МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE\perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED=45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6, \\ x^2-2x-3y+y^2\leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 19$, $3\leqslant y\leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

© МФТИ, 2022

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

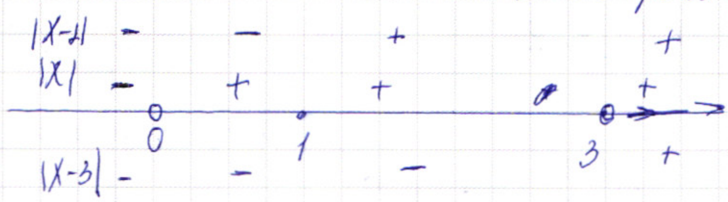
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \le 0$. Заметим, что $4x^2-12x = 4x(x-3)$.

$x=1;\ x=0;\ x=3$ (из мод.) хоть есть и модуль в знаменателе, но всё равно: $x \ne 0$ и $x \ne 3$.



1) $x<0$.

$\frac{x^2-2x+5+4(x-1)}{4x^2-12x+x(x-3)} \le 0;$ $\frac{x^2-2x+5+4x-4}{4x(x-3)+x(x-3)} \le 0;$

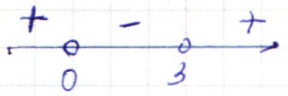
минус · минус = плюс

$\frac{x^2+2x+1}{5x(x-3)} \le 0;$ $\frac{(x+1)^2}{x(x-3)} \le 0.$ заметим, что числитель всегда неотрицателен; $(x+1)^2 = 0;\ x=-1$ (од. решение)

$\Leftarrow$

соотв, нужно смотреть на знамен.

$\frac{1}{x(x-3)} \le 0$



$x \in (0;3) \cup \{-1\}$.

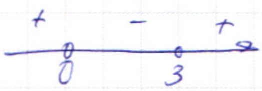
но у нас $x<0$. соотв; $\underline{x=-1}$.

2) $0 < x \le 1$.

$\frac{x^2-2x+5+4(x-1)}{4x^2-12x-x(x-3)} \le 0;$ $\frac{(x+1)^2}{3x(x-3)} \le 0;$ ≥ 0 всегда.

$x=-1$ (соотв. из чис.)

$\frac{1}{x(x-3)} \le 0;$



$x \in (0;3);$

раз $0<x \le 1$, то:

$x \in (0;1]$

□ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

3) $1 \le x < 3$

$$\frac{x^2-2x+5-4(x-1)}{4x^2-12x-x(x-3)} \le 0; \quad \frac{(x-3)^2}{3x(x-3)} \le 0;$$

$x=3$ не явл. решением

! не будет являться!

сокр:

$$\frac{x-3}{3x} \le 0;$$

$+ \quad 0 \quad - \quad 3 \quad +$

$x \in (0;3)$

раз $1 \le x < 3$, то:

$x \in [1;3)$

4) $x > 3$

$x=3$ — не явл. реш., сокр

$$\frac{x^2-2x+5-4(x-1)}{4x^2-12x+x(x-3)} \le 0; \quad \frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} \le 0$$

сокр.

$$\frac{x-3}{x} \le 0; \quad + \quad 0 \quad - \quad 3 \quad +$$

$x \in (0;3)$. но раз $x>3$, то $\varnothing$.

$$\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x \in (0;1] \\ x \in [1;3) \\ \varnothing \end{array}\right. \quad x \in \{-1\} \cup (0;3).$$

Ответ: $\{-1\} \cup (0;3)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$\cancel{\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}}$

ОДЗ:

$xy\geq 0$ и $y-2x\geq 0$

$y\geq 2x$.

$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} & (1) \\ 2y+x^2=9 & (2) \end{cases}$

Возвожу (1) в квадрат (обе части):

$(y-2x)^2=xy$

$y^2-4xy+4x^2=xy$

$y^2-5xy+4x^2=0 \quad |:x^2$

$\frac{y^2}{x^2}-\frac{5y}{x}+4=0$;

пусть $t=\frac{y}{x}$:

$t^2-5t+4=0$.

$D=25-16=9$

$t_{1,2}=\frac{5\pm3}{2}$; $t_1=4$

$t_2=1$.

т.е.:

$\left[\begin{array}{l} \frac{y}{x}=4 \ (3) \\ \frac{y}{x}=1 \ (4) \end{array}\right.$

из (3) и (4): $\left[\begin{array}{l} y=4x. \ (5) \\ y=x. \ (6) \end{array}\right.$ Вспоминаем про ОДЗ:

$y\geq 2x$; $\overset{(3)}{\cancel{4x\geq 2x \ (\checkmark)}}$. $4x-2x\geq 0$
$2x\geq 0$
$x\geq 0$; $y\geq 0$

$y\geq 2x$; $\overset{(4)}{\cancel{x\geq 2x \ (\times)}}$.

$x\geq 2x$; $x-2x\geq 0$
$-x\geq 0$
$\begin{cases} x\leq 0 \\ y\leq 0 \end{cases}$

Обе подходят, ведь $xy\geq 0$

подст. в (2) – (5):

$2y=9-x^2$; $8x=9-x^2$

$x^2+8x-9=0$

$D_1=16+9=25$

$x_{1,2}=-4\pm5$; $x_1=-9$ → по усл. $x\geq 0$ соотв., не подх.

$x_2=1$;

$\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) подст. в (2) - (6):

$2y = 9 - x^2$

$2x = 9 - x^2$; $x^2 + 2x - 9 = 0$

$D_1 = 1 + 9 = 10$

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{10}$; по усл. $\underline{x \le 0}$.

тогда подх. только $x = -1 - \sqrt{10}$ $\begin{cases} x = -1 - \sqrt{10} \\ y = -1 - \sqrt{10} \end{cases}$

Ответ: $(-1-\sqrt{10}; -1-\sqrt{10}); (1; 4)$

№ 6.

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6 \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \le 0 \end{cases}$$

−	−	−
−	−	+
−	+	−
+	−	−
−	+	+
+	+	~~−~~
+	+	+

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 3y$

$y^2 - 2 \cdot k \cdot y + \frac{9}{4}$

$2ky = 3y$; $k = \frac{3}{2}$

$x^2 - 2x + 5 - 4|x-1| = 0$

$x^2 - 2x + 5 = 4|x-1|$

$\boxed{\begin{matrix} x - 1 \ge 0 \\ x \ge 1 \end{matrix}}$

$4|x-1| = x^2 - 2x + 5$;

$4x - 4 = x^2 - 2x + 5$;

$x^2 - 6x + 9 = 0$; $(x-3)^2 = 0$; $\boxed{x = 3.}$

$\cancel{x^2 - 2}$ $\cancel{x^2}$ $4|x-1| = x^2 - 2x + 5$;

$x \le 1$.

~~$4x - 4 = x^2 - 2$~~

$4x - 4 =$

□ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6-3x-2y| > 6 \quad (1) \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \le 0 \quad (2) \end{cases}$$

1) сперва разберёмся с (1) ~~ур-ем~~ неравенством (буду раскрывать модули с + или - знаком =>
+ + + ;
− − − ;
− + − ;
− − + ;
+ − − ;
− + + ;
+ + − ;
+ − +

$|3x|$ $|2y|$ $|6-3x-2y|$

знаки раскрытия модулей

всего вар. будет $2\cdot 2\cdot 2 = 8$).

① + + + :

$3x+2y+6-3x-2y>6$

$6>6$ (X)

② − − − :

$-3x-2y-6+3x+2y>6$

$0>12$ (X)

③ − + − :

$-3x+2y-6+3x+2y>6$

$4y>12$; $y>3$ (будет прямая $\underline{y=3}$) (V).

④ − − + :

$-3x-2y+6-3x-2y>6$

$6-6x-4y>6$; $6x+4y<0$ $|:2$; $3x+2y<0$; $y<-\frac{3x}{2}$ ($\underline{y=-\frac{3x}{2}}$) (V).

⑤ + − − :

$3x-2y-6+3x+2y>6$; $6x>12$; $x>2$ ($\underline{x=2}$) (V).

⑥ − + + :

$-3x+2y+6-3x-2y>6$.

$-6x>0$; $x<0$ (V) ($\underline{x=0}$).

⑦ + + − :

$3x+2y-6+3x+2y>6$.

$6x+4y>12$; $3x+2y>6$, $y>\frac{6-3x}{2}$ ($\underline{y=\frac{6-3x}{2}}$) (V).

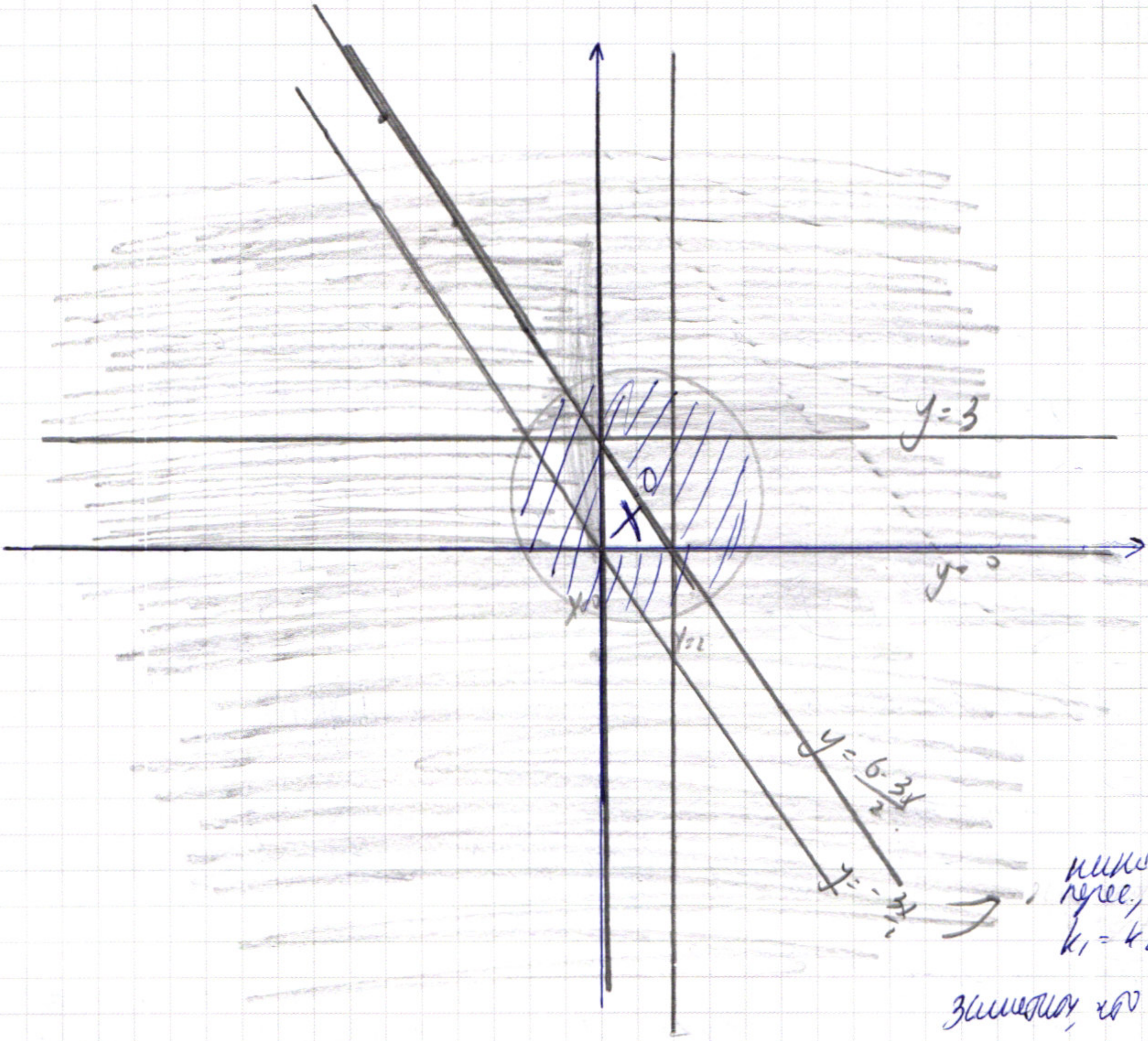
⑧ + − + :

$3x-2y+6-3x-2y>6$

$-4y>0$; $y<0$ ($\underline{y=0}$) (V).

Все ур-ния, вод. (V), нужно нанести на xOy, при этом выделив, что подходит, а что нет (методом подстановки каких-либо чисел из часов площади координат).

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)



никогда не перес., ведь $k_1 = k_2 = -\frac{3}{2}$.

заметим, что все подходят все области (части коорд. плоск.), кроме одной. будет закрашена только часть в окр.

2) разберёмся с (2):

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 3x + \frac{9}{4} \le \frac{9}{4} + 1$

$(x-1)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 \le \frac{13}{4}$ → раз ≤ 0, то

$(x-1)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 \le \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$ → $r \approx 1{,}75$.

$r^2 = \frac{13}{4}$

т. $O(1; \frac{3}{2})$ → центр. окр.

т. O лежит на $y = \frac{6-3x}{2}$, поэтому, $S_{\text{площадь фигуры}} = \pi \cdot r^2 - S_\Delta =$

$= \pi \cdot r^2 - \frac{3 \cdot 2}{2} =$

$= \pi \cdot \frac{13}{4} - 3 = \frac{13\pi - 12}{4}$ (>0).

Ответ: $\frac{13\pi - 12}{4}$.

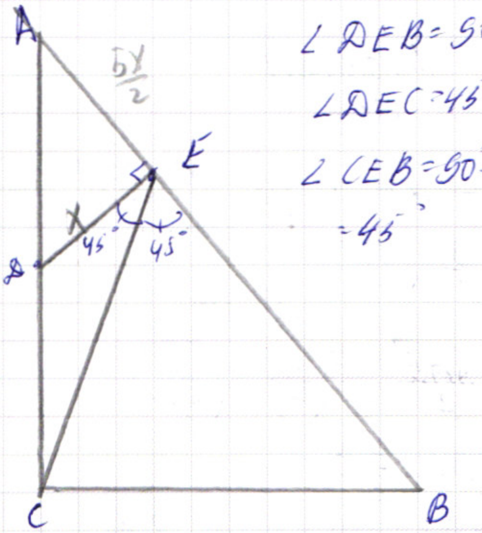
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

Дано:
$\triangle ABC$; $DE \perp AB$
$\angle C = 90^\circ$
т. D – на AC
т. E – на AB
$AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$
$BC = \sqrt{29}$

$\frac{AD}{AC}$ – ?
$S_{\triangle AED}$ – ?

Решение:



$\angle DEB = 90^\circ$;
$\angle DEC = 45^\circ$;
$\angle CEB = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

• рассмотрим $\triangle AED$ и $\triangle ACB$:
$\triangle AED \sim \triangle ACB$ (по 3-ему признаку подобия) (все углы равны)
($\angle A$ – общий; $\angle AED = \angle ACB = 90^\circ$
сумма углов в $\triangle = 180^\circ$)

$k_1 = \frac{AE}{AC} = \frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AB}$

$\frac{AE \cdot 2}{5\sqrt{29}} = \frac{ED}{\sqrt{29}}$

$2AE = ED \cdot 5$; пусть $ED = x$;
$AE = \frac{5x}{2}$ (1)

• рассмотрим $\triangle ABC$:
$\sin\angle B = \frac{AC}{AB}$ (2)

$\triangle ABC$ – прямоуг., тогда, по т. Пифагора:
$BC^2 + AC^2 = AB^2$
$29 + \frac{25 \cdot 29}{4} = AB^2$; $29^2 \cdot \frac{1}{4} = AB$

$AB = \frac{29}{2}$ (3)

(из (2) и (3)): $\sin\angle B = \frac{5\sqrt{29} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot 29}$; $\sin\angle B = \frac{5}{\sqrt{29}}$ (4)

• $\triangle ECB$ (по т. синусов):
$\frac{BC}{\sin 45^\circ} = \frac{EC}{\sin\angle B}$; из (4): $EC = \frac{\sqrt{29} \cdot 5 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}$;

$EC = 5\sqrt{2}$. (5)

• $\triangle AEC$ (по т. косинусов):

$AE^2 + EC^2 - 2 \cdot AE \cdot EC \cdot \cos\angle AEC = AC^2$;

$\cos\angle AEC = \cos(90^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ$

(из (1) и (5)): $\frac{25x^2}{4} + 25 \cdot 2 + \cancel{2} \cdot \frac{5x}{\cancel{2}} \cdot 5\cancel{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2} = \frac{25 \cdot 29}{4}$

$\frac{25x^2}{4} + 25x + 25\left(2 - \frac{29}{4}\right) = 0 \mid :25$

$\frac{x^2}{4} + x - \frac{21}{4} = 0 \mid \cdot 4$; $x^2 + 4x - 21 = 0$.

$x_{1,2}$:

$D_1 = 4 + 21 = 25$

$x_{1,2} = -2 \pm 5$; $x_1 = 3$
$x_2 = -7$ (не подх); т. е.

$ED = 3$; $AE = \frac{15}{2}$;

• $\triangle AED$ (по т. Пифагора):

$AD^2 = x^2 + \frac{25x^2}{4}$;

$AD^2 = \frac{x^2}{4} \cdot 25$; $AD = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{25}$. подст. x:

$AD = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{25}$. тогда:

$\frac{AD}{AC} = \frac{3\cancel{\sqrt{25}}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{5 \cdot \cancel{\sqrt{25}}} = \frac{3}{5}$.

• $S_{\triangle AED} = \frac{AE \cdot ED}{2}$;

$S_{\triangle AED} = \frac{x \cdot 5x}{2 \cdot 2}$; $S_{\triangle AED} = \frac{5x^2}{4}$;

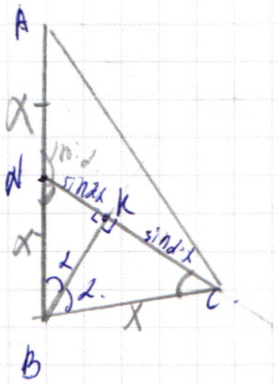
$S_{\triangle AED} = \frac{45}{4}$

Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$; $S_{\triangle AED} = \frac{45}{4}$.

№ 2.

Дано:
$P = 300$, биссектр.
удвоенн. стороны
—
сколько $\triangle$ - ?

Решение:
пусть есть $\triangle ABC$:



BK - бисс;
CN - медиан. пусть $BC = x$
раз BK - бисс, при чём,
$\angle NKB = 90°$, то $\triangle NBC$ - равнобедр.
тогда: $NB = BC = x$
$AB = 2x$
пусть $\angle NBK = \angle KBC = \alpha$

$\triangle BKC$: $\sin\alpha = \frac{KC}{x}$; $KC = x \cdot \sin\alpha$;
(прямоуг)

$x\sin\alpha = KC = NK$ (в равнобедр. $\triangle$
BK - мед, бисс, высота - свойство).

$NC = 2x \cdot \sin\alpha$.

• $\triangle BKN$: $\angle BNK = 90° - \alpha$; $\angle ANC = 90° + \alpha$ (смежные).
(сумма углов: $180°$)
$\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$.

• $\triangle ANC$: по т. кос:

$x^2 + 4\sin^2\alpha \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot 2x \cdot \sin\alpha \cdot \sin\alpha = AC^2$

$x^2 + 4\sin^2\alpha \cdot x^2 + 4x^2 \sin^2\alpha = AC^2$

№5.

Дано:

окр$(O; R)$;

$R = 6$;

$\triangle ABC$;

AB и BC - кас. к окр.

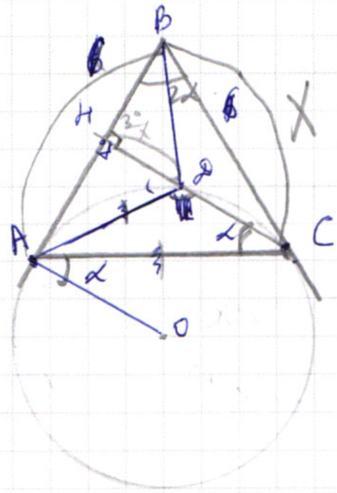
$S_{\triangle ABD} = 15$

CH - высота,

т. D - пересеч. CH с окр.

$\frac{AB}{CH}$ - ?

Решение:



• раз AB и BC - кас, то $AB = BC$ (из-за св-ва отрезков кас);

• $\triangle ABC$ - равнобедр.

• раз BA - кас, то: $\angle OAB = 90°$;

$\angle BHC = \angle OAB = 90°$;

$AO \parallel HC$ соотв, тогда:

$\angle OAC = \angle HCA = \alpha$

• $\triangle OAC$ - равнобедр ($AO = OC = R = 6$),

$\angle OAC = \angle OCA = \alpha$; $\angle AOC = 180° - 2\alpha$.

$\cos(180° - 2\alpha) = -\cos 2\alpha$.

по т. кос:

$AO^2 + OC^2 - 2AO \cdot OC \cdot \cos\angle AOC = AC^2$

$R^2 + R^2 + 2R^2 \cdot \cos 2\alpha = AC^2$

$2R^2(1 + \cos 2\alpha) = AC^2$

$\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha - 1$

$2R^2(1 + 2\sin^2\alpha - 1) = AC^2$

$4R^2 \cdot \sin^2\alpha = AC^2$; $AC = 2R \cdot \sin\alpha$

• $S_{\triangle ABD} = \frac{HD \cdot AB}{2}$; пусть $AB = x$; тогда:

$30 = HD \cdot x$; $HD = \frac{30}{x}$

• $\triangle ADC$; $\frac{AD}{\sin\alpha} = 2R$; $AD = 2R \cdot \sin\alpha$;

$\underline{AD = AC = 2R \cdot \sin\alpha}$ соотв; $\underline{AD = AC = 12\sin\alpha}$

$\angle DCA = \angle ADC = \alpha$,

• четырёхуг. $ABCO$ - впис ($\angle OAB = \angle OCB = 90°$);

$\angle ABC + \angle AOC = 180°$; $\angle ABC = 180° - 180° + 2\alpha$

$\angle ABC = 2\alpha$

• $\triangle AHD$: $\angle ADH = 180° - \alpha$;

• $\triangle ADC$ (по т. кос): $\cos(180° - 2\alpha) = -\cos 2\alpha$

$DC^2 = 4R^2 \cdot \sin^2\alpha + 4R^2 \cdot \sin^2\alpha + \cos 2\alpha \cdot 2R \cdot \sin\alpha \cdot 2R \cdot \sin\alpha$

$DC^2 = 8R^2 \cdot \sin^2\alpha + 8R^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos 2\alpha$; $= 8R^2\sin^2\alpha(1 + \cos 2\alpha)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$AC^2 = x^2 + 8x^2 \sin^2\alpha$; должно быть квадратом

$AC^2 = x^2(1 + 8\sin^2\alpha)$. $\quad 1 + 8\sin^2\alpha = p^2$

$8\sin^2\alpha = (p-1)(p+1)$.

$AC = xp$; $\quad \sin^2\alpha = \sqrt{\frac{(p-1)(p+1)}{8}}$

$P = 2x + x + x \cdot p = x(3+p) = 300$

$\cancel{x = 1}$ $\quad \cancel{x(3+p) = 300}$; $\quad 300 =$ $\quad 300 = 3 \cdot 2^2 \cdot 5^2$

$(p-1)(p+1) \vdots 8$ $\quad (\vdots 3; 2; 5)$

$x \cancel{\in}$

$\max \sin\alpha = 1$; $\min = -1$ (не подойдет).

если p - чёт, то

$0 \geq \sqrt{\frac{(p-1)(p+1)}{8}} \geq 1$ $\quad (p-1)(p+1) \not\vdots 2$.

соотв. p - нечёт.

по $\max$ $\cancel{(p-1)(p+1)}$:

$\cancel{(p-1)(p+1) <}$

$0 \leq \frac{(p-1)(p+1)}{8} \leq 1$;

$(p-1)(p+1) \geq 8$) $\quad p^2 - 1 \geq 8$

$p^2 \leq 9$

$(p-1)(p+1) \leq 0$.

$\cancel{p \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)}$

$\cancel{p^2 - 1 \leq 0;\ p^2 \geq 1}$.

$\cancel{p \in (-\infty; 3]}$

$\cancel{p \in [-1; 1]}$

$p^2 \geq 1$; $\quad p^2 \leq 9$;

$p \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$; $\quad p \in [-3; 3]$.

$p \in [-3; -1] \cup [1; 3]$.

брать будем целые. только. соотв, $p = -3; -2; -1; 1; 2; 3$.

~~4 варианта (-3; 3~~

5 вариантов (при $p = -3$; $P\, x \cdot (3+p) = 0$)

Ответ: 5 вариантов

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 9

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$DC^2 = 8R^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot 2\sin^2\alpha$

$DC^2 = 16R^2 \cdot \sin^4\alpha;$

$\underline{DC = 4R \cdot \sin^2\alpha}$

- $HC = 4R \cdot \sin^2\alpha + HD;$

- $\triangle AHC:$

$\sin\alpha = \frac{AH}{AC};$ $AC = 12 \cdot \sin\alpha.$

$\sin\alpha = \frac{AH}{12 \cdot \sin\alpha};$ $\underline{AH = 12 \cdot \sin^2\alpha.}$

- $\triangle AHC$ (по т. пифагора):

$AH^2 + HC^2 = AC^2;$

$144 \cdot \sin^4\alpha + \left(\frac{30}{x} + 4R\sin^2\alpha\right)^2 = 144\sin^2\alpha;$

$144 \cdot \sin^4\alpha + \frac{900}{x^2} + \frac{30}{x} \cdot 2 \cdot 4R \cdot \sin^2\alpha + 16R^2 \sin^4\alpha = 144 \cdot \sin^2\alpha$

$144 \cdot \sin^4\alpha + \frac{900}{x^2} + \frac{30}{x} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \sin^2\alpha + 16 \cdot 36\sin^4\alpha = 144\sin^2\alpha$

$\frac{900}{x^2} + \frac{1440 \cdot \sin^2\alpha}{x} + (144 + 36 \cdot 16)\sin^4\alpha - 144\sin^2\alpha = 0$

- $\triangle AHD:$

$\sin(180° - \alpha) = \frac{AH}{AD};$

$\sin\alpha = \frac{AH}{AD};$ $\underline{AH = 12 \cdot \sin^2\alpha}$ (+).

$\begin{cases} AH = 12 \cdot \sin^2\alpha \\ AC = 12 \cdot \sin\alpha \\ DC = 24 \cdot \sin^2\alpha \end{cases}$

- $\triangle ABC:$
$(\angle HAC = 90° - \alpha)$

$\frac{BC}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{AC}{\sin 2\alpha};$ $BC = x.$

$\frac{BC}{\cos\alpha} = \frac{AC}{2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha};$ $AC = 2\sin\alpha \cdot BC$

$AC = 2 \cdot \sin\alpha \cdot x;$

$\cancel{12\sin\alpha} = \cancel{2\sin\alpha} \cdot x;$ $x = 6.$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$AB = 6;$

$HD = \frac{30}{6} = 5;$

$CH = 5 + DC = 5 + 24 \cdot \sin^2\alpha$

$\cdot \triangle ABC$ (по т. кос):

$36 + 36 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos 2\alpha = AC^2;$

$36 \cdot 2 = 36 \cdot 2 \cdot \cos 2\alpha + 144 \cdot \sin^2\alpha; \; |:4$

$18 = 18 \cdot (2\sin^2\alpha - 1) + 36\sin^2\alpha \; |:2.$

$9 = 9(2\sin^2\alpha - 1) + 18\sin^2\alpha;$

$9 = 18\sin^2\alpha - 9 + 18\sin^2\alpha$

$18 = 2 \cdot 18 \cdot \sin^2\alpha.$

$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}; \; \alpha = 60^\circ;$ (соотв, т.к - на прод. AB

$HC = 5 + \cancel{24}^{12} \cdot \frac{1}{2} = 17;$

$\cdot \; \frac{AB}{HC} = \frac{6}{17}.$

Ответ: $\frac{6}{17}$.

$2R^2(1 + 2\cos^2\alpha - 1) = AC^2$

$4R^2 \cdot \cos^2\alpha = AC^2; \; AC = 2R \cdot \cos\alpha; = 12 \cdot \cos\alpha$

пусть: $S_{\triangle ABD} = \frac{HD \cdot AB}{2}; \quad 15 = \frac{HD \cdot x}{2}; \quad HD = \frac{30}{x}.$

$AB = x$

$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{AC}{12}; \\ \sin\alpha = \frac{AD}{12} \end{cases}$

$\cdot \triangle ADC: \quad \frac{AD}{\sin\alpha} = 2R;$

$AD = 2R \cdot \sin\alpha; \quad AD = 12 \cdot \sin\alpha;$

$\cdot$ четырёхуг. $ABCO$ - впис. $(\angle BAO = \angle BCO = 90^\circ)$.

$\angle ABC + \angle AOC = 180^\circ; \angle 2\alpha = \angle ABC$

$\cdot \triangle ABC:$

~~$\sin 2\alpha = \frac{HC}{BC}$~~; ~~$\cos 2\alpha =$~~

$\sin 2\alpha = \frac{HC}{BC}; \; HC = x \cdot \sin 2\alpha = x \cdot 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha;$

$HC = x \cdot 2 \cdot \frac{AC}{12} \cdot \frac{AD}{12}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$HC = x \cdot \frac{AC \cdot AD}{72}$$

• $\triangle AHC$:

$\sin 2 = \frac{AH}{AC}$,

$A \sin\alpha = \frac{AH}{12\sin\alpha}$, $AH = 12 \cdot \sin^2\alpha$;

• $\triangle AHC$ (по т. Пифагора):

$AH^2 + HC^2 = AC^2$;

$144 \cdot \sin^4\alpha + x^2 \cdot \sin^2 2\alpha = 144 \cdot \cos^2\alpha$

$\cancel{H}$ $x^2 \cdot \sin^2 2\alpha = 144(\cos^2\alpha - \sin^4\alpha)$

$\cancel{x^2 = 144(\cos\alpha - \sin^2\alpha)(\cos\alpha}$

$x = \cancel{144}\frac{12}{\sin 2\alpha} \cdot \sqrt{\cos^2\alpha - \sin^4\alpha}$

$AB = x = \frac{12}{\sin 2\alpha}\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^4\alpha}$

$HC = \cancel{x \cdot 2\sin\alpha}\ x \cdot \sin 2\alpha$

$HC = \frac{12}{\cancel{\sin 2\alpha}} \cdot \sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} \cdot \cancel{\sin 2\alpha}$

$\frac{AB}{HC} = \frac{1}{\sin 2\alpha}$ $\cancel{\sin 2\alpha}$

$\cancel{\frac{AB}{HC} = A}$

• $\triangle ABC$:

$\frac{AC}{\sin 2\alpha} = \frac{AB}{\sin(90° - \alpha)}$; $\frac{AC}{2\sin\alpha \cancel{\cos\alpha}} = \frac{AB}{\cos\alpha}$

$\cancel{AB}$ $AB = \frac{AC}{2\sin\alpha}$.

$AB = \frac{\cancel{12}^{6} \cdot \cos\alpha}{\cancel{2} \cdot \sin\alpha}$, $AB = 6 \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

~~12~~

$$AB=\frac{12}{\sin 2\alpha}\cdot\sqrt{\cos^2\alpha\left(1-\frac{\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha}\right)}$$

$$AB=\frac{\cancel{12}^{6}}{\cancel{2}\cdot\sin\alpha}\cdot\left(\sqrt{\cancel{co}\,1-\frac{\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha}}\right)$$

$$\frac{6}{\cancel{\sin\alpha}}\sqrt{1-\frac{\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha}}=6\cdot\frac{\cos\alpha}{\cancel{\sin\alpha}}\qquad \cos\alpha>0$$

$$1-\frac{\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha}=\cos^2\alpha;$$

$$1=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha,$$

$$1=\underbrace{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2}_{1}-2\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha;$$

$1 \quad 1$

$$\cancel{2\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=0}$$

$\cancel{1=\sin^4\alpha+}$ $\qquad \sin\alpha\cdot\cos\alpha=0;$

т.е. либо $\sin\alpha=0$; $\alpha=180^\circ$ (невозм.)

либо $\cos\alpha=0$ $\quad \alpha=90^\circ$ (невозм).

$\Delta ABC:$

$$\frac{AC}{\sin 2\alpha}=\frac{x}{\cos\alpha};$$

$$\frac{AC}{2\cdot\sin\alpha\cdot\cancel{\cos\alpha}}=\frac{x}{\cancel{\cos\alpha}};\quad AC=2\sin\alpha\cdot x=12\cdot\cos\alpha;$$

$$2\cdot\sin\alpha\cdot x=\cancel{12}^{6}\cdot\cos\alpha;$$

$$x=6\,ctg\,\alpha$$

$$\frac{\cancel{12}^{6}}{\cancel{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}}\cdot\sqrt{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}=6\cdot\frac{\cos\alpha}{\cancel{\sin\alpha}}$$

$$\sqrt{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}=\cos^2\alpha;\quad \cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos^4\alpha.$$

$$\cos^2\alpha=\underbrace{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}_{\cancel{1}},$$

$$\cos^2\alpha(\cos^2\alpha-1)+\sin^4\alpha=0;$$

$$-\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha+\sin^4\alpha=0;\ )\ :\sin^2\alpha.$$

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1\ (\checkmark).$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\frac{\cancel{x^2-2x+5-4|x-1|}}{\cancel{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}} \le 0$$

$x^2-2x+5-4x+4=$

$=x^2-6x+5$

$4(2-1)$

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|} \le 0$$

$$\frac{4-4+5-4}{4\cdot 4-12\cdot 2+2} \le 0.$$

		0		1		3	
$\lvert x-1\rvert$	$-$		$-$		$+$		$+$
$\lvert x\rvert$	$-$		$+$		$+$		$+$
$\lvert x-3\rvert$	$-$		$-$		$-$		$+$

$\frac{1+}{-}$

$(-x)(-x+3)$:

$:+(x)$

$x\le 0.$

$\frac{-1\ -3}{-3}$

$x.$

$$\frac{x^2-2x+5+4(x-1)}{\cancel{x}(x-3)\cdot 5} \le 0.$$

$2y;\ 18.$

$$\frac{x^2-2x+5+4x-4}{x(x-3)\cdot 5} \le 0.$$

$\ne 0.$

$$\frac{x^2+2x+1}{x(x-3)\cdot 5} \le 0 \ ?$$

$$\frac{(x+1)^2}{x(x-3)\cdot 5} \le 0$$

$x(x-3)\cdot 5 \cancel{\le} 0$

$1+2+5-8$

$\varnothing$

$+\quad 0\quad -\quad 3\quad +$

$x\in(0;3).$ (нет).

$\frac{6x}{30}=$

$x^2-2x+5-4x+4=$

$=x^2-6x+5=$

$=(x-1)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\alpha = 2\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$

$\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha = 1$ $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cancel{\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha - 1}$ $\cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha$ $2\cos^2\alpha - 1$

$\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha - 1$

$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos^2\alpha + 4\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha = 1$

$1 - 2\sin^2\alpha$

$\cancel{4\sin^2}$

$\angle ABC = \alpha$

$AO \parallel HC$

AC - басн

$12 \cdot 12 = 144$

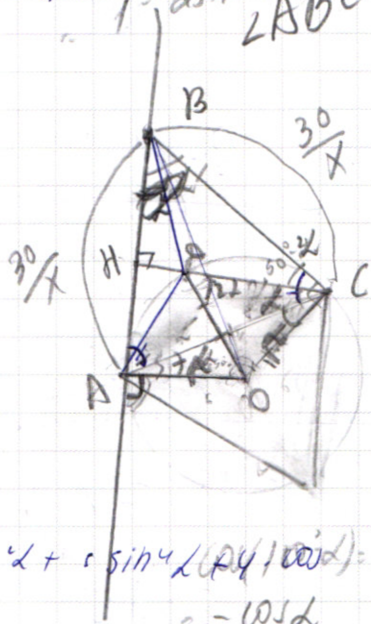
$4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 144$

$\frac{30}{x}$

$AB = BC$

$\frac{AB}{CH}$ - ?

$S_{\triangle ABD} = 15$



$\triangle AKO \sim \triangle CHA$

$\frac{AK}{CH} = \frac{KO}{HA} = \frac{AO}{AC}$

$r = 6$

$\frac{AC}{2 \cdot CH} = \frac{6}{AC}$

$\cancel{4\sin^4\alpha} \quad \cancel{4\sin^2\alpha}$

$\cos^4\alpha - 2\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha + \sin^4\alpha (\ldots)$

$= -\cos\alpha$

$(\cos^2\alpha + 1)$

$S_{\triangle ABD} = \frac{DH \cdot AB}{2}$

$\boxed{AC^2 = 12 \cdot CH}$

$AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\alpha = AC^2$

$S_{\triangle ABC} = \frac{CH \cdot AB}{2}$

$\sin\angle B = \frac{AH}{AC}$

$AO^2 + OC^2 + 2 \cdot AO \cdot OC \cdot \cos\alpha = AC^2$

$15 = \frac{DH \cdot AB}{2}$

$30 = DH \cdot AB$

$\triangle ABK \sim \triangle$

$2AB^2 - 2AB^2 \cdot \cos\alpha = 2AO^2 + 2AO^2 \cos\alpha$

$AB = \frac{30}{x}$

$\angle ABK = \angle KBC = \alpha$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 1 - 1 = 1$

$\angle AOK = 90^\circ - \alpha$

$2(AB^2 - AO^2) = 2(AO^2 + AB^2)\cos\alpha$

$2\cos^2\alpha - 1$

$BO^2 = \frac{900}{x^2} + 36$

$\beta = \alpha$

$1 - 2\sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha$

$BO^2 = \frac{900 + 36x^2}{x^2}$

$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\frac{6}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin 2\alpha}$

$1 - 2(1 + \sin^2\alpha)$

$BO = \sqrt{900 + 36x^2}$

$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{6x}{30}}$

$= 1 - 2 + 2\sin^2\alpha$, $2\sin^2\alpha - 1$

$\frac{AC}{\sin 2\alpha} \quad \frac{AB}{\cos 2\alpha}$ $2\cos^2\alpha$ $1 - \cos^2\alpha - 1 + \sin^2\alpha$ $\frac{AB}{\cos 2\alpha}$

$= 2\,\cancel{\sin^2\alpha}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AH}{HC}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

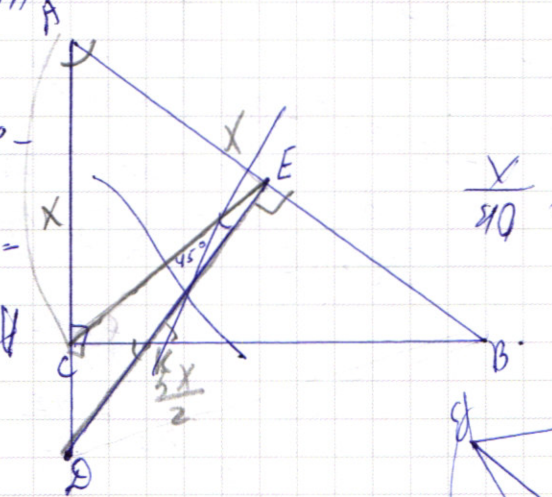
$x^2+50+10x=29$

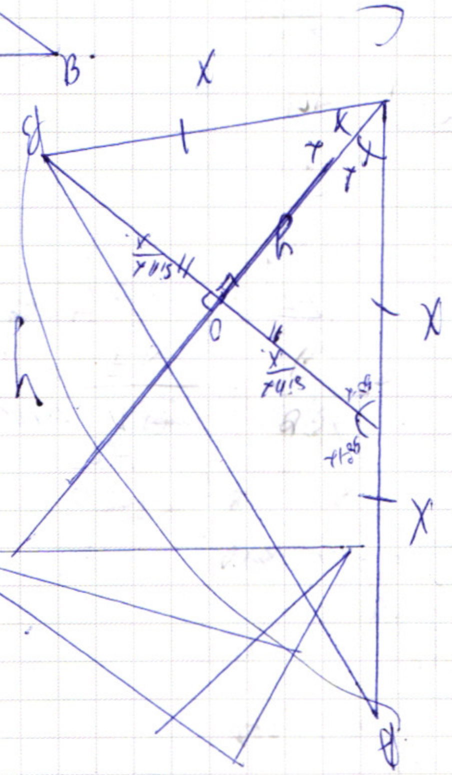
$x^2+10x+21=0$

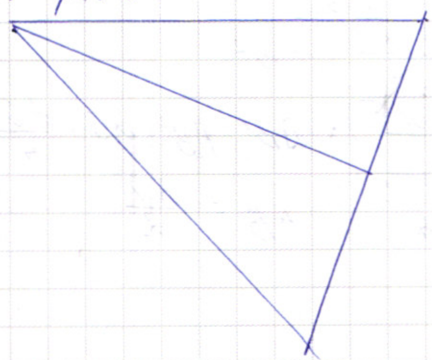
$D_1=25-21=4;\quad x_{1,2}=-5\pm2;$

$x_1=-3;\quad x_2=-7$

соотв, другой корень







$x^2+4x-21=0$

$x^2+8+4x=29$

$\frac{x^2}{4}+2+x=\frac{29}{4}\,|\cdot4$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

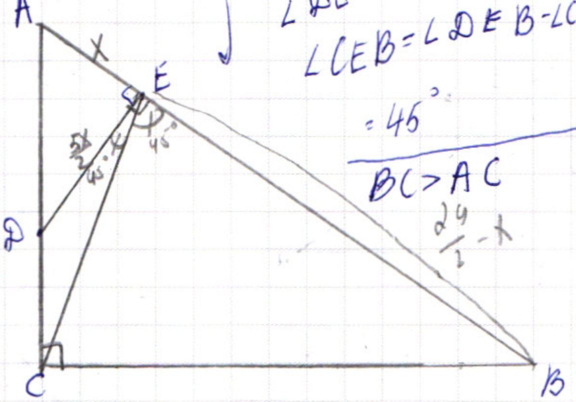
№5

Дано:
$\triangle ABC$
$\angle C = 90^\circ$
т. D - на AC
т. E - на AB
$AC = \sqrt{29}$
$BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$
$\angle CED = 45^\circ$

$\frac{AD}{AC}$ - ?

$S_{\triangle AED}$ - ?

Решение:



$\angle CED = 45^\circ$
$\angle DEB = 90^\circ$,
$\angle CEB = \angle DEB - \angle CED$
$= 45^\circ$

$BC > AC$

• рассмотрим $\triangle AED$ и $\triangle ACB$:

$\triangle AED \sim \triangle ACB$ (по 3-ему признаку подобия) (все углы равны: $\angle A$ - общий, $\angle AED = \angle ACB = 90^\circ$)

$\angle ADE = \angle ABC$ соотв (кумма углов в $\triangle = 180^\circ$))

$k_3 = \frac{AE}{AC} = \frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AB}$,

из условия:

$\frac{AE}{\sqrt{29}} = \frac{ED \cdot 2}{5\sqrt{29}}$, $5AE = 2ED$. Пусть $AE = x$,

$ED = \frac{5AE}{2} = \frac{5x}{2}$

• рассмотрим $\triangle ABC$

$\sin\angle B = \frac{AC}{AB}$, $\triangle ABC$ - прямоуг, сост. по т. Пифагора.

$BC^2 + AC^2 = AB^2$

$29 + \frac{25 \cdot 29}{4} = AB^2$,

$29\left(1 + \frac{25}{4}\right) = AB^2$, $AB^2 = 29 \cdot \frac{29}{4}$,

$AB = \sqrt{\frac{29^2}{2^2}}$, $AB = \frac{29}{2}$

$\cos(90^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ$
$\angle AEC$

$\sin\angle B = \frac{\sqrt{29} \cdot 2}{29} = \frac{2}{\sqrt{29}}$

$\frac{5\sqrt{29}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{29}$ • по т. синусов для $\triangle ECB$:

$\frac{BC}{\sin 45^\circ} = \frac{EC}{\sin\angle B}$, $EC = \frac{BC \cdot \sin\angle B}{\sin 45^\circ}$

$EC = \frac{5\sqrt{29}}{2} \cdot \frac{2 \cdot \cancel{2}}{\sqrt{29}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$

• по т. косинусов для $\triangle AEC$:

$AE^2 + EC^2 - 2 \cdot AE \cdot EC \cdot \overset{\cos 135^\circ}{\cos\angle AEC} = AC^2$

$x^2 + 25 \cdot 2 + 2 \cdot x \cdot 5\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ = \cancel{AC^2}\ 29$

☑ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$x^2 + 25\cdot 2 + 2\cdot x \cdot 5 \cancel{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 25$

$\cos 90^\circ \cdot \sin 45^\circ - \sin 90^\circ \cos 45^\circ =$

$= -1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$-7; -3$

$(x+7)(x+3) =$

$AD \cdot AC = AE \cdot AB$

$x^2+10x+21$

$x = \sqrt{25} =$

$x^2 + \cancel{5x}\ \frac{25x^2}{4} = AD^2$

$\frac{29x^2}{4} = AD^2$

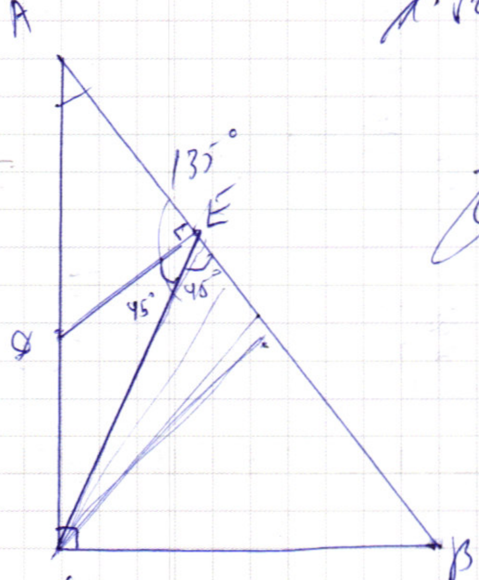
$AD = \frac{x}{2}\cdot\sqrt{29}$

$\sin\angle B = \frac{x\cdot 2}{x\cdot\sqrt{29}}$

$x^2-2x+5 = 4x-4$

$x^2-2x+5 = 4|x-1|$

$\sqrt{5}$



$\frac{5\sqrt{25}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{25}} = \frac{A}{\sqrt{2}}$

$5\sqrt{2}$

$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AB}$

$x^2+50+10x=25$

$2\cdot x\cdot 5\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x^2+10x+21=0$

$D = 25-21 = 4;\ x_{1,2} = -5\pm 2;\ x_1 = -3$

$x_2 =$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

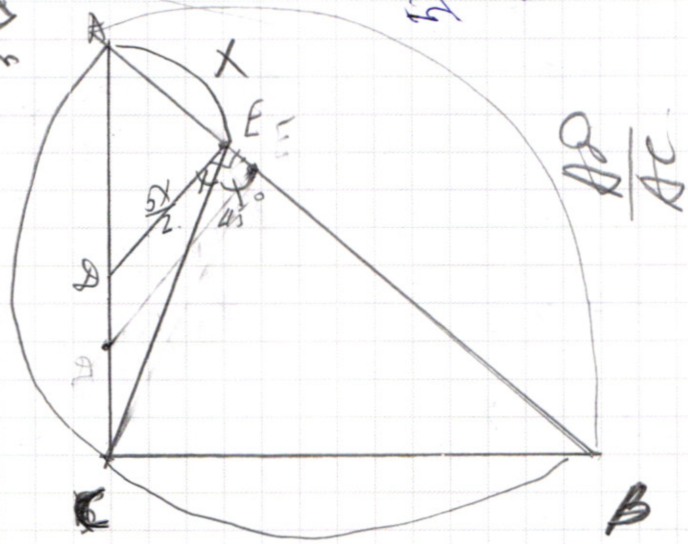
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{DE\cdot 2}{5\sqrt{3}} = \frac{AD}{\sqrt{3}}$ $DE\cdot 2 = AD\cdot 5$ $DE = x$ $DE = \frac{5x}{2}$



$\frac{AD}{AC}$

$\triangle BDK \sim \triangle BCA$, $\sin\angle B = \frac{KD}{BK}$

$25 - \frac{21}{16}$ $(x+3)(x-3)(x+7) = x^2+4x-21$

$\angle C = 50°$

$AD \mid AC$ $\frac{DK}{CA} = \frac{BK}{BA}$ $BK = \frac{(29-2x)\sqrt{29}}{10}$

$S_{\triangle AED}$

$AC = \sqrt{29}$

$BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$

$k = \frac{BD}{BC}$ $\frac{BK\cdot 2}{5\sqrt{29}}$

$\angle CED = 45°$

$\angle AEC = 135°$

$\triangle ADE \sim \triangle ACB$

$\triangle AED \sim ACB$

$\frac{AE}{AC} = \frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AB}$

$\frac{DE}{BC}$ $\frac{DE}{AB}$ $\frac{AD}{AC}$

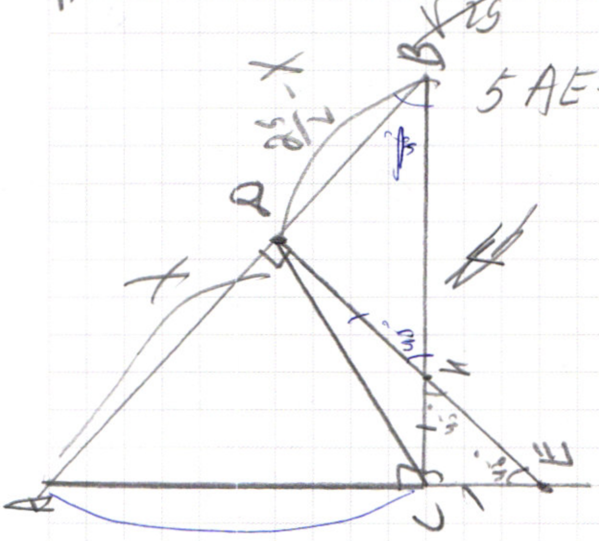
$\sin\angle EBC = \frac{AC}{AB}$

$\frac{AE}{\sqrt{29}} = \frac{ED\cdot 2}{5\sqrt{29}}$

$29 + \frac{25\cdot 29}{4} = AB^2$

$\frac{(29-2x)}{2\cdot 5\sqrt{29}} =$

$5AE = ED\cdot 2$, $AE = x$, $ED = \frac{5x}{2}$



$\frac{BC}{\sin 45°} = \frac{EC}{\sin\angle EBC}$, $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{DK}{AC}$, $DK = \frac{29-2x}{5}$

$\frac{BD}{BC} = \frac{DK}{AC}$

$\frac{29^2}{4} - 29$

$= 29\left(\frac{29}{4} - 1\right) = 29\cdot\frac{25}{4} = \frac{\sqrt{29}\cdot 5}{2}$

$\frac{(29-2x)}{2\cdot 5\sqrt{29}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3x+2y+6-3x-2y>6$

$6>6$ (X).

$-3x-2y-6+3x+2y>6$ (X).

$-3x+2y-6+3x+2y>6$ ✓

$4y>12;$ $y>3$

$-3x-2y+6-3x-2y>6$

$6-6x-4y>6;$ $3-3x-2y>3$

$3x+2y<0;$

$y<\frac{-3x}{2}$

$3x-2y-6+3x+2y>6$

$6x-6>6$

$6x>12;$ $x>2$ ✓

$-3x+\cancel{2y}+6-3x-\cancel{2y}>6$ ✓

$-6x>0;$ $x<0$

~~$-3x+2y+6-3x-2y>6$~~

~~$-6x>0;$ $x<0$~~

$3x+2y-6+3x+2y>6$

$6x+4y>12;$ $3x+2y>6$

$y>\frac{6-3x}{2}$ ✓

$3x-2y+6-3x-2y>6$ ✓

$-4y>0;$ $y<0$

$y=\frac{3}{2}\cdot 2\cdot y$

$-\frac{3x}{2},$ $x=2$

$x=4$

$\frac{3x}{2}$ $-\frac{3\cdot 4}{2}=6$

$x=2$

$x=$

$x=1,$

$y=-3$

$x=0$

$y=-2$

$\frac{6-3x}{2},$ $\frac{6+6}{2}=6$

$x=2$

$y=-2$

$\frac{6+6}{2}=6$

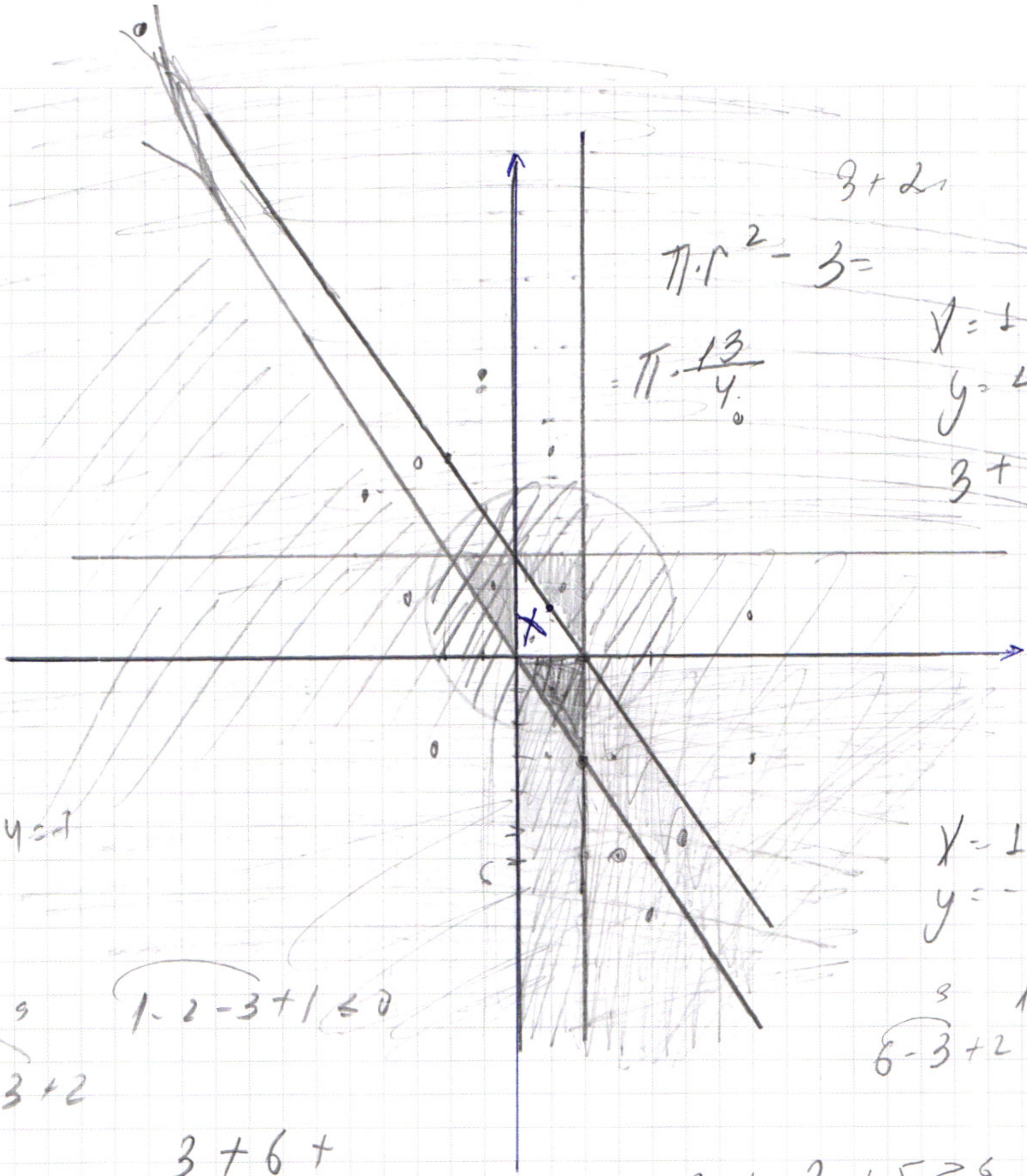
$\frac{6-3x}{2},$ $x=c$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



3+2

$\pi \cdot r^2 - 3 =$

$= \pi \cdot \frac{13}{4}$

$x = 1$
$y = 2$

3 + 4

$x = -1$
$y = 2$

12 + 2

$x = 4$
$y = -1$

$x = 1$ $y = -1$ $x = 4$ $y = 1$

3 + 4 = 7

1 - 2 - 3 + 1 ≤ 0

6 + 3 + 2

$x = 1$
6 - 3 + 2 $y = -3$

3 + 6 +

3 + 2 + 5 > 6

$x = -1$
$y = -1$

$x = 3$
$y = -6$

$x = 1, y = 1$

3 + 2

9 + 12

6 - 9 + 6

6 - 3 - 2

$\sqrt{13} \approx 3,6$

12 - 9 = 3

3 + 2 + 1 > 6

$\frac{3,6}{2}$ = 1,75

$\frac{3}{2} + 2 \cdot y$

9 + 6 + β

$x = 3, y = -3$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 3y + \frac{9}{4} \le \frac{9}{4} + 1$ 1,5 $x = 1$

$(x-1)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 \le \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$ $x^2 - 2x - 3y + y^2 \le 0$

$x = 2$; x 1,2 ≈ 1,75

3,6 | 2

$y = 1^2, y = ?$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{2x}$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$\cancel{3y+x^2-2x=}$

$(y-2x)\,xy=$

$=2y^2-2x^2y$

$2y=9-x^2$

$2y=(3-x)(3+x)$ $\quad y=$

$\cancel{2y-(3-x)(3+x)=0}$

$y-2x\geq 0$ $\quad \underline{2y\geq 0}$ $\quad +36=x^2$

$(y-2x)^2=(\sqrt{xy})^2$ $\quad 2x\leq 9$ $\quad y\geq 2x$

$y^2-2x\cdot y\cdot 2+4x^2=xy$

$y^2-4xy+4x^2=xy$

$y^2-5xy+4x^2=0 \,/ \,x^2$ $\quad t=\frac{y}{x}$ $\quad \cancel{2y}$ $\quad 2y=(3-x)(3+x)$

$t^2-5t+4=0$

$D=25-16=9$

$t_{1,2}=\frac{5\pm 3}{2}$; $\quad t_1=4$, $t_2=1$

1) $4x=y$ (V)

2) $x=y$ (X)

$2x=9-x^2$

$x^2+2x-9=0$

$D=1+36=37$

$\cancel{x_{1,2}=1\pm\sqrt{37}}$

$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{37}$

$\cancel{2y=(3)}$ $\quad 2y=9-x^2$; $\quad 8x=9-x^2$;

$x^2+8x-9=0$

$D=16+9=25$

$x_{1,2}=-4\pm 5$; $\quad \cancel{x_1}$ $\quad x_1=-9$, $x_2=1$

$x=-9$, $y=-36$

$x=1$, $y=4$

$2\cdot 2\cdot 2=4$ $\quad 2\cdot 2\cdot 2=8$

+	+	+
−	−	−
−	+	−
−	−	+
+	−	−
−	+	+
+	+	−
+	−	+

$(x+(1+\sqrt{37}))(x+(\sqrt{37}-1))=$

$=x^2+(\sqrt{37}-1)x+x(1+\sqrt{37})+$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$(x+(1+\sqrt{10}))(x+(1-\sqrt{10}))=$ $\quad (x+(1+\sqrt{10}))(x+(\sqrt{10}+1))=$

$=x^2-9+x(1+\sqrt{10}+1-\sqrt{10})=$ $\quad \cancel{x^2+(\sqrt{10}-1)x+x(1+\sqrt{10})+9}=$

$=x^2+2x-9\ (\checkmark)$ $\quad \cancel{=x^2}$ $\quad \sqrt{10}-1$

$\cdot(\sqrt{10}\cancel{-1}+1+\sqrt{10}$

$\sqrt{10}-1\approx 2$ $\quad x\approx 2$ $\quad y\approx 2$

$-\sqrt{10}-1=-4$

$2-4<0.$ $\quad y=-4.$

$-4+8\leq 0.$

$x\cdot 4\cdot 2$

$y=-36$

$-36+18<0.$

$\cancel{-36+18<0}$

$y=-36$

$8+1=9$

$y=4$

$4-2=2$

$\sqrt{4}$

$x-2x\geq 0$

$-x\geq 0$

$x\leq 0.$ $\quad y\leq 0.$

$(t-1)(t-4)=$

$=t^2-t-4t+4=$

$=t^2-5t+4$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)