) (|k-3| + |k|-3) \leq 0$$

$$\begin{cases} |k-1| \neq 0 \\ k-1 \neq 0 \\ k \neq 1 \end{cases}$$

$$\frac{|k-1|^2 + 9 - 6|k-1|}{|k-1|} = \frac{|k-1|^2 - 6|k-1| + 9}{|k-1|} = \frac{(|k-1|-3)^2}{|k-1|}$$

если
один из
равно 0

$$\frac{(|k-1|-3)^2}{|k-1|} \geq 0 \quad 2) \frac{(|k-1|-3)^2}{|k-1|} \leq 0$$

$$\Rightarrow |k-3| + |k|-3 \leq 0 \quad (\text{решить по формуле б-м})$$



I $-k-3-k-3 \leq 0$
 $-2k \leq -6 \Rightarrow k \geq 3$
 $\sqrt{k \geq -3} \Leftrightarrow k \in (-\infty, 0]$
 $\Rightarrow k \in [-3; 0]$

II $k \in (0; 3]$
 $-k-3+k-3 \leq 0$
 $-6 \leq 0$
 $\begin{cases} k \in \mathbb{R} \\ k \in (0; 3] \end{cases} \Rightarrow k \in (0; 3]$

III $k \in (3; +\infty)$
 $k-3+k-3 \leq 0$
 $2k \leq 6$
 $k \leq 3$
 $\begin{cases} k \in (-\infty, 3] \\ k \in (3; +\infty) \end{cases} \Rightarrow k \in \emptyset$

Ответ: $k \in [-3; 3]$

$$2. \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 16y^2} = 32 \\ 24y + \sqrt{x^2 - 16y^2} = 23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 4y = 32 - 23 \\ x - 4y = 9 \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{(x-4y)(x+4y)}}{\sqrt{x+4y}} = \frac{k}{t}$$

$k \geq 0$
 $t \geq 0$

$$\begin{aligned} x + \sqrt{9+4y}^2 - 16y^2 &= 32 \\ 9+4y + \sqrt{9+4y}^2 - 16y^2 &= 32 \\ 9+4y + 3\sqrt{9+4y} - 16y^2 &= 32 \\ 3\sqrt{9+4y} - 16y^2 &= 23 - 4y \end{aligned}$$

$$x - 4y = 9 \Rightarrow \begin{cases} k^2 = 9 \\ k = 3 \\ k = -3 \end{cases}$$

$k = -3$
не пойд. не уай. на к

$$\begin{cases} x + 4y + \sqrt{x^2 - 16y^2} = 55 \\ t^2 + 2kt - 55 = 0 \\ t^2 + 6t - 55 = 0 \end{cases}$$

(ис Т. Виета) $t = -11$ $t = 5$
не пойд. пойд. на т

Помощь образуем: $\sqrt{x-4y} = 3$ $\sqrt{x+4y} = 5$

$$\begin{cases} x - 4y = 9 \\ x + 4y = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 34 \\ x = 17 \\ y = \frac{x-9}{4} = \frac{17-9}{4} = \frac{8}{4} = 2 \end{cases}$$

Ответ: $(17; 2)$

$$\sqrt{\frac{40}{(3-\sqrt{5})^2} - \frac{12\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}$$

$$\sqrt{\frac{40 - 36\sqrt{5} + 60}{(3-\sqrt{5})^2}} = \sqrt{\frac{100 - 36\sqrt{5}}{(3-\sqrt{5})^2}}$$

$$\frac{6x^2 + 2\sqrt{5}}{3} = \frac{100 - 36\sqrt{5}}{(3-\sqrt{5})^2} \quad \frac{3x^2 + \sqrt{5}}{3} = \frac{50 - 18\sqrt{5}}{(3-\sqrt{5})^2}$$

5. $6n$
 $n:2$

всего

$x \ y \ z$
 $6n - 3 = 3(2n - 1)$
 $x = 2k \ y = 3k$ \Rightarrow миним. значение - миним. число гласных на S
 $5900 \mid 6$

1 2 3 4 5 6
 $- :2 :3 :4 - :3$

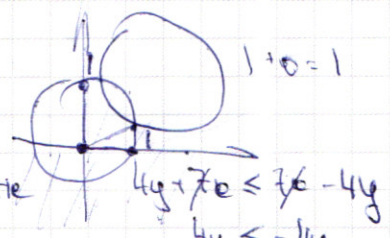
$kn - 11 = 5900$
 $n = 2950$ лет

1 3 4 5 6 7
 $3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8$
 $:3 :2 - :2 :2$

$n \ n+1 \ n+2 \ n+3 \ n+4 \ n+5 \ n+6$
 $2k \ 2k+1 \ 2k+2$
 $:2 \ :2 \ 2(k+1) \ :2$
 $6n \ 5900 = 4.$

6 7 8 9
 $4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9$
 $5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 0$
 $6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 0 \ 1$
 $7 \ 8 \ 9 \ 0 \ 1 \ 2$
 $8 \ 9 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3$
 $9 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4$

9 10 11 12 13 14



6.
$$\begin{cases} 4y + 7x \geq |4y - 7x| \\ y \leq -3x - 15 \\ x^2 - 10y + y^2 + 15 \geq 0 \end{cases}$$

 $y \leq -3x + 15$

$14x \geq 0$
 $x \geq 0$
 окр. эмб. меньше 6 I, либо III, либо IV.
 окр. эмб. меньше
 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$

$y \leq -4y$
 $y \leq -y$
 $xy \leq 0$
 $\boxed{xy \leq 0}$
 1мр 1мр 2мр 2мр.

$x^2 - 10y + y^2 + 15 = x^2 + (y^2 - 10y + 25) - 10 \geq 0$
 $x^2 + (y - 5)^2 \geq 10$

$x^2 + y^2 = R$
 радиус R

$5900 \mid 62$
 $\frac{4}{19} \frac{18}{10} \frac{2950}{}$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$
 $y + 3x \leq 15$
 $x^2 + (y - 5)^2 \geq 10$

7. _____
 5 7 6 8 1 3

10th координ. значение: 3, 4 и 4, 5

всего чисел: 2, 2
 мин. число $999 + 99 = 1098$

всего чисел: 4, 5
 мин. число $0 + 0 = 0$
 макс. число

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4. В

Дано: $AD = 3 \cdot EY$

$$\frac{AD}{EY} = \frac{3}{2} = \frac{3r}{2r}$$

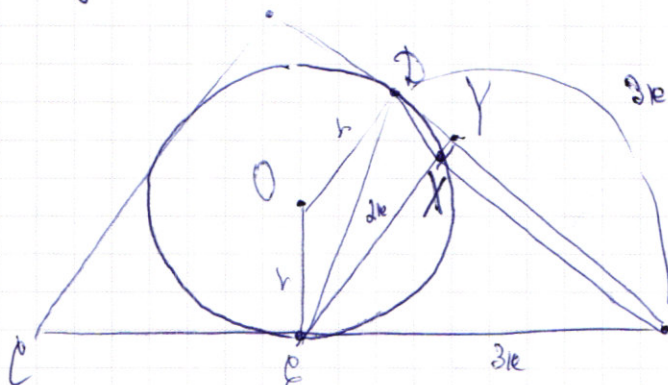
$$\frac{AD}{EY} = \frac{3r}{2r} \Rightarrow AD = 3r, EY = 2r$$

$$\frac{XY \cdot AD}{2} = 5 \Rightarrow XY \cdot 3r = 10$$

$$XY = \frac{10}{3r}$$

(по ев-ву Пифагора) $AD = EA = 3r$

$$\Delta EAY \quad EA^2 =$$



$$= EA^2 - EY^2 = 9r^2 - 4r^2 = 5r^2 \Rightarrow YA = \sqrt{5}r \quad (YA = -\sqrt{5}r \text{ не покр. по усл.)}$$

$$\Rightarrow DY = AD - YA = 3r - \sqrt{5}r = (3 - \sqrt{5})r$$

$\angle YDX = \frac{1}{2} \angle X = \angle DEY$; $\angle YDX - \text{общий} \Rightarrow \Delta DXH \sim \Delta EDY$ (по двум углам)

$$\frac{DY}{YX} = \frac{EY}{DY} \Rightarrow \frac{(3 - \sqrt{5})r \cdot 3r}{10} = \frac{2r}{(3 - \sqrt{5})r}$$

$$r^2 = \frac{20}{3(3 - \sqrt{5})} \Rightarrow r = \frac{2}{3 - \sqrt{5}} \sqrt{\frac{5}{3}}$$

В чет-ке $\angle EAD = \angle EAA + \angle ADA = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ $\angle A = \frac{2}{\sqrt{5} - 3} \sqrt{\frac{5}{3}}$ не покр. по усл.)

\Rightarrow угол $\angle EAD$ можно отнять от $360^\circ \Rightarrow \angle DAE + \angle EDA = 180^\circ \Rightarrow \cos \angle DCE = -\cos \angle DAE$

$$\cos \angle DAE = \frac{AY}{EA} = \frac{\sqrt{5}r}{3r} \Rightarrow \cos \angle DCE = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$ED^2 = AD^2 + EA^2 - 2AD \cdot EA \cdot \cos \angle DAE = 9r^2 + 9r^2 - 2 \cdot 3r \cdot 3r \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = 6r^2 - 6\sqrt{5}r^2 = 6r^2(3 - \sqrt{5})$$

$$2r^2 + 2r^2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = ED^2 = 6r^2(3 - \sqrt{5}) = \frac{2 \cdot 10 \cdot (3 - \sqrt{5})}{3(3 - \sqrt{5})}$$

$$r^2 \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{10}{3 - \sqrt{5}}$$

$$r^2 = \frac{10 \cdot 3}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} = \frac{60}{9 - 5} = \frac{60}{4} = 15$$

$$r = \sqrt{15} \quad (r = -\sqrt{15} \text{ не покр. по усл.})$$

Ответ: $r = \sqrt{15}$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5.

Предположим, что $n=1$, тогда ряд выисдим так:

$$k \quad k+1 \quad k+2 \quad k+3 \quad k+4 \quad k+5 \quad \dots$$

Рассмотрим несколько случаев: если $k \neq 2$; $k \neq 3 \Rightarrow$ в ряду оказываются 3 числа, кратные 2 ($k+1, k+3, k+5$) и 2 числа, кратные 3 (либо $k+1$ и $k+4$, либо $k+2$ и $k+5$) \Rightarrow не кратное ни 2, ни 3 одно число (k) \Rightarrow можно составить 1 тройку (о которой говорится в задаче) из этого ряда

если $k:2, k \neq 3$ $k=2l$

$$2l \quad 2l+1 \quad 2l+2 \quad 2l+3 \quad 2l+4 \quad 2l+5$$

в ряду оказываются 3 числа, кратные 2 ($2l, 2l+2, 2l+4$) и 2 числа, кратные 3 (либо $2l+1$ и $2l+4$, либо $2l+2$ и $2l+5$) \Rightarrow не кратное ни 2, ни 3 одно число ($2l+3$) \Rightarrow можно составить 1 тройку из этого ряда

если $k \neq 2, k:3$ $k=3l$

$$3l \quad 3l+1 \quad 3l+2 \quad 3l+3 \quad 3l+4 \quad 3l+5$$

в ряду оказываются 3 числа, кратные 2 ($3l+1, 3l+3, 3l+5$) и 2 числа, кратные 3 ($3l$ и $3l+3$) \Rightarrow не кратное ни 2, ни 3 2 числа ($3l+2, 3l+4$) \Rightarrow из такого ряда можно составить 2 тройки.

если $k:2, k:3$ $k=6l$

$$6l \quad 6l+1 \quad 6l+2 \quad 6l+3 \quad 6l+4 \quad 6l+5$$

в ряду оказываются 3 числа, крат. 2 ($6l, 6l+2, 6l+4$) и 2 числа, крат. 3 ($6l, 6l+3$) \Rightarrow не крат. ни 2, ни 3 2 числа ($6l+1, 6l+5$) \Rightarrow из такого ряда можно составить 2 тройки

Итак же образом, при $n=1$ можно быть либо 1 тройка, либо 2 тройки \Rightarrow

$$\Rightarrow 5900 = n, \text{ либо } 5900 = 2n$$

$$n = 2950$$

При этом соответствующие числа в тройках могут меняться, что позволяет брать "тройки" из всей последовательности.

Ответ: $n = 5900$ либо $n = 2950$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

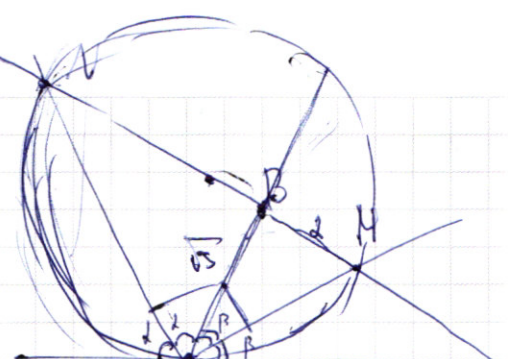
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

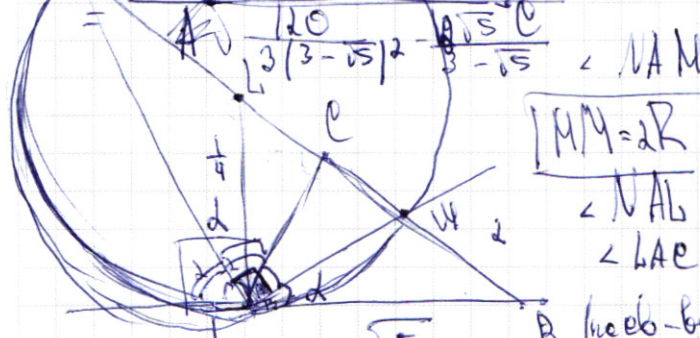
$$EQ^2 = \sqrt{(3-\sqrt{5})^2 + 4^2} = \sqrt{9 - 6\sqrt{5} + 5 + 16} = \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}$$



$$= \sqrt{8a^2 - 6\sqrt{5}e} \leftarrow$$

$$= \sqrt{6e(3e - \sqrt{5})} =$$

$$= \frac{12}{\sqrt{5} - 3} \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{5} - 3} - \sqrt{5} \right) =$$



$$\angle NAM = 90^\circ \text{ (п.к. } \angle \alpha + \angle \beta = 180^\circ, \angle \alpha + \angle \rho = 90^\circ) \Rightarrow MN = 2R(\omega)$$

$$|MN| = 2R \leftarrow \text{ЭТО } L - \text{центр окружности } \omega.$$

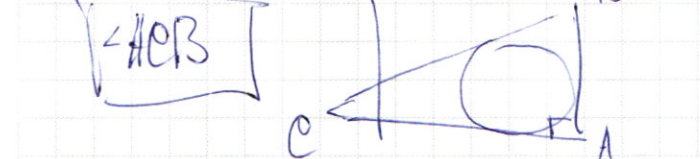
$$\angle NAL + \angle LAP + \angle PAN = 90^\circ$$

$$\angle LAE + \angle EAM + \angle MAB = 90^\circ \Rightarrow \angle NAL = \angle LAE$$

$$AB^2 = \omega B \cdot BN = BN = \frac{AB^2}{\omega B} = \frac{5}{2} \Rightarrow MN = BN - \omega B = \frac{5}{2} - 1 = \frac{1}{2} = 2R$$

$$AL = NL = LM = R = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{LHB} = \frac{AB \cdot AL}{2} = \frac{\sqrt{5} \cdot \frac{1}{4}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{8} \quad R = \frac{1}{4}$$

$$\frac{S_{LAB}}{S_{NAB}} = \frac{\angle B \cdot AB}{\omega B \cdot AB} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 2}{5} = \frac{1}{10} \Rightarrow S_{NAB} = \frac{S_{LAB} \cdot 10}{1} = \frac{1 \cdot 10 \sqrt{5}}{18} = \frac{5\sqrt{5}}{9}$$

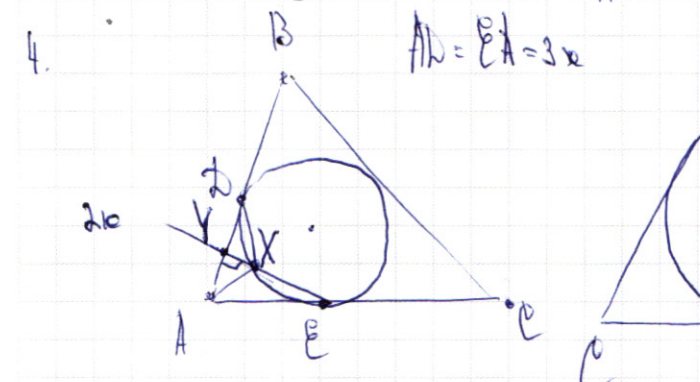


$$\frac{AD}{EY} = \frac{2}{2}$$

$$XY \cdot AD = 5 \quad \sqrt{5} < 3$$

$$XY \cdot 3e = 10 \quad -2 > -\sqrt{5} > -3$$

$$XY = \frac{10}{3e}$$



$$\sqrt{5}e \quad \frac{h^2 + h^2}{2h^2 + 2 \cdot \frac{h^2 \sqrt{5}}{3}} = \frac{\sqrt{12}}{3}$$

(по Т. Пифагора) $6 \cdot EA^2 = YA^2 = 4e^2 = 5e^2$

$$YA = \sqrt{5}e$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}e}{3e} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos(180 - \alpha) = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Косинус $\angle EED$ можно найти по формуле

$$\frac{S_{XEA}}{S_{YEA}} = \frac{XY}{EY} = \frac{10\sqrt{5}}{3e \cdot 3e} = \frac{10}{9e^2} = \frac{5}{3e^2}$$

$$S_{XEA} = \frac{3}{e} \quad \frac{3}{e^2} = \frac{5}{3e^2} \Rightarrow e^2 = \frac{3}{5}$$

$$S_{END} = 3e \cdot 3e \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{e} \quad e = 1$$

$$e = \frac{2\sqrt{5}}{(3-\sqrt{5}) \cdot 3}$$

$$e^2 = \frac{20}{(3-\sqrt{5})^2 \cdot 3}$$