МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases} \Rightarrow \text{ОДЗ: } x-2y\geq 0$$

$$\begin{cases} x^2-4xy+4y^2=xy \\ x=5-y^2 \end{cases}$$

$$x^2-5xy+4y^2=0$$

$$(5-y^2)^2-5(5-y^2)y+4y^2=0$$

$$25-10y^2+y^4-25y+5y^3+4y^2=0$$

$$y^4+5y^3-6y^2-25y+25=0$$

$$(y-1)(y^3+6y^2-25)=0$$

$$(y-1)(y^2(y+5)+(y^2-25))=0$$

$$(y-1)(y^2(y+5)+(y-5)(y+5))=0$$

$$(y-1)(y+5)(y^2+y-5)=0$$

$y_1=1$

$y_2=-5$

$y_3=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$

$y_4=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$

$$x_1=5-y_1^2=4$$

$$x_2=5-y_2^2=-20$$

$$x_3=5-(y_3)^2=5-\left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)^2=5-\frac{1-2\sqrt{21}+21}{4}=5-\frac{11-\sqrt{21}}{2}=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$$

$$x_4=5-(y_4)^2=5-\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)^2=5-\frac{1+2\sqrt{21}+21}{4}=5-\frac{11+\sqrt{21}}{2}=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$$

Проверим, подходят ли корни по ОДЗ:

$x_1-2y_1=2>0$

$x_2-2y_2=-10<0$, не подходят

$x_3=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}>\frac{-1+\sqrt{16}}{2}=\frac{3}{2}>0$

Заметим, что $x_3=y_3$, $x_3-2y_3=-x_3$

$x_3>0 \Rightarrow -x_3<0 \Rightarrow$ не подходит по ОДЗ

$y_4=x_4$, $x_4=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$, числитель <0, знаменатель >0

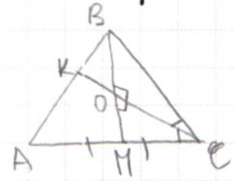
$\Rightarrow x_4<0$. $x_4-2y_4=-x_4>0$

Ответ: $\left\{(4;1); \left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}; \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)\right\}$.

№2

Очевидно, что биссектриса не м.б. перпендикулярна медиане, выходящей из того же угла, что и эта биссектриса.

Рассмотрим биссектрису (CK), ⊥ медиане (BM):

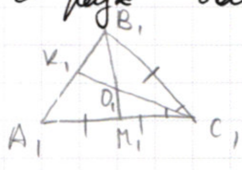


∃ O - точка пересеч. BM и CK.

Тогда $\triangle MOC = \triangle BOC$ по 2 углам и стороне между ними (OC - общая, $\angle BOC = \angle MOC$, т.к. $BM \perp CK$, $\angle BCO = \angle OCM$ по опр. биссектрисы)

Тогда $BC = MC$, $BC = \frac{1}{2} AC$ (т.к. $AM = MC$ по опр. медианы)

С другой стороны, рассмотрим треугольник, в кот. одна сторона в 2 раза больше другой.



$A_1C_1 = 2B_1C_1$. Проведем медиану B_1M_1 и биссектрису C_1K_1, и обозначим их пересеч. за т. O_1.

$\triangle B_1C_1O_1 = \triangle M_1C_1O_1$ (2 ст. и угол между ними: $\angle B_1C_1O_1 = \angle O_1C_1M_1$, $B_1C_1 = M_1C_1$, O_1C_1 - общая) $\Rightarrow \angle B_1O_1C_1 = \angle C_1O_1M_1$.

$\angle B_1O_1C_1 + \angle C_1O_1M_1 = 180^\circ \Rightarrow \angle B_1O_1C_1 = \angle C_1O_1M_1 = 90^\circ$
$\Rightarrow B_1M_1 \perp C_1K_1$

Значит, биссектриса перпендикулярна медиане тогда и только тогда, когда одна сторона △-ка в 2 раза больше другой.

Тогда стороны можно выразить как $y, x, 2x$.

Нам нужны целые x и y, причем $y + 2x + x = y + 3x = 600$.

По основному нер-ву △-ка: $y < x + 2x = 3x$, $2x < x + y$ ($x < y$), $x < 2x + y$ (но это следует из предыдущего, т.к. представимо в виде $0 < x + y$, а $2x > 0$).

$y < 3x$, $x < y$, $y + 3x = 600$

$y < 300$, т.к. иначе $3x > y \geq 300$, $3x + y > 600$. Так же $y > 150$, иначе $x < y \leq 150$, $3x + y < 600$.

$x = \frac{600 - y}{3}$, т.к. $x \in \mathbb{Z}$, $600 - y \,\vdots\, 3 \Rightarrow y \,\vdots\, 3$.

для любого y, $\vdots 3$, > 150, < 300 можно строго найти две оставшиеся стороны $(x, 2x)$. Подходящих под условие значений y: $(300 - 150) : 3 - 1 = 49$

от 151 до 300, 300 не подходит
делящихся на 3

Ответ: 49 треугольников

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

1) При $x \geq 3$:

$$\frac{x^2-6x+10-2(x-3)}{2x^2-4x+x(x-2)} \leq 0$$

$$\frac{x^2-8x+16}{3x^2-6x} \leq 0$$

$$\frac{(x-4)^2}{3x(x-2)} \leq 0$$

Числитель всегда ≥ 0, значит, для выполнения нерав-ва знаменатель должен быть < 0 или числитель $= 0$. Если $(x-4)^2=0, x=4$. Пусть $3x(x-2)<0$ но мы рассматриваем $x \geq 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{3x}_{>0}\underbrace{(x-2)}_{>0} > 0$. Значит, при $x \geq 3$ ~~решение~~ решение одно: $x=4$.

2) При $x \in [2;3)$:

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x(x-2)} \leq 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \leq 0$$

аналогично п.1), числитель $\geq 0 \Rightarrow$ либо $(x-2)^2=0, x=2$, либо $3x(x-2)<0$ (знаменатель не м.б. $=0$), но $3x(x-2) \geq 0$, т.к. рассматриваем $x \geq 2$.

3) при $x \in [0;2)$:

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x(2-x)} \leq 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{x^2-2x} \leq 0; \quad \frac{(x-2)^2}{x^2-2x} \leq 0;$$

$$\begin{cases} x \neq 2;\ x \neq 0 \\ \frac{x-2}{x} \leq 0 \end{cases}$$

При рассматриваемых x, числитель всегда <0, а знаменатель >0 (кроме $x \neq 0$). $\Rightarrow x \in (0;2)$ подходит

№7

$f(p)=p$, $f(ab)=f(a)+f(b)$. Возьмем простые числа p_1 и p_2.

$f(p_1 \cdot p_2) = f(p_1)+f(p_2) = p_1+p_2$.

Докажем по индукции, что для любого числа $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = \Sigma$ его простых множителей (если в разложении число p_i встречается k раз, то и в сумме встретится k раз).

Пусть n – кол-во множителей в разлож. числа на простые множители (столько же, учитывая степени). Число можно представить в виде $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n$ (не обязательно все множители различны)

Б: $n=2$. доказано выше.

П: Пусть доказали для n. рассмотрим $n+1$:

$$f(x) = f(p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n \cdot p_{n+1}) = f(\underbrace{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n}_{p_1+p_2+\ldots+p_n}) \cdot f(p_{n+1}) = p_1+p_2+\ldots+p_{n+1}$$

число, в разлож. кот. $n+1$ простой множитель; $p_1+p_2+\ldots+p_n$ по предположению.

ч.т.д.

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) \cdot f\left(\frac{1}{y}\right).$$

т.к. x – натуральное, если $x \neq 1$, $f(x) > 0$, т.к. является Σ своих простых ~~делител~~ множителей.

Рассмотрим $f(1)$. Мы знаем, что $f(1 \cdot a) = f(1) + f(a) \Rightarrow f(1) = 0$.

Тогда $f\left(y \cdot \frac{1}{y}\right) = f(1) = 0$. Так же $f\left(y \cdot \frac{1}{y}\right) = f(y) \cdot f\left(\frac{1}{y}\right) = 0$

Аналогично $f(x)$, $f(y) > 0$ если $y > 1$. Тогда $f\left(\frac{1}{y}\right) = 0$, $f\left(\frac{x}{y}\right) > 0$
$f(x) \cdot 0$

Значит, $f\left(\frac{x}{y}\right)$ м.б. <0 только если $y=1$. Тогда

$f\left(\frac{1}{y}\right) = f(1) = 0$, $f\left(\frac{x}{y}\right)$ все равно >0

Ответ: таких пар не существует

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 (продолжение)

4) при $x<0$:

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x(x-2)} \leq 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \leq 0$$

$x \neq 2,\ x \neq 0$

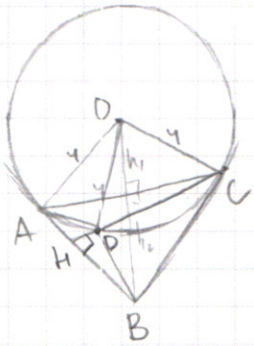
$$\frac{x-2}{3x} \leq 0$$

При рассматриваемых x, $x-2<0$, $3x<0 \rightarrow \frac{x-2}{3x} < 0$, реш-й нет

~~Ответ~~ Из всех 4х пунктов видим, что подходят $x=4$, $x=2$, $x \in (0;2)$

Ответ: $x \in (0;2] \cup \{4\}$

№4



$S_{ADB} = \frac{DH\cdot AB}{2} = 6$

$DH\cdot AB = 12$

$\angle OAB = \angle OCB = 90^\circ$ (т.к. AB и BC – касательные).

$S_{AOB} = \frac{AB\cdot AO}{2} = 2AB$

$\triangle AOB = \triangle OCB$ (OB – общ., $\angle OAB = \angle OCB = 90^\circ$, $AO = OC = R = 4$, равны как $\triangle$ с 2мя равными сторонами).

$\Rightarrow$ ~~CB=AB~~, $S_{OCB} = S_{AOB} = 2AB$.

$S_{AOCB} = S_{OCB} + S_{AOB} = 4AB$

$S_{AOCB} = S_{AOC} + S_{ACB} = \frac{AC\cdot h_1}{2} + \frac{AC\cdot h_2}{2} = \frac{AC\cdot DB}{2}$

$8AB = AC\cdot DB$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

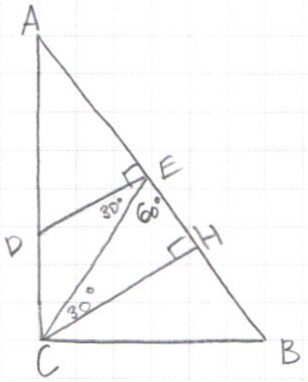
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



По т. Пифагора $AC^2+CB^2=AB^2$

$AB=\sqrt{AC^2+\cancel{A}CB^2}=\sqrt{7+\frac{28}{3}}=\sqrt{\frac{49}{3}}=\frac{7}{\sqrt{3}}$

Проведем высоту CH.

Заметим, что $\triangle CHB \sim \triangle ACB$ ($\angle CHB=\angle ACB=90°$, $\angle ABC$ – общий, 2 угла совпадают $\to$ по Σ углов $\triangle$ совпадает и третий). $\Rightarrow \frac{CB}{AB}=k_1=2\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}:\frac{7}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{7}}{\cancel{\sqrt{3}}7}=\frac{2}{\sqrt{7}}$;

коэфф. подобия CHB и ACB

$\frac{CH}{AC}=k_1$, $CH=AC\cdot k_1=\sqrt{7}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}=2$

$\frac{BH}{CB}=k_1$, $BH=CB\cdot k_1=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$

Заметим, что ~~раз~~ $\angle CED=30°$ (по усл), а $\angle BEH=90°$ ($DE\perp AB$), то $\angle CEH=60°$. Так же $\angle CHA=90°$ (CH-высота)

$\Rightarrow \frac{CH}{CE}=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$CE=\frac{CH}{\sin 60°}=\frac{2\cdot 2}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$

$\frac{HE}{EC}=\cos 60°=\frac{1}{2}$, $HE=EC\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$EB=EH+HB=\frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{6}{\sqrt{3}}$

$AE=AB-EB=\frac{7}{\sqrt{3}}-\frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\triangle AED \sim \triangle ACB$ ($\angle AED=\angle ACB=90°$, $\angle BAC$ – общий, по Σ углов $\triangle$ $\angle ADE=\angle ABC$). $k_2=\frac{AE}{AC}=\frac{1}{\sqrt{3}}:\sqrt{7}=\frac{1}{\sqrt{21}}$

коэфф. подобия AED и ACB

$\frac{AD}{AB}=k_2$; $AD=AB\cdot k_2=\frac{7}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{21}}=\frac{7}{3\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

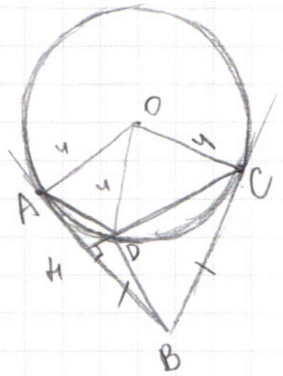
$\frac{AD}{AC}=\frac{\sqrt{7}}{3}:\sqrt{7}=\frac{1}{3}$

$\frac{DE}{BC}=k_2$; $DE=BC\cdot k_2=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{21}}=\frac{2}{3}$

$S_{AED}=\frac{AE\cdot DE}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{3}:2=\frac{1}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}$

Ответ: $\frac{AD}{AC}=\frac{1}{3}$; $S_{AED}=\frac{\sqrt{3}}{9}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$S_{ABD} = 6$ $R = 4$

$S_{AOCB} = 4AB$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases} \qquad x=5-y^2$$

$$\cancel{5-y^2-2y=\sqrt{(5-y^2)y}}$$

$$\cancel{y^2+2y-5=-\sqrt{(5-y^2)y}}$$

$$f(x)=\sqrt{g(x)}$$

$$x^2-4xy+4y^2=xy$$

$$x^2-5xy+4y^2=0$$

$$(5-y^2)^2-5(5-y^2)y+4y^2=0$$

$$25-10y^2+y^4-25y+5y^3+4y^2=0$$

$$25-6y^2+y^4+5y^3-25y=0$$

$$y^4+5y^3-6y^2-25y+25=0$$

	1	5	-6	-25	25
1	1	6	0	-25	0

$$(y-1)(y^3+6y^2-25)=0$$

$$(y-1)\left(y^2(y+5)+(y+5)(y-5)\right)=0$$

$$(y-1)(y+5)(y^2+y-5)=0$$

$$(y-1)(y+5)\left(y-\frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)\left(y-\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)=0$$

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{1+20}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$$

$$\left[\begin{aligned} &y_1=1 \\ &y_2=-5 \\ &y_3=\frac{-1+\sqrt{21}}{2} \\ &y_4=\frac{-1-\sqrt{21}}{2} \end{aligned}\right.$$

$$x_1=5-1=4$$

$$x_2=5-25=-20$$

$$x_3=5-\left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)^2=$$

$$=5-\frac{(1-\sqrt{21})^2}{4}=$$

$$=5-\frac{1-2\sqrt{21}+21}{4}=$$

$$=5-\frac{11-\sqrt{21}}{2}=$$

$$=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$$

$$x_4=5-\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)^2=$$

$$=5-\frac{1+2\sqrt{21}+21}{4}=$$

$$=5-\frac{11+\sqrt{21}}{2}=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$$

$$\cancel{=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}+\frac{1+2\sqrt{21}+21}{4}}=\frac{-1-\sqrt{21}+11+\sqrt{21}}{2}$$

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\qquad$ $f(1\cdot b) = f(1) + f(b) \to f(1) = 0$

$f(p) = p$

$f(p_1 \cdot p_2) = p_1 + p_2$

$f(p_1 \cdot p_2 \cdot p_3) = f((p_1 \cdot p_2) \cdot p_3) = f(p_1 \cdot p_2) + f(p_3) = \cancel{f(p_3)} = p_1 + p_2 + p_3$

$\Rightarrow$ для любого числа $x \in \mathbb{Z}$, $f(x) = \Sigma$ всех простых множителей x.

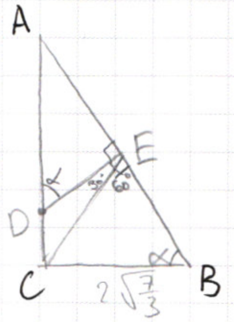
$f(\frac{x}{y}) < 0$

$f(\frac{x}{y}) = f(x \cdot \frac{1}{y}) = \underset{>0}{f(x)} \cdot f(\frac{1}{y})$

$f(\frac{1}{y}) < 0$

$f(y \cdot \frac{1}{y}) = f(1) = 0.$ $\qquad$ $f(y) \cdot f(\frac{1}{y}) = 0$

$\left[\begin{array}{l} f(y) = 0 \\ f(\frac{1}{y}) = 0 \end{array}\right.$



$\frac{AD}{AC}$ − ? $\quad$ S_{AED} − ?

$AC = \sqrt{7}$ $\quad$ $BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$ $\qquad$ $\angle CED = 30°$

$\frac{DE}{CB} = k$

$DC = AC - AB \cdot k$

$tg\,\alpha = 2\sqrt{\frac{7}{3}} : \sqrt{7} = \sqrt{\frac{28}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} =$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}$

$AB = \sqrt{7 + 4 \cdot \frac{7}{3}} = \sqrt{\frac{4+28}{3}} = \sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$

$CD = AC - AB \cdot k = CB^2 \cdot k^2 + CE^2 - 2CE \cdot CB \cdot k \cdot \cos 30°$

$CE = CB^2 + (AB - AC \cdot k)^2 - 2(AB - AC \cdot k) CB \cdot \cos\alpha =$

$= \frac{28}{3} + \frac{49}{3} - 2 \cdot 2 \cdot \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot k + 7k^2 - 4\sqrt{\frac{7}{3}} \cdot (\frac{7}{\sqrt{3}} - \sqrt{7} \cdot k) \cdot (2\sqrt{\frac{7}{3}} : \frac{7}{\sqrt{3}}) =$

$= \frac{77}{3} - \frac{28}{\sqrt{3}}k + 7k^2 - (\frac{28\sqrt{7}}{3} - \frac{28}{\sqrt{3}}k) \cdot \frac{2\sqrt{7}}{7} =$

$= 7k^2 - \frac{28}{\sqrt{3}}k + \frac{77}{3} - \frac{56}{3} - \frac{8\sqrt{7}}{\sqrt{3}}k = 7k^2 - \frac{28 + 8\sqrt{7}}{\sqrt{3}}k + 7$

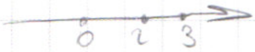
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



При $x \geq 3$:

$\frac{x^2-6x+10-2(x-3)}{2x^2-4x+x(x-2)} \leq 0$ $\frac{x^2-8x+16}{3x^2-6x} \leq 0$ $\frac{(x-4)^2}{3x(x-2)} \leq 0$ ≥ 0 <0

$3x(x-2)<0$

>0 >0

$x \in [2;3)$:

$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x(x-2)} \leq 0$ $\frac{x^2-4x+4}{3x(x-2)} \leq 0$ $\frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \leq 0$

$x \in [0;2)$

$x-2 \neq 0$ $x \neq 0$

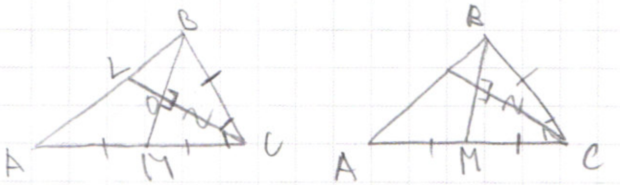
$\frac{(x-2)^2}{2x^2-4x+\cancel{-}x(x-2)} = \frac{(x-2)^2}{x^2-2x} = \frac{(x-2)^2}{x(x-2)} = \frac{x-2}{x} \leq 0$ >0

$x-2 \leq 0$ $x \leq 2$

$x<0$:

$x \neq 2$

$\frac{(x-2)^2}{2x^2-4x+x(x-2)} = \frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} = \frac{x-2}{3x} \leq 0$ <0 <0



$x, 2x, y$

$x+y>2x$ $3x>y$

$\begin{cases} 2x+y>x \\ x+y>0 \end{cases}$

$y>x$

$y<3x$

$3x+y=600$

$y<300$

$y>150$

$(600-y):3 \Rightarrow y:3$

$(300-150):3-1=$

50 49

153, 149, 298

156, 148, 296

159, 147, 294

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\sqrt{7}-\frac{7}{\sqrt{3}}\cdot k=\frac{28}{3}\cdot k^2+\left(7k^2-\frac{28+8\sqrt{7}}{\sqrt{3}}k+7\right)^2-k\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\cdot\left(7k^2-\frac{28+8\sqrt{7}}{\sqrt{3}}k+7\right)=$$

$$\cancel{\sqrt{7}-\frac{7}{\sqrt{3}}k=\frac{28}{3}k^2}$$

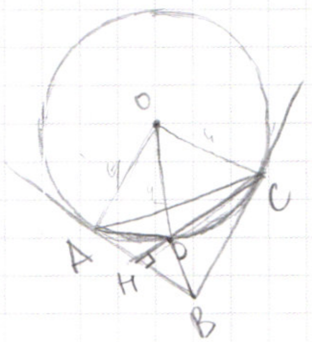
$$2\sqrt{7}k\cdot\left(7k^2-\frac{28+8\sqrt{7}}{\sqrt{3}}k+7\right)=$$

$$=2k\cdot\left(7\sqrt{7}k^2-\frac{28\sqrt{7}+56}{\sqrt{3}}k+7\sqrt{7}\right)=$$

$$=14\sqrt{7}k^3-\frac{56\sqrt{7}+112}{\sqrt{3}}k^2+14\sqrt{7}k$$

$$\cancel{\sqrt{7}-\frac{7}{\sqrt{3}}k=\frac{28}{}}$$

$$\left(7k^2-\frac{28+8\sqrt{7}}{\sqrt{3}}k\right.$$



$\frac{AB}{CH}$ — ?

$S_{ABD}=6$

$R=4$

$$\frac{AB\cdot DH}{2}=6$$

$$AB\cdot DH=12 \qquad AB=\frac{12}{DH}$$

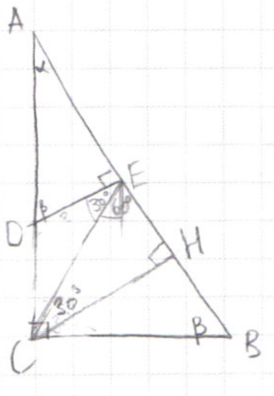
$$\frac{AB}{CH}=\frac{12CH}{DH}$$

$AO=OC=4$

$AB=BC$

$$S_{AOB}=\frac{OA\cdot AB}{2}=2AB$$

$$S_{OCB}=S_{AOB}.\quad S_{AOCB}=4AB$$



$$\cos 120^\circ=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{CB}{AB}=k_1=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{7}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$$

$$CH=ACk_1=\sqrt{7}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7}=2$$

$$\frac{CH}{CE}=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$CE=CH\cdot 2:\sqrt{3}=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$EH=\frac{1}{2}CE=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$BH=CB\cdot k_1=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7}=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$EB=EH+BH=\frac{6}{\sqrt{3}}$$

$$AE=AB-EB=\frac{7}{\sqrt{3}}-\frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\qquad k_2=\frac{AE}{AC}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}}=\frac{1}{\sqrt{21}}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)