МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2\leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 18$, $1\leqslant y\leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4 \\ x^2-2x+y^2-4y\le 0 \end{cases}$$

1) Добавим к обеим частям второго уравнения 5, тогда можно будет выделить полные квадраты:

$$x^2-2x+1+y^2-4y+4=(x-1)^2+(y-2)^2\le 5$$

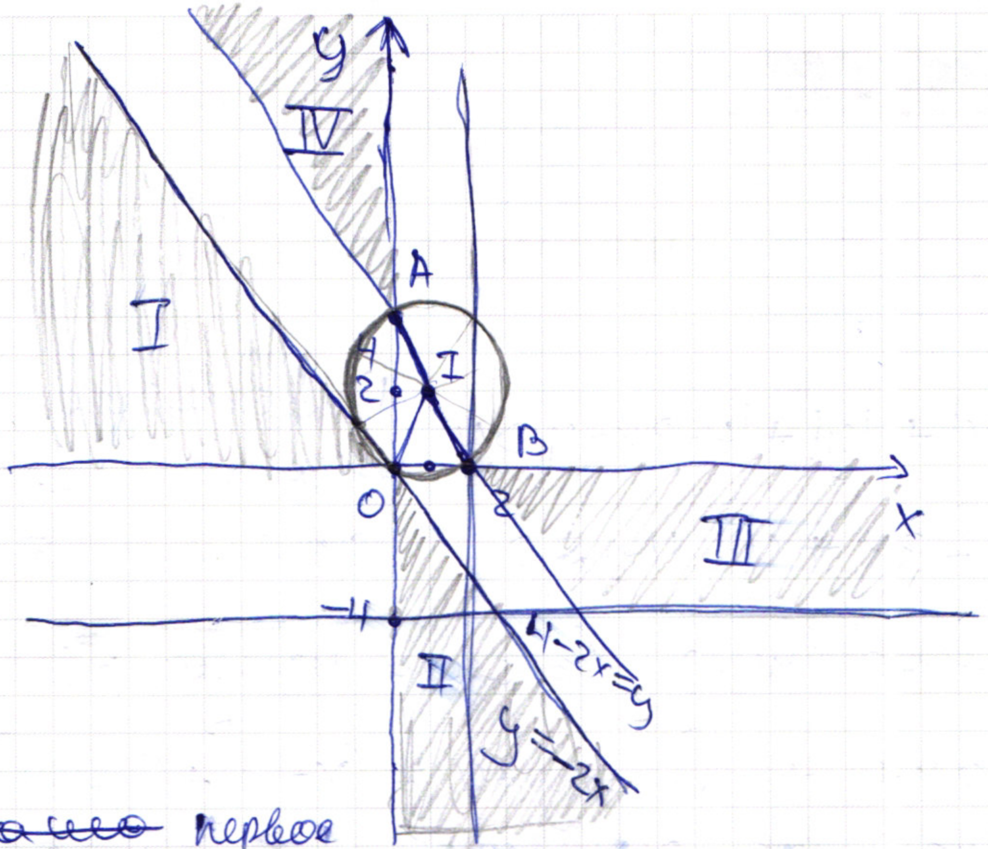
Тогда это окружность ~~в~~ с центром в точке $(1;2)$ и радиусом $\sqrt{5}$.

2) Перепишем первое неравенство ~~в виде~~:
$|4-2x-y|>4-|2x|-|y|$. Тогда рассмотрим 2 случая: $4-2x-y>0$ и $4-2x-y<0$.

а) $4-2x>y$:
$$\left[\begin{array}{l} 4-2x-y>4+2x+y \Leftrightarrow y<-2x \\ 4-2x-y>4-2x+y \Leftrightarrow x>0;\ y<0 \\ 4-2x-y>4+2x-y \Leftrightarrow x<0;\ y>0 \end{array}\right.$$

б) $4-2x<y$:
$$\left[\begin{array}{l} -4+2x+y>4-2x-y \Leftrightarrow -2x<y \\ -4+2x+y>4+2x-y \Leftrightarrow y>-4;\ x<0 \\ -4+2x+y>4-2x+y \Leftrightarrow x>2;\ y<0 \end{array}\right.$$

Изобразим все эти условия ~~на~~ в координатной плоскости:



Тогда ~~наше~~ первое уравнение задаёт такое множество точек $(x; y)$, состоящее из объединения множеств I, II, III и IV, но без границ.

3) ~~[illegible]~~ Заметим, что от центра окружности I точки O, B и A расположены на расстоянии $\sqrt{5}$, поэтому площадь будет ~~[illegible]~~ фигуры равно ~~3~~ нулю

Ответ: 0.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leq 0$$

1) ОДЗ: $2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|\neq 0$. Решим ОДЗ;

Рассмотрим 3 промежутка:

а) $x>2$: $2x^2-4x+x^2-2x=0 \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

б) $0\leq x\leq 2$: $2x^2-4x-x^2+2x=0 \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

в) $x<0$: $2x^2-4x+x^2-2x=0 \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$. Получим, что $x\neq 0$; $x\neq 2$.

2) Рассмотрим случай, когда числитель равен нулю:

а) $x>3$: $x^2-6x+10-2x+6=0 \Rightarrow x^2-8x+16=0 \Rightarrow$

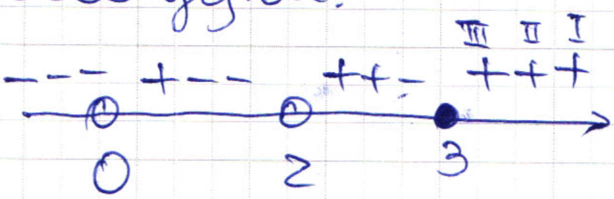
$\Rightarrow (x-4)^2=0 \Rightarrow x=4$ — подходит

б) $x<3$: $x^2-6x+10+2x-6=0 \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow x=2$ — не подходит под ОДЗ.

3) Пусть числитель это A, а знаменатель это B. Тогда $\frac{A}{B} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}A>0\\B<0\end{cases}\\ \begin{cases}A<0\\B>0\end{cases}\end{array}\right.$

Рассмотрим на числовой прямой как раскрываются модули:



, где I – это $|x-3|$,
II – это $|x-2|$,
III – это $|x|$.

Тогда заметим, что при любом значении x, числитель $A \geq 0$. Т.к. если $x \geq 3$, то $A=(x-4)^2$, а если $x<3$, то $A=(x-2)^2$. Поэтому нам нужно, чтобы знаменатель B был меньше 0, но это возможно, если $x^2-2x<0$, а это происходит только, если $x\in(0;2)$. Поэтому решением неравенства служат $x\in(0;2)\cup\{4\}$.

Ответ: $x\in(0;2)\cup\{4\}$

2) Т.к. $AC=\sqrt{7}$, то $PC=\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $PA=2\sqrt{\frac{7}{3}}$

3) в $\triangle PDC$ $\angle DPC=\alpha$. Тогда $\sin\alpha=\frac{DC}{PD}$,
$\cos\alpha=\frac{PC}{PD}$ ⇒ из $\sin\alpha$ получим, что

$PD=\frac{DC}{\sin\alpha}$ ⇒ $\cos\alpha=\frac{PC}{\frac{DC}{\sin\alpha}}$ ⇒

⇒ $DC=PC\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=PC\cdot tg\,\alpha$. Из $\triangle ABC$ мы получим, что $tg\,\alpha=\frac{2\sqrt{\frac{7}{3}}}{\sqrt{7}}$ ⇒

⇒ $DC=\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{\frac{7}{3}}}{\sqrt{7}}=\frac{2\cdot 7}{3\sqrt{7}}=\frac{2}{3}\sqrt{7}$ ⇒

⇒ $AD=\frac{1}{3}\sqrt{7}$ ⇒ $\frac{AD}{AC}=\frac{\frac{1}{3}\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\frac{1}{3}$.

б)

1) $AB^2=7+4\cdot\frac{7}{3}=\frac{21}{3}+\frac{28}{3}=\frac{49}{3}$ ⇒
⇒ $AB=\frac{7}{\sqrt{3}}$. По теореме Пифагора из $\triangle ABC$. Тогда $\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{\frac{7}{\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{3}{7}}$. В $\triangle DEA$ мы получим, что $\cos\alpha=\frac{AE}{AD}$ ⇒ $AE=\cos\alpha\cdot AD=$
$=\sqrt{\frac{3}{7}}\cdot\frac{1}{3}\sqrt{7}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. $\sin\alpha=\frac{ED}{AD}$ ⇒ $ED=\sin\alpha\cdot AD=$
$=\sqrt{\frac{4}{7}}\cdot\frac{1}{3}\sqrt{7}=\frac{2}{3}$. $S_{\triangle DEA}=\frac{AE\cdot ED}{2}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{2}=$
$=\frac{\sqrt{3}}{9}$. Ответ: а) $AD:AC=1:3$ б) $S_{\triangle DEA}=\frac{\sqrt{3}}{9}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{AD}{\sin\alpha}=2R \Leftrightarrow \frac{24}{y\sin 30^\circ}=8 \Rightarrow \frac{48}{y}=8 \Rightarrow$

$\Rightarrow y=6$. Заметим также, что $\angle ABC=60^\circ$, а $\triangle ABC$ – р/б, т.к. отрезки касательных AB и BC равны $\Rightarrow \triangle ABC$ – правильный $\Rightarrow$
$\Rightarrow AB=AC=BC=6$.

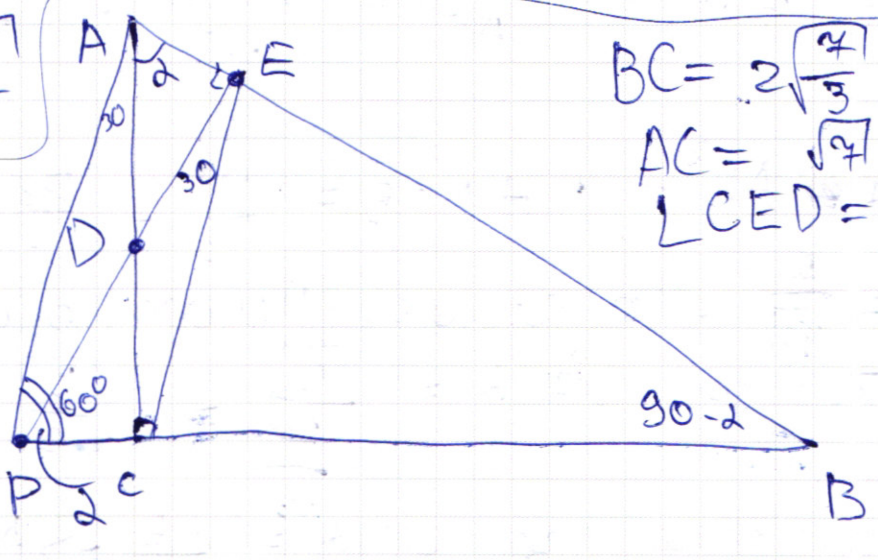
4) $AH = x\sqrt{3} = \frac{12\sqrt{3}}{y} = 2\sqrt{3} \Rightarrow HC^2 = 36-4\cdot3 =$
$=24 \Rightarrow HC = 2\sqrt{6} \Rightarrow \frac{AB}{CH} = \frac{6}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{2}$

N5

а) $\frac{AD}{AC}$ – ?

б) S_{DEA} – ?



$BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$
$AC = \sqrt{7}$
$\angle CED = 30^\circ$

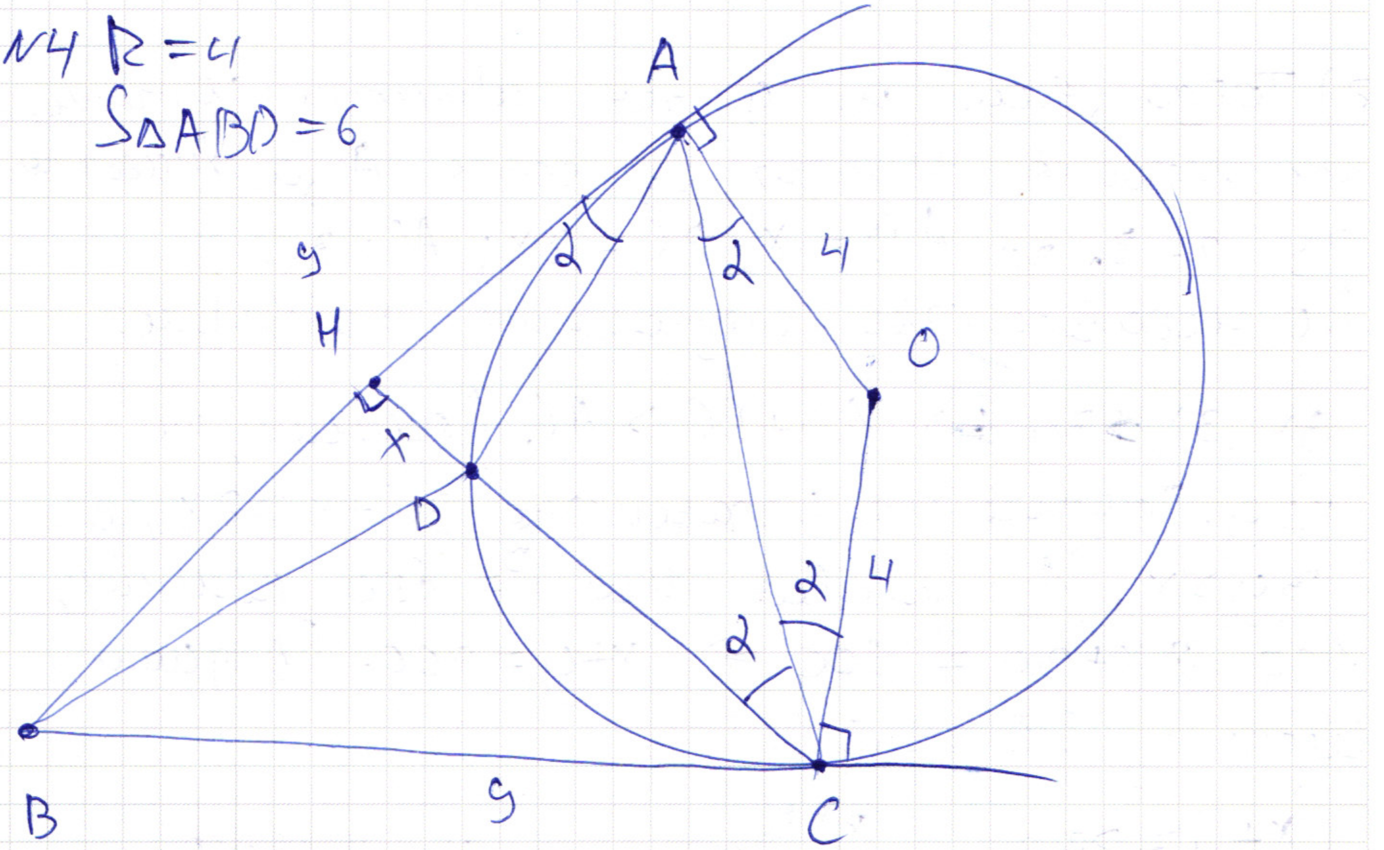
а)

1) Продлим ED и BC до пересечения. Получим точку P. APCE – вписанный $\Rightarrow \angle PAC = \angle PEC = 30^\circ$, т.к. они опираются на одну дугу.
Тогда $\angle APC = 60^\circ$

Проведена биссектриса и медиана. Поэтому доказывать на что-то не надо. Итоговое количество это 49. Ответ: 49 треугольников.

№4 $R=4$

$S_{\triangle ABD}=6$



1) Пусть $\angle HAD=\alpha$. Тогда т.к. $\angle DCA$ опирается на хорду AD, то $\angle DCA=\alpha$. Тогда $\angle DAC=$ $=90-2\alpha \Rightarrow \angle CAO=\alpha$.

2) По теореме синусов из $\triangle AOC$ получим:

$\frac{OC}{\sin\alpha}=2R \Rightarrow \frac{4}{\sin\alpha}=8 \Rightarrow \sin\alpha=\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~sin~~ $\alpha=30^\circ$. $AB=y$

3) В $\triangle BDA$ ~~Пусть~~ пусть $HD=x$. Тогда $\frac{xy}{2}=6$.

Тогда $x=\frac{12}{y}$. $\Rightarrow AD=2x=\frac{24}{y}$. Тогда по теореме синусов из $\triangle ADC$ мы получим

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) Тогда, если не умаляя общности считать, что медиана выходит из точки A, а биссектриса из т. B, то $AB = x$; $BC = 2x$; $AC = 3y$.
По неравенству треугольника получим:

$3x > 3y \Leftrightarrow AB + BC > AC$. Получим, что $x > y$. Также из неравенства $3y + x > 2x$, то $3y > x$. Из условия, что $P = 600$ получим, что $3x + 3y = 600 \Rightarrow x + y = 200$. Получим систему условий:

$$\begin{cases} x + y = 200 \\ 3y > x \\ x > y \end{cases}$$

3) Выразим из первого равенства x: $x = 200 - y$. Подставим в неравенства:

(1) $3y > 200 - y \Rightarrow y > 50$

(2) $200 - y > y \Rightarrow 100 > y$. Тогда $50 < y < 100$.

4) Т.к. $x, y \in \mathbb{Z}$, то нам подойдут все y от 51 до 99, и x, которые получатся.
Всего будет $99 - 51 + 1 = 49$ треугольников.
Т.к., если треугольник повернуть, то ничего не изменится, получим, что не важно откуда

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

1) ОДЗ: $xy \geq 0$

2) Возведём первое уравнение в квадрат; получим: $x^2+4y^2-4xy=xy \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2-5yx+4y^2=0$. $D=25y^2-16y^2=9y^2$

Тогда $x_{1,2}=\frac{5y\pm 3y}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=4y \quad (1) \\ x_2=y \quad (2) \end{array}\right.$

Подставим во второе уравнение:

(1) $y^2+4y-5=0$. По теореме Виета $\left[\begin{array}{l} y_1=-5 \\ y_2=1 \end{array}\right.$

Тогда $\left[\begin{array}{l} x_1=-20 \\ x_2=4 \end{array}\right.$

(2) $y^2+y-5=0$. $D=1+20=21$. $y_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

$x_{3,4}=y_{3,4}$.

3) Подставим в первое уравнение найденные значения. Возведение в квадрат было неравносильным переходом!

а) $-20-(-5)=\sqrt{-20(-5)}$. Заметим, что левая часть отрицательна, а корень всегда неотрицателен $\Rightarrow$ не подходят эти значения б) $4-2=\sqrt{4\cdot 1} \Rightarrow 2=2$. Подходит

в) $\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2} - 2\left(\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\right) \neq \sqrt{\left(\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)\left(\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)}$

Преобразуем левую часть:

$\dfrac{-1+\sqrt{21}+2-2\sqrt{21}}{2} = \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}$. $\sqrt{21}>1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ левая часть отрицательна $\Rightarrow$ не подходит

б) $\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2} - 2\left(\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\right) \neq \sqrt{\left(\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)^2}$

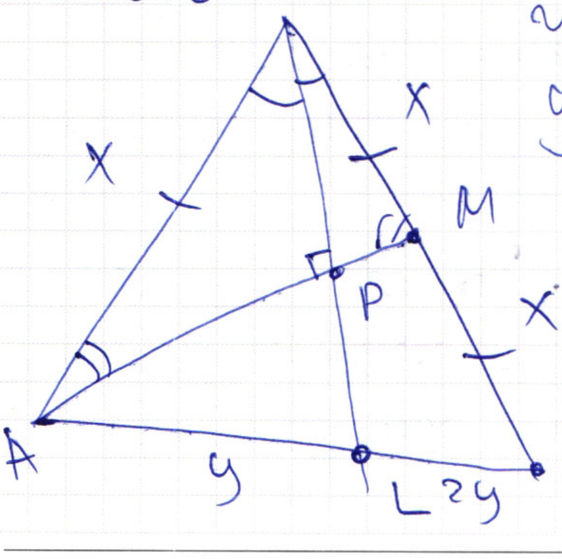
~~Левая часть~~ выражение примет вид:

$\dfrac{1+\sqrt{21}}{2} = \left|\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\right| = \left|-\left(\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right)\right|$ модуль „съест" минус $\Rightarrow$ подходит

Ответ: $(4;1)$, $\left(\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}; \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)$

№2

$P=600$



1) Заметим, что в любом треугольнике, удовлетворяющем условии выполняющем условие: одна сторона больше другой в 2 раза, а третья сторона равна трём. Всё это изображенно на чертеже. На нём $\triangle ABM$ — р/б

$\frac{AB}{CH}$ - ?

$R = 4$

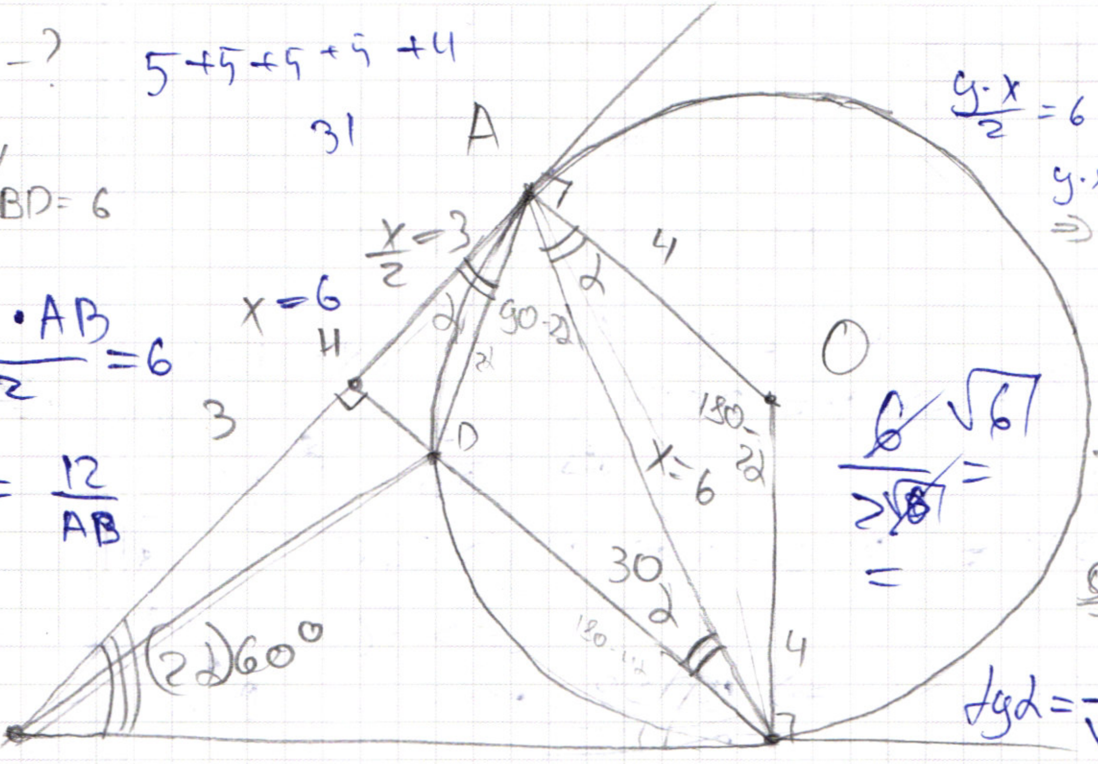
$S\triangle ABD = 6$

$5+5+5+5+4$

31

$\frac{HD \cdot AB}{2} = 6$

$HD = \frac{12}{AB}$



$\frac{y \cdot x}{2} = 6$

$y \cdot x = 12$

$\Rightarrow$

$\frac{\cancel{6}\sqrt{6}}{2\sqrt{8}} =$

$=$

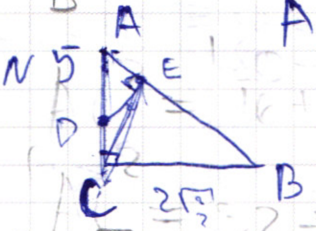
$\frac{AH}{AC} \Rightarrow$

$\cos\alpha$

$tg\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow ctg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{1} =$

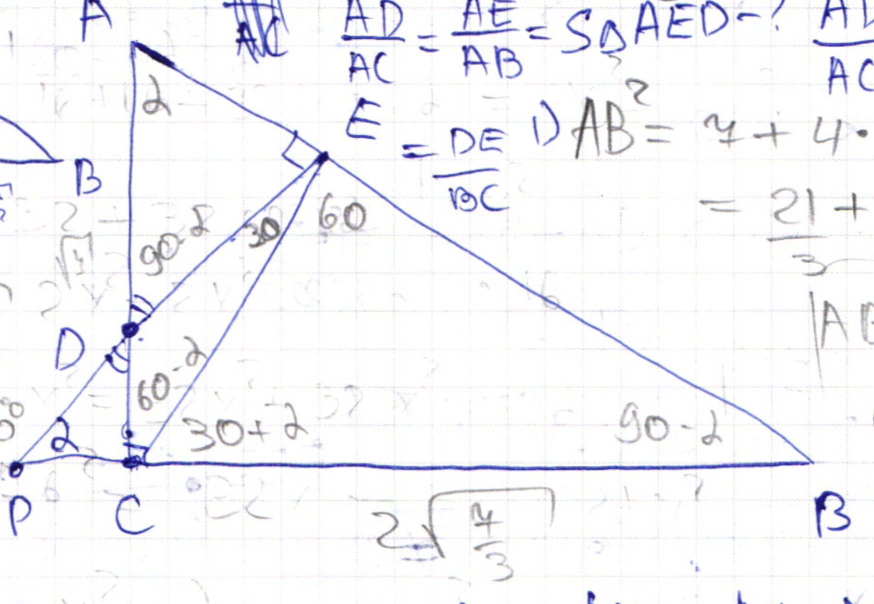
$x = 6$



$AC = \sqrt{7}$

$BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$

$\angle CED = 30^0$



$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = S\triangle AED$ - ? $\frac{AD}{AC}$ - ?

$E = \frac{DE}{BC}$

1) $AB^2 = 7 + 4 \cdot \frac{7}{3} =$

$= \frac{21}{3} + \frac{28}{3} = \frac{49}{3}$

$AB = \frac{7}{\sqrt{3}}$

$\cos\alpha = \frac{HC}{AC}$

$\Rightarrow HC = AC \cdot \cos\alpha$

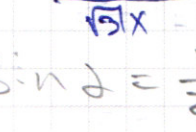
2) $HD = \frac{12}{x} \Rightarrow AH$

$\cos\alpha = \frac{AH}{AD}$ $\quad AH = AD \cdot \cos\alpha$

$AH = \frac{12\cos\alpha}{x\sin\alpha} =$

$\Rightarrow AD = \frac{12}{x\sin\alpha}$

$\sin\alpha = \frac{HD}{AD} \Rightarrow$



$= \frac{12}{x} ctg\alpha$

$\Rightarrow \frac{4}{\sin\alpha} = 8 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30$ $\quad \frac{24}{x \cdot \frac{1}{2}} = 8$

$AH = \frac{12\sqrt{3}}{x} \Rightarrow AD = \frac{24}{x} \Rightarrow$ $\quad \frac{24}{x\sin\alpha} = 8$ $\quad \frac{48}{x} = 8$

$x = 6$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

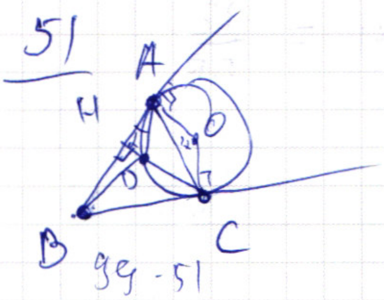
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x, y \in \mathbb{Z}$. $AE=$ $x = 149$

$$\begin{cases} x+y=200 \Rightarrow x = 200-y \\ x>y \\ 3y > x = 200-y \Rightarrow 4y > 200 \end{cases}$$

$\cos\alpha = \frac{AE}{AD}$ 153 51



$y > 50$

$200 - y > y \Rightarrow 100 > y$

99 - 51

~~Заметим, что $x \vdots 3k \Rightarrow 2k \cdot 200 = \frac{2}{3} \Rightarrow y \equiv 2 \pmod 3$~~

$50 < y < 100$

51, 52, ..., 99

$(x-1)^2+(y-4)^2 \le 5$

$51 ; 99 \Rightarrow 99 - 51 + 1 = 49$

$x^2 - 2x + y^2 - 4y$ $+1$ $+4$

N 1 $\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \le 0$

--- +-- ++- +++

0 2 3

1) ОДЗ: $2x^2-4x+|x|\cdot|x-2| \ne 0$

2) $tg\alpha = \frac{2\sqrt{\frac{7}{3}}}{\sqrt{7}} \Rightarrow DC = \frac{2\sqrt{\frac{7}{3}}}{\sqrt{7}} \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} =$

$= \frac{2 \cdot 7}{3\sqrt{7}} = \frac{2}{3}\sqrt{7} \Rightarrow$ $AD = \frac{1}{3}\sqrt{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{\frac{7}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$ $\sin\alpha = \sqrt{\frac{4}{7}}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 найти S

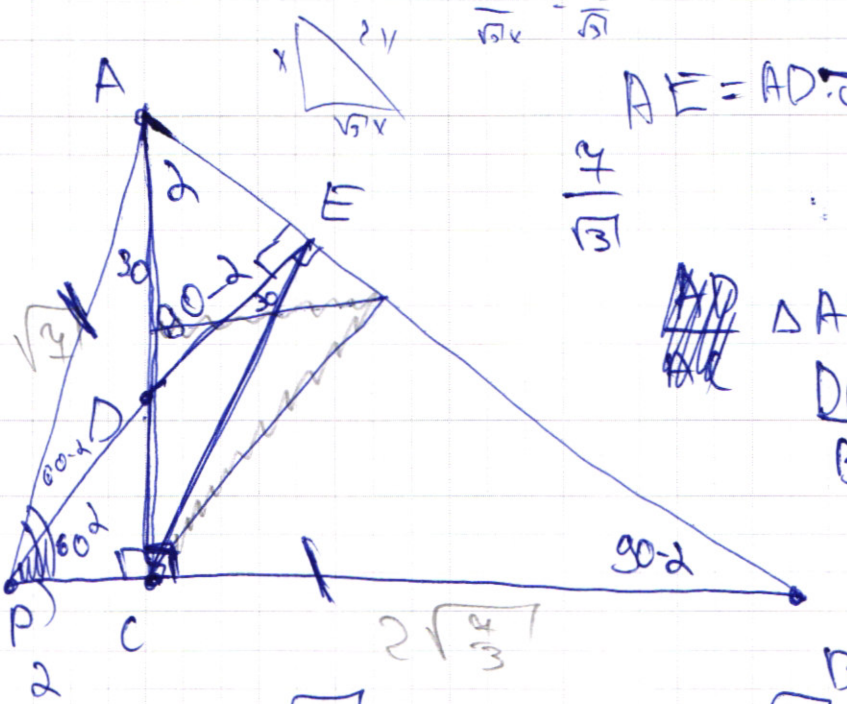
$$\begin{cases} x^2-2x-4y+y^2\leq 0 \quad (1) \\ |2x|+|y|+|4-2x-y|>4 \quad (2) \end{cases}$$

(1) $x^2-2x+1+y^2-4y+4\leq 5$

$(x-1)^2+(y-2)^2\leq 5$

окружность

2)



$PA=2\sqrt{\frac{7}{3}}$

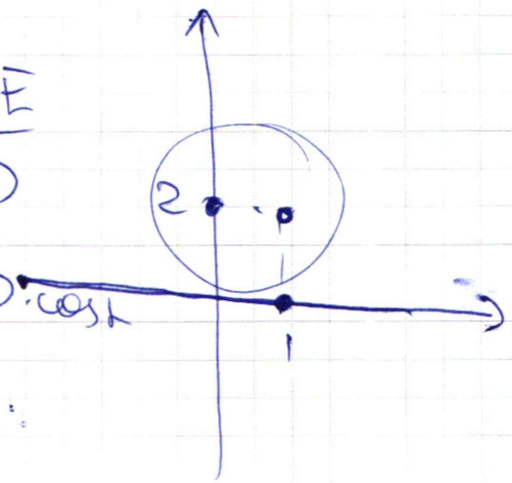
AE

$\cos\alpha=\frac{AE}{AD}$

$\frac{2x}{\sqrt{3}x}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$AE=AD\cdot\cos\alpha$

$\sqrt{\frac{7}{3}}$



$\triangle ADE\sim\triangle ABC$

$\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{DC}$

$\cancel{30+\alpha=90-\alpha}$

$\cancel{2\alpha=60}$

$\cancel{\alpha=30}$

$DC=\sqrt{\frac{7}{3}}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{\frac{7}{3}}}{PD}\Rightarrow PD=\frac{\sqrt{\frac{7}{3}}}{\cos\alpha}$

$S_{\triangle ADE}=$

$=\frac{AD\cdot AE}{2}\sin\alpha$

$\sin\alpha=\frac{DC}{PD}\Rightarrow\frac{DC\cdot\cos\alpha}{\sqrt{\frac{7}{3}}}$

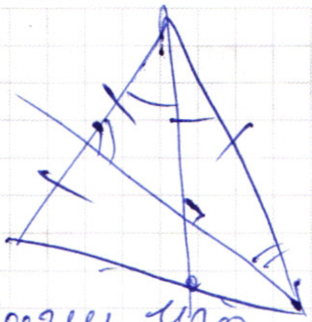
$DC=\sqrt{\frac{7}{3}}\,tg\,\alpha$

$\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}=\frac{2\sqrt{7}}{9}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

(2) $4-2=\sqrt{4}$ — подходит



(3) $\frac{-1+\sqrt{21}}{2}+1-\sqrt{21}=\ldots$

$\frac{\cancel{-1}+\sqrt{21}+\cancel{2}-2\sqrt{21}}{2}$ $+1$

Заметим, что

$1<\sqrt{21} \Rightarrow <0$

(4) $\frac{-1-\sqrt{21}}{2}+2+2\sqrt{21}=\frac{1+\sqrt{21}}{2}\doteq$

$=\sqrt{\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)^2}=$ ~~$\frac{1+2x+2\sqrt{21}}{2}$~~

$=\left|\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right| \Rightarrow$ подходит

$2x+3y>x$

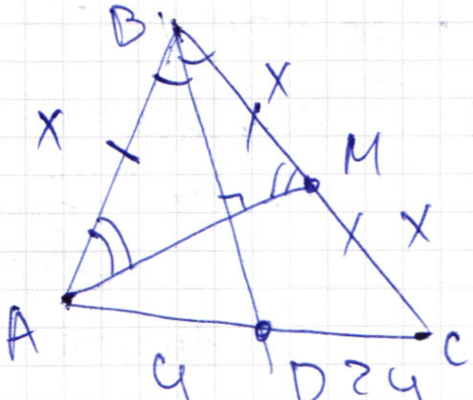
$x+3y>0$

$x+3y>2x$

$3y>x$

Ответ: $(4;1)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2};\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)$

N2 $P=600$; $a,b,c\in\mathbb{Z}$.



$3x+3y=600$ $x=3k$

$\begin{cases} x+y=200 \\ 3x>3y \Leftrightarrow x>y \\ 3y>x \end{cases}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

~~1) $x=5-y^2$~~

~~$5-y^2-2y=\sqrt{5y-y^3}$~~

ОДЗ: $xy \geq 0$

1) $x^2+4y^2-4xy=xy$

$$\begin{cases} x^2+4y^2-5xy=0 \Rightarrow D=25y^2-16y^2=9y^2 \Rightarrow \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{5y\pm3y}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=4y \ (1) \\ x_2=y \ (2) \end{array}\right. \Rightarrow$ Подставим во второе:

(1) $4y+y^2-5=0 \Rightarrow$ по теореме Виета

$\left[\begin{array}{l} y_1=-5 \\ y_2=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-20 \\ x_2=4 \end{array}\right.$ (2) $y^2+y-5=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow D=1+20=21$

$y_{3,4}=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}=x_{3,4}$

Заметим, что если удов. I, то подходит

2) Сделаем проверку, т.к. возведение в квадрат первого уравнения неравносильный переход.

(1) $-20+10=\sqrt{-5\cdot(-20)}$ — не подходит

<0

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ В1

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \le 0 \qquad \text{числитель} = A, \ \text{знаменатель} = B$$

1) Одз: $2x^2-4x+|x|\cdot|x-2| \neq 0$

$\frac{A}{B} \le 0$ 1) $A \ge 0$, $B < 0$ 2) $A \le 0$, $B > 0$

2) Разделимся с равенством: $x^2-6x+10-2|x-3|=0$

(1) $x>3$: $x^2-6x+10-2x+6=0$ $\quad$ $x=3$: $9-18+10 \neq 0$

$x^2-8x+16=0 \Rightarrow x=4$

(2) $x<3$: $x^2-6x+10+2x-6=0 \Rightarrow x^2-4x+4=0$

$x=2$: ⊗ ОДЗ. Решим ОДЗ: $\quad x \neq 0; 2$

3) $2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|=0$ $\quad (x^2-2x)$

(1) $x>2$: $2x^2-4x+x^2-2x=0$

$3x^2-6x=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$ $\quad x \in (0;2)$?

(2) $0 \le x<2$: $2x^2-4x+(x\cdot(2-x)) = 2x^2-4x+2x-x^2=0$

$x^2-2x=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

(3) $x<0$:

$2x^2-4x+(-x(2-x))=0$

$2x^2-4x-2x+x^2 \Rightarrow 3x^2-6x=0\ldots$

1) $x \ge 3$: $\frac{x^2-6x+10-2x+6}{2x^2-4x+x^2-2x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-4)^2}{x(x-2)} \le 0$

$x(x-2)<0$

$\boxed{x \in (0;2)}$?!

г) x (2;3] $(3-x)$

$$x^2-6x+10-6+2x = x^2-4x+4=(x-2)^2$$

Заметим, что везде в числителе $A>0$, т.о. квадрат ⇒ когда ≤ 0 нужно, когда $B\le 0$. Заметим, что части в знаменателе всегда будет x^2-2x. А это меньше 0, если $x\in(0;2)$ ⇒ только при таких x $\frac{A}{B}<0$. Ответ: $\underline{x\in(0;2)}$ + $x=4$

№6 Найти S.

$$\begin{cases}|2x|+|y|+|4-2x-y|>4 \quad (1)\\ x^2-2x-4y+y^2\le 0 \quad (2)\end{cases}$$

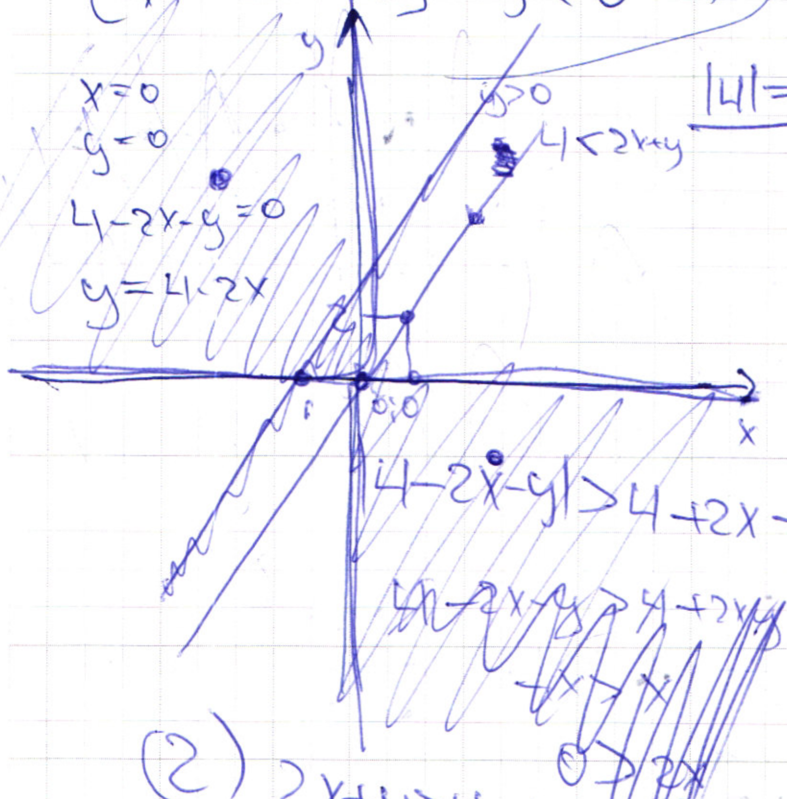
1) (1) $(x-1)^2+(y-2)^2\le 5$

2) $|4-2x-y|>|4|-|2x|-|y|$

$|4|=4$

$|c-a-b|>|c|-|a|-|b|$

Если $a,b>0$, то $|c-a-b|=|c|-|a|-|b|$ ⇒ какого-то из них меньше 0.



$|4-2x-y|>4+2x-y$

$\cancel{4-2x-y>4+2x-y}$

$-4x>4x$

$0>8x$

$\underline{x<0}$

(2) $\underline{2x+y>4}$

$$\left[\begin{array}{l}4-2x-y \ (1)\\ -4+2x+y \ (2)\end{array}\right.$$

$4-2x-y>0$

(1) $4>2x+y$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~4-2x-y > 4-2x-y ... друг~~ $4>2x+y$

$y<4-2x$

$$(1)\ \left[\begin{array}{l} 4-2x-y>4+2x-y \Leftrightarrow 0>x;\ y>0 \\ 4-2x-y>4+2x+y \Leftrightarrow y<2x \\ 4-2x-y>4-2x+y \Leftrightarrow 0>y;\ x>0 \end{array}\right.$$

$y>4-2x$

$$(2)\ \left[\begin{array}{l} -4+2x+y>4-2x-y \Leftrightarrow y>-2x-4 \\ -4+2x+y>4+2x-y \Leftrightarrow y>4;\ x<0 \\ -4+2x+y>4-2x+y \Leftrightarrow x>2;\ y<0 \end{array}\right.$$

~~Только области I и II нам подходят.~~

$\sqrt{5}>2$

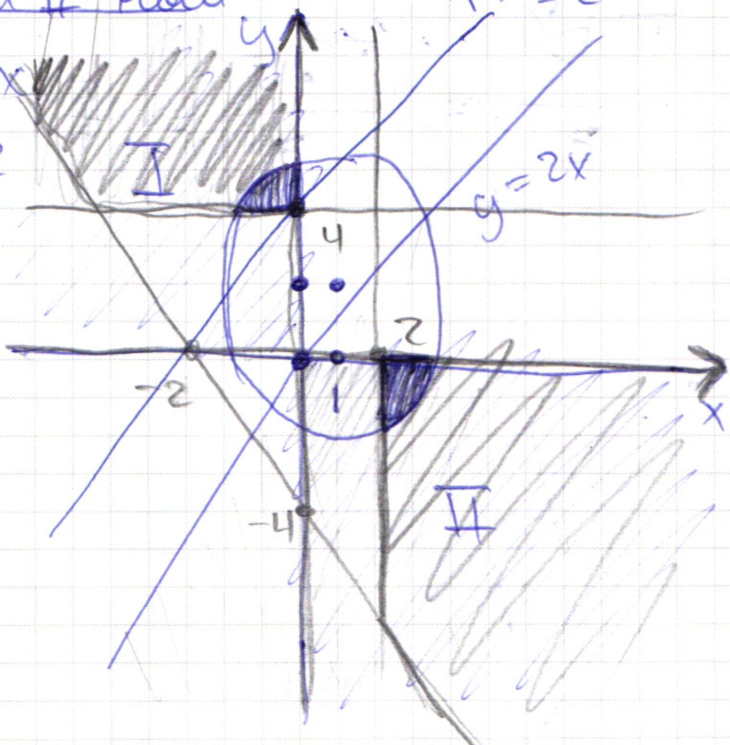
$-8>-4x$

$x>2$

$8+4x>-2y$

$y>-2x-4$

$-8>-2y \Rightarrow y>4$



☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

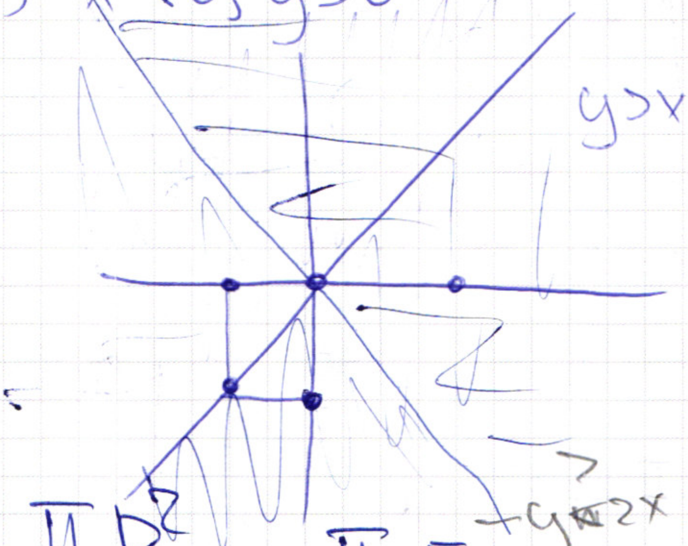
$|4-2x-y|>0 \Rightarrow 4>2x+y \Rightarrow$

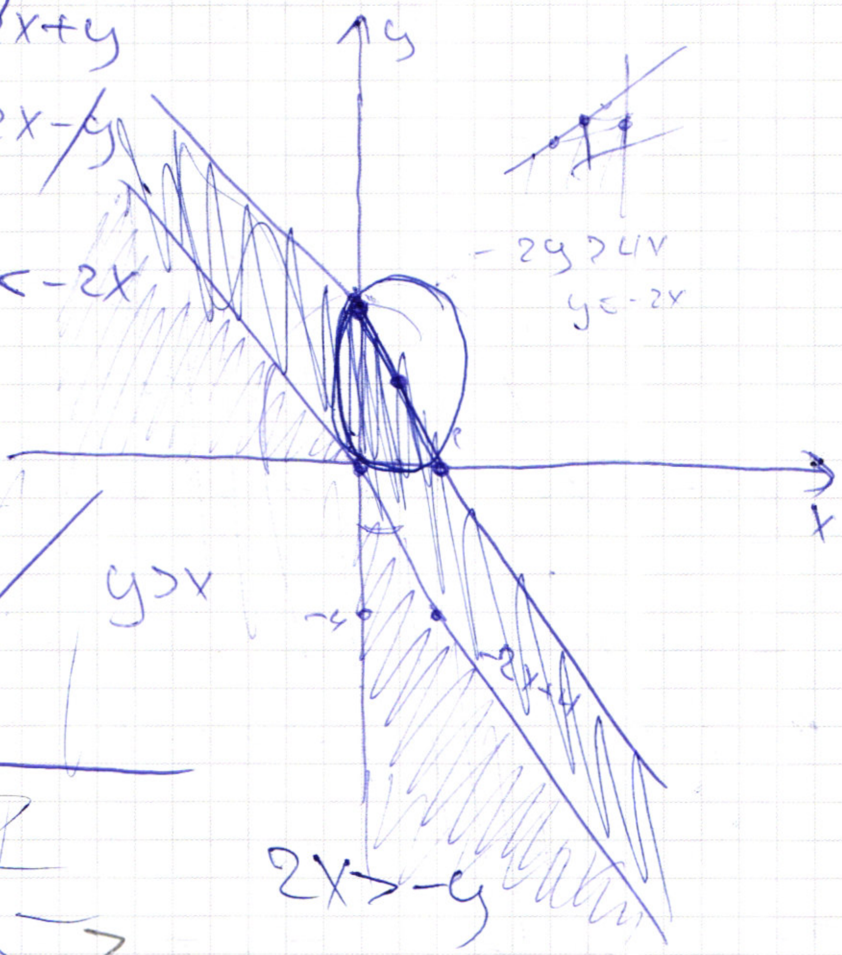
$$\left[\begin{array}{l} \cancel{4}-2x-y>\cancel{4}+2x+y \Rightarrow y<4-2x=0 \\ 4-\cancel{2}x-y>4-\cancel{2}x+y \\ 4-2x-\cancel{y}>4+2x-\cancel{y} \end{array}\right.$$

(1) $-4x>2y \Rightarrow y<-2x$

(2) $x>0;\ y<0$

(3) $x<0;\ y>0$





$$\frac{\pi R^2}{2}=\frac{\pi\cdot 5}{2}=\frac{5}{2}\pi$$

$4x>-2y$ $4x>8$

$x>2$