МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE\perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED=45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6, \\ x^2-2x-3y+y^2\leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 19$, $3\leqslant y\leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\frac{x^2-2x-5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\leq 0$$

Найдём нули подмодульных выражений:

$$\left[\begin{array}{l} x=0\\ x-1=0\\ x-3=0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=1\\ x=3\end{array}\right.$$

Рассмотрим 4 промежутка:

I 0 II 1 III 3 IV x $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{I} \quad \frac{x^2-2x+5+4-4}{4x^2-12x+x^2-3x}=\frac{x^2+2x+1}{5(x^2-3x)}\leq 0$$

$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{5x(x-3)} \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow \begin{cases}(x+1)^2=0\\ 5x(x-3)\neq 0\\ x\in(-\infty;0]\end{cases} \Rightarrow$$

тк мы рассматриваем I промежуток.

$+ \quad -1 \quad + \quad 0 \quad - \quad 3 \quad +$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=-1\\ x\neq 0\\ x\neq 3\\ x\in(-\infty;0)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\in\{-1\}\cup(0;3)\\ x\in(-\infty;0]\end{cases} \Rightarrow x=-1$$

$$\text{II} \quad \frac{x^2-2x+5+4x-4}{4x^2-12x-x^2+3x}\leq 0$$

$$f(x)=\frac{x^2 \cancel{-6x}+2x+1}{3x(x-3)} \; ; \; f(x)=0 \Rightarrow \begin{cases}(x+1)^2=0\\ 3x(x-3)\neq 0\\ x\in[0;1]\end{cases}$$

тк II промежуток $\Rightarrow$

№1 - продолжение.

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x\neq 0 \\ x\neq 3 \\ x\in[0;1] \end{cases}$$

$+ \quad -1 \quad + \quad 0 \quad - \quad 3 \quad +$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x\in\{-1\}\cup(0;3) \\ x\in[0;1] \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ~~$x\in[0;1]$~~ $x\in(0;1]$

(III) $x\in[1;3]$ тк III промежуток

$$\frac{x^2-2x+5-4x+4}{4x^2-12x-x^2+3x}\leq 0$$

$$f(x)=\frac{x^2-6x+9}{3x(x-3)};\ f(x)=0\Rightarrow \begin{cases}(x-3)^2=0 \\ 3x(x-3)\neq 0 \\ x\in[1;3]\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x\neq 0 \\ x\neq 3 \\ x\in[1;3]\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $+ \quad 0 \quad - \quad 3 \quad +$ $\Rightarrow \begin{cases} x\in(0;3) \\ x\in[1;3]\end{cases} \Rightarrow x\in[1;3)$

(IV) $\Rightarrow x\in[3;+\infty)$ тк IV промежуток $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x^2-2x+5-4x+4}{4x^2-12x+x^2-3x}\leq 0\Rightarrow \frac{x^2-6x+9}{5x(x-3)}=f(x);\ f(x)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2-6x+9=0 \\ 5x(x-3)\neq 0 \\ x\in[3;+\infty)\end{cases}\Rightarrow \begin{array}{l} x=3 \\ x\neq 0 \\ x\neq 3 \\ x\in[3;+\infty)\end{array} \Rightarrow$$

$+ \quad 0 \quad - \quad 3 \quad +$ $\Rightarrow$

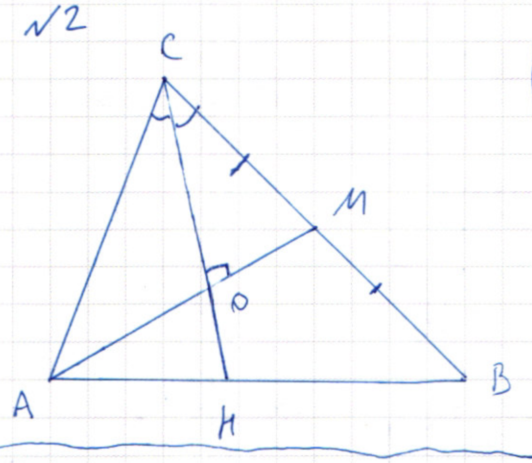
$$\Rightarrow\begin{cases} x\in(0;3) \\ x\in[3;+\infty)\end{cases}\Rightarrow x\in\varnothing$$

$$\left[\begin{array}{l} x\in\varnothing \\ x\in[1;3) \\ x\in(0;1] \\ x\in\{-1\}\end{array}\right. \Rightarrow x\in\{-1\}\cup(0;3)$$

Ответ: $\{-1\}\cup(0;3)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№2



Дано: AM – медиана, CH – биссектриса, $\angle COM = 90^\circ$, $P = 300$

Пусть $CM = y \Rightarrow MB = y$, т.к. AM – медиана.
Рассмотрим $\triangle ACM$: CO – биссектриса и высота $\Rightarrow \triangle ACM$ равнобедренный с основанием $AM \Rightarrow AC = CM = y$. Из теоремы о биссектрисе:

$\frac{AC}{AH} = \frac{CB}{HB} \Rightarrow \frac{AC}{CB} = \frac{AH}{HB} = \frac{1}{2}$. Пусть $AH = x \Rightarrow HB = 2x$. $P = AC + CM + BH + HA = 3x + 3y = 300 \Rightarrow x + y = 100$. Запишем неравенства треугольника:

$$\begin{cases} 3y > 3x \\ 3x + y > 2y \\ 3x + 2y > y \\ x + y = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y > 3x & \text{I} \\ 3x > y & \text{II} \\ 3x > -y & \text{III} \\ x + y = 100 & \text{IV} \end{cases} \Rightarrow \text{из I и IV: } \begin{cases} 6y > 300 \\ 6x < 300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 50 \\ x < 50 \end{cases}$$

$$\text{Из II и IV: } \begin{cases} 4x > 100 \\ 300 > 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 25 \\ y < 75 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \in (50; 75) \\ x \in (25; 50) \\ x + y = 100 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ кол-во пар чисел дающих в сумме 100 будет:
: $75 - 50 - 1 = 24 \Rightarrow 24$ треугольника

Ответ: 24 ~~пары~~ треугольника.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $\begin{cases} y-2x=\sqrt{x+y} \quad |\cdot 2 \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \Rightarrow$

$y>2x$

$x+y \geq \sqrt{xy}$

24

15

$\begin{cases} 9-x^2=2y \\ 2y-4x=\sqrt{4+y} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow -x^2-4x+9=\sqrt{18x-2x^3}$

$f(x)=-x^2-4x+9;\ f(x)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -x^2-4x+9=0$

$D=16+36=52$

$x=\dfrac{4\pm 2\sqrt{13}}{-2}=-2\mp\sqrt{13}$

$-2-\sqrt{13}$ $-2+\sqrt{13}$

$-\ +\ -$

$-2x(x^2-9)=2x(3-x)(3+x)$

-3 0 3

$-\ +\ -\ +$

$x\in[-3;0]$

$(x^2+4x-9)^2=x^4+16x^2+81-18x^2-72x+8x^3=$

$=18x-2x^3$

$x^4+10x^3-2x^2-90x+81=0$

	1	10	−2	−90	+81
1	1	11	9	−81	0
−9	1	2	−9	0	

$x^2+2x-9=0$

$D=4+36=40$

$x=\dfrac{-2\pm 2\sqrt{10}}{2}=-1\pm\sqrt{10} \Rightarrow \begin{cases} x\in\{-9;\ -1-\sqrt{10};\ 1;\ -1+\sqrt{10}\} \\ x\in[-3;0] \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x\in\varnothing \Rightarrow$ Уравн. решений не имеет.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \quad \Big|\cdot 2 \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y-4x=\sqrt{4xy} & \text{I} \\ 2y+x^2=9 & \text{II} \end{cases}$$

из II: $2y=9-x^2 \Rightarrow$ подставим в I:

$9-x^2-4x=\sqrt{18x-2x^3}$

$-x^2-4x+9\geq 0$

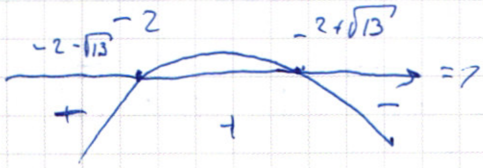
$f(x)=-x^2-4x+9$

$f(x)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow -x^2-4x+9=0$

$D=16+36=52$

$x=\dfrac{4\pm 2\sqrt{13}}{-2}=-2\mp\sqrt{13}$



$\Rightarrow$

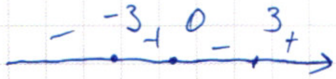
$18x-2x^3\geq 0$

$2x(9-x^2)=2x(3-x)(3+x)=f(x)$

$f(x)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow 2x(3-x)(3+x)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x+3=0 \\ 3-x=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-3 \\ x=3 \end{array}\right.$



$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$x\in[-2-\sqrt{13}]\cup[-2+\sqrt{13}]$~~

$x\in[-2-\sqrt{13};-2+\sqrt{13}]$

$\Rightarrow x\in[-3;0]\cup[3;+\infty)\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\in[-2-\sqrt{13};-2+\sqrt{13}] \\ x\in[-3;0]\cup[3;+\infty) \end{cases} \Rightarrow x\in[-3;0] \ - \text{ОДЗ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Т.К.} \begin{cases} -x^2-4x+9\geq 0 \\ 18x-2x^3\geq 0 \end{cases} \Rightarrow 18x-2x^3=x^4+16x^2+81-18x^2-72x+8x^3\Rightarrow$$

$\Rightarrow x^4+10x^3-2x^2-90x+81=0$

По схеме Горнера найдём корни уравнения:

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №4

(Нумеровать только чистовики)

№3 - продолжение

	1	10	−2	−90	+81
1	1	11	9	−81	0
−9	1	2	−9	0	

$t^2+2t-9=0$

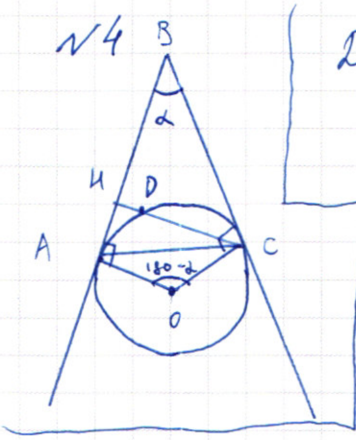
$D=4+36=40$

$x=\dfrac{-2\pm 2\sqrt{10}}{2}=-1\pm\sqrt{10} \Rightarrow \begin{cases} x\in\{-9; -1-\sqrt{10}; 1; -1+\sqrt{10}\} \\ x\in[-3;0] \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x\in\varnothing \Rightarrow y\in\varnothing$

Ответ: $x\in\varnothing$; $y\in\varnothing$.

№4



Дано: $R=6$

$S\triangle ABD=15$

$\dfrac{AB}{CH}=?$

Пусть $\angle ABC=\alpha \Rightarrow$ тк AB и BC - касательные $\Rightarrow \angle BAO=\angle BCO=90^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle AOC=360-\angle OAB-\angle OCB-\angle ABC=$
$=360-90-90-\alpha=180-\alpha$. $AO=OC=R=$
$=6$ Запишем теорему косинусов для $\triangle AOC$:

$AC=\sqrt{36+36-2\cdot 36\cdot\cos(180-\alpha)}=\sqrt{2\cdot 36+36\cdot 2\cos\alpha}=6\sqrt{2(1+\cos\alpha)}$. Запишем следствие из теоремы синусов: $\dfrac{AC}{2\sin(180-\alpha)}=R$; $6=\dfrac{6\sqrt{2(1+\cos\alpha)}}{2\sin\alpha}$* $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sin\alpha=\sqrt{2(1+\cos\alpha)}$; тк $\sin\alpha>0 \Rightarrow \begin{cases} 4\sin^2\alpha=2(1+\cos\alpha) \\ \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2-2\cos^2\alpha-1=\cos\alpha \Rightarrow 2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1=0$; $\begin{cases}\cos\alpha\neq 1 \\ 2\cos\alpha\neq -1\end{cases}$ тк $\sin\alpha\neq 0$*

Пусть $\cos\alpha=x \Rightarrow -1<x<1 \Rightarrow \begin{cases} 2t^2+t-1=0 \\ -1<t<1 \end{cases} \Rightarrow D=1+8=9 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -1<t<1 \\ x_1=\dfrac{-1+3}{4}=\dfrac{1}{2} \\ x_2=\dfrac{-1-3}{4}=-1 \text{ нуд} \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos\alpha=\dfrac{1}{2}$; тк $0<\alpha<180 \Rightarrow$ ~~Тк 0<α~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

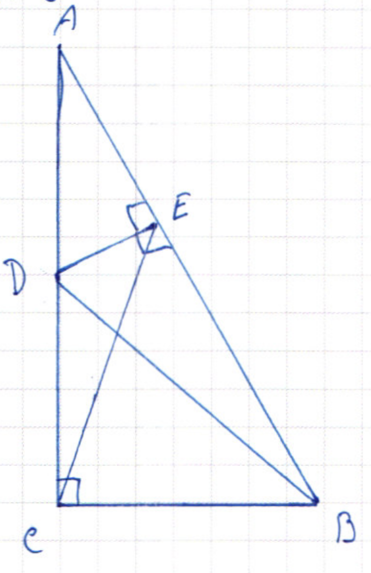
№4 - продолжение

$\Rightarrow$ ТК $\begin{cases} 0^\circ < \alpha < 180^\circ \\ \cos\alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = 60^\circ \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Рассмотрим $\Delta HBC \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{HC}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{HC} = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{3}}$

№5



Дано: $\angle CED = 45^\circ$, $DE \perp AB$, $\angle ABC = 90^\circ$, $CB = \sqrt{29}$, $AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$

ТК $\angle DEB + \angle DCB = 180^\circ \Rightarrow DEBC$ - вписанный $\Rightarrow \angle DEC = \angle DBC = 45^\circ$ (ТК опираются на DC) $\Rightarrow \angle CDB = 180 - \angle DCB - \angle DBC = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ \Rightarrow$ ТК $\angle DBC = \angle BDC \Rightarrow \Delta DBC$ - равнобедренный с основанием $BD \Rightarrow CD = BC = \sqrt{29}$. $\Rightarrow AD = AC - DC = \frac{5\sqrt{29}}{2} - \sqrt{29} = \frac{3\sqrt{29}}{2} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{29}\cdot 2\cdot 3}{\sqrt{29}\cdot 2\cdot 5} = \frac{3}{5}$; $AB = \sqrt{29 + \frac{25\cdot 29}{4}} = \sqrt{\frac{29\cdot(25+4)}{4}} = \frac{29}{2}$. Пусть $\angle ABC = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BAC = 180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha \Rightarrow \angle ADE = 180 - \angle AED - \angle EAD =$

$= 180 - 90 - \cancel{180}\ 90 + \alpha = \alpha \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta ADE \Rightarrow k = \frac{AB}{AD} =$

$= \frac{29\cdot 2}{2\cdot 3\cdot\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{29}}{3}$; $k^2 = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}$; $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC\cdot BC = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{29}\cdot\frac{5\sqrt{29}}{2} =$

№5 - продолжение

$= \dfrac{5\cdot 29}{4} \Rightarrow$ ТК $k^2 = \dfrac{S\Delta ABC}{S\Delta ADE} \Rightarrow S\Delta ADE = \dfrac{S\Delta ABC}{k^2} = \dfrac{5\cdot 29\cdot 9}{4\cdot 29} = \dfrac{45}{4}$

Ответ: $S\Delta AED = \dfrac{45}{4}$; $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{3}{5}$.

№6

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6 \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 - |3x| - |2y| < |6 - 3x - 2y| \\ (x-1)^2 + \left(y - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 \le \left(\sqrt{1 + \sqrt{\frac{3}{2}}}\right)^2 \end{cases}$$ - уравнение окружности с центрам $\left(1; \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ и радиусам $\sqrt{1 + \sqrt{\frac{3}{2}}}$

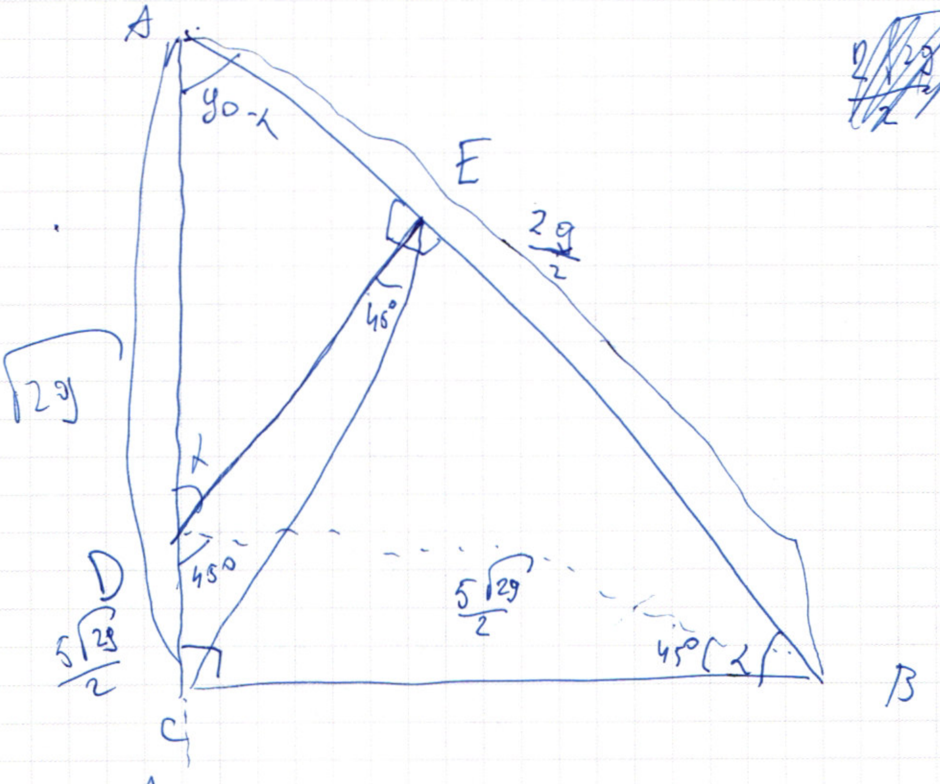
$|6 - 3x - 2y| - 6 + |3x| + |2y| > 0$

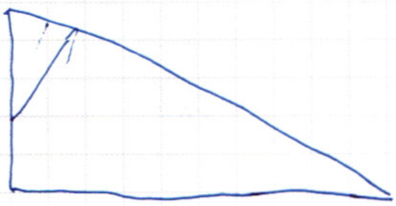
$|6 - 3x - 2y| - 6 + |3x| + |2y| = 0$

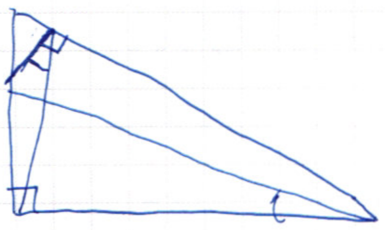
$6 - 3x - 2y < 0 \Rightarrow 2y > 6 - 3x \Rightarrow y > \dfrac{6 - 3x}{2}$

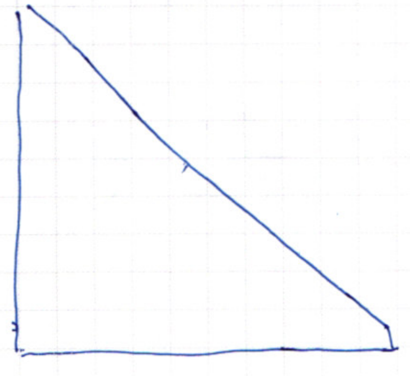
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

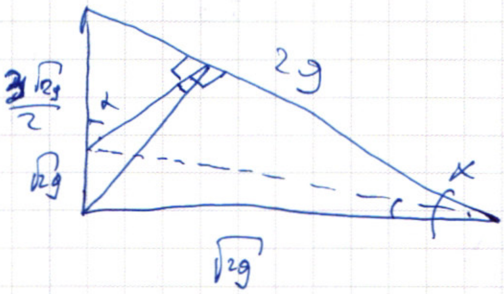
$$\frac{29\cdot 2}{2\cdot 3\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{29}}{3}$$











$3\cdot 29$

$K=\frac{29\cdot 2}{3\sqrt{29}}=\frac{2\sqrt{29}}{3}$

$S_б=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{29}\sqrt{29}}{2}=\frac{3\cdot 29}{4}$

$\frac{3\sqrt{29}}{}=\frac{4\cdot 29}{9}$

$9S_x=$

$S_x=\frac{27}{16}$

$2\sin^2\alpha=1-\cos\alpha$

$2\sin^2\alpha-1=\cos\alpha$

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$2-2\cos^2\alpha-1=\cos\alpha$

$2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1=0$

$2x^2+x-1=0$

$D=1+8=9$

$x=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2}$

$K\ \frac{29\cdot 2}{3\sqrt{29}}=\frac{2\sqrt{29}}{3}$

$K^2=\frac{S_б}{S_x}\Rightarrow S_x=\frac{S_б}{K^2}=$

$=\frac{3\cdot 29\cdot 9}{4\cdot 4\cdot 29}=\frac{27}{16}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot(x-3)} \leq 0$$

I 0 II 1 III 3 IV

(I)

$$\frac{x^2-2x+5+4x-4}{4x^2-12x+x^2-3x} = \frac{x^2+2x+1}{5x^2-15x} \leq 0$$

$$\frac{(x+1)^2}{5x(x-3)} \leq 0 \qquad F(x)=\frac{(x+1)^2}{5x(x-3)}; \quad F(x)=0 \Rightarrow$$

Найдём нули числителя и нули знаменателя

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1 \\ 5x(x-3)\neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq 3 \\ x=-1 \\ x\leq 0 \end{cases}$$

+ −1 + 0 − 3 + x

$$\begin{cases} x\in\{-1\}\cup(0;3) \\ x\leq 0 \end{cases} \Rightarrow x=-1$$

(II)

$$\frac{x^2-2x+5+4x-4}{4x^2-12x-x^2+3x} \leq 0 \qquad F(x)=\frac{x^2+2x+1}{3x^2-9x}; \; F(x)=0 \Rightarrow \qquad x\in(0;1]$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{3x(x-3)}=0 \Rightarrow \begin{cases} x\neq 3 \\ x=-1 \\ x\neq 0 \end{cases}$$

+ −1 + 0 − 3 +

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

3) $x \in [1;3)$

$$\frac{x^2-2x+5-4x+4}{4x^2-12x+x^2+3x} \leq 0$$

$f(x) = \frac{x^2-6x+9}{3x^2-9x}$; $f(x)=0 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{3x(x-3)} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x\neq 0 \\ x\neq 3 \end{cases}$

+ 0 − 3 +

$\Rightarrow x \in [1;3)$

4) $x \in (3;+\infty)$

$$\frac{x^2-2x+5-4x+4}{4x^2-12x+x^2-3x} = \frac{x^2-6x+9}{5x(x-3)} = \frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x\neq 0 \\ x\neq 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ + 0 − 3 + x

$\Rightarrow x \in \varnothing \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing \\ x=-1 \\ x \in (0;1] \\ x \in [1;3) \end{array}\right. \Rightarrow x \in \{-1\} \cup (0;3)$

№1 ✓

$\begin{cases} x > 25 \\ x < 50 \\ y > 50 \\ y < 75 \end{cases}$ ⇒

11111

111

5

1

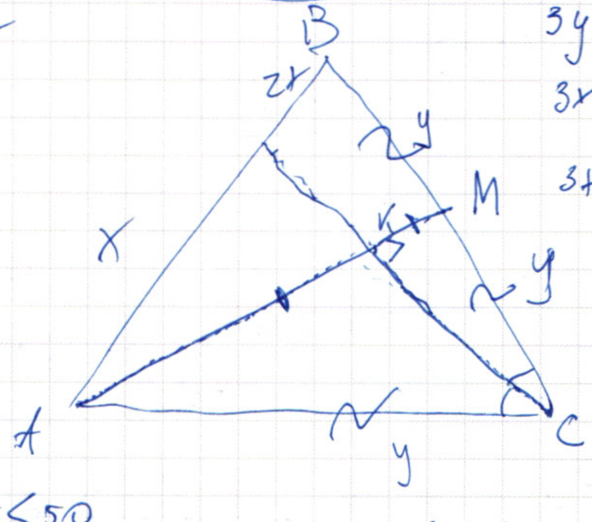
№2 26

наим. $y=1$

наим.

$3x+3y=3000$

№2



4y < 300

y < 75

x < 50

6x < 300

3y > 3x

3x+y > 2y ⇒ 3x > y

3x > −y

x+y = 100

4x > 100

x > 25

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

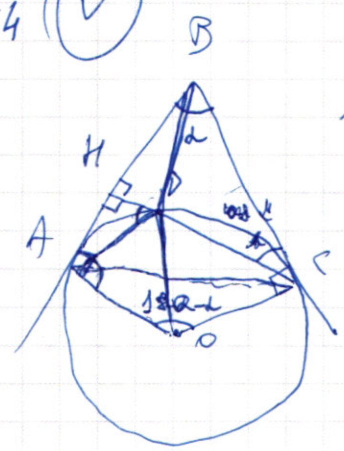
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (V)



$\frac{AB}{CH} = ? = \frac{1}{\sin\alpha}$

$S\triangle ABD = 15$

$R = 6$

$AC = \sqrt{36+36+2\cdot 36\cdot\cos\alpha} \Rightarrow 6\sqrt{2(1+\cos\alpha)}$

$\frac{AC}{2\sin\alpha} = 6 \Rightarrow \frac{6}{2\sin\alpha} = 6\cdot\sqrt{2(1+\cos\alpha)}$

$2\sin\alpha\sqrt{2(1+\cos\alpha)} = 1$

$8\sin^2\alpha(1+\cos\alpha) = \sqrt{8(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)^2} = 1$

$8\sin\alpha^2(1+\cos\alpha) = 1$

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$\cancel{8\sin^2\alpha + 8\sin^2\alpha}$

$\left(1-8\sin^2\alpha = 8\sin^2\alpha\left(\sqrt{1-\sin^2\alpha}\right)\right)^2$

$1-16\sin^2\alpha+64\sin^4\alpha = 64\sin^2\alpha - 64\sin^4\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 1-16\sin^2\alpha+64\sin^4\alpha \Rightarrow (8\sin^2\alpha-1)^2 = 0 \Rightarrow$

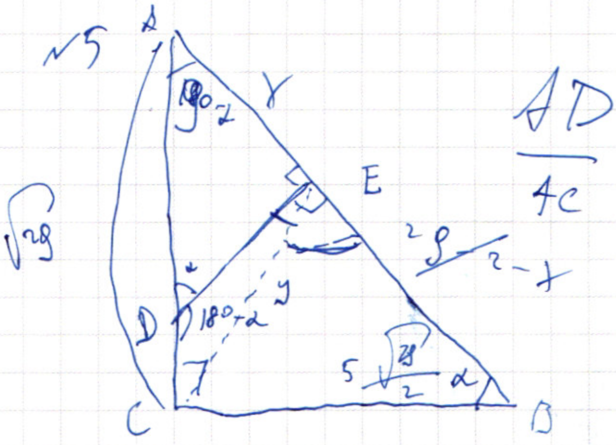
$\Rightarrow 8\sin^2\alpha = 1$

$\begin{cases}\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{8}} \\ \sin\alpha > 0\end{cases} \Rightarrow \sin\alpha = \cancel{\frac{\sqrt{8}}{8}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \Rightarrow \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{8}}{1} \Rightarrow$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№5



$\frac{AD}{AC}$

$S\triangle AED$

$\frac{25\cdot 29}{4}$

$AC=\sqrt{29}$

$BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$

$\angle CED=45^\circ$

$\sqrt{29+\frac{25\cdot 29}{4}}=\frac{(25+4)29}{4}=\frac{29}{2}$

$(x^i+x^{i-1}+\ldots+1)p+k=p$ $\quad k=p(x^i+x^{i-1}+\ldots+1)$

$29=x^2+y^2+xy\sqrt{2}$

3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

№7

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=p$

16 17 18 19

$f(\frac{x}{y})<0$, если $\frac{x}{y}$ ~~~~ не простое =>

$f(ab)=abx^i+ab^{i-1}+\ldots+ab+k|x|+3 : 20$ числ

$f(a)=ax^i+bx^{i-1}+\ldots$

$(a+b)x^i$

$(a+b-ab)x^i+\ldots(a+b-ab)=0$ $\quad ab>0$

$\underbrace{(x^i+x^{i+1}+\ldots+1)}_{=0}(a+b-ab)+k=0$

$a+b>ab$ $\quad a^2+b^2>a\cdot b(ab-2)$

$a^2+b^2+2ab>a^2b^2$ $\quad ab<4$

$a^2+b^2>a^2b^2(ab-2)$ $\quad (ab-a-b)(x^i+\ldots+1)=k$

$a^2+b^2=a^2b^2(ab-2)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)