МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $\underset{BC}{\cancel{AC}} = \sqrt{29}$, $\underset{AC}{\cancel{BC}} = \frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y| > 6, \\ x^2-2x-3y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 19$, $3 \leqslant y \leqslant 19$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

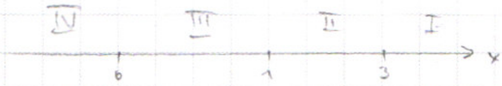
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

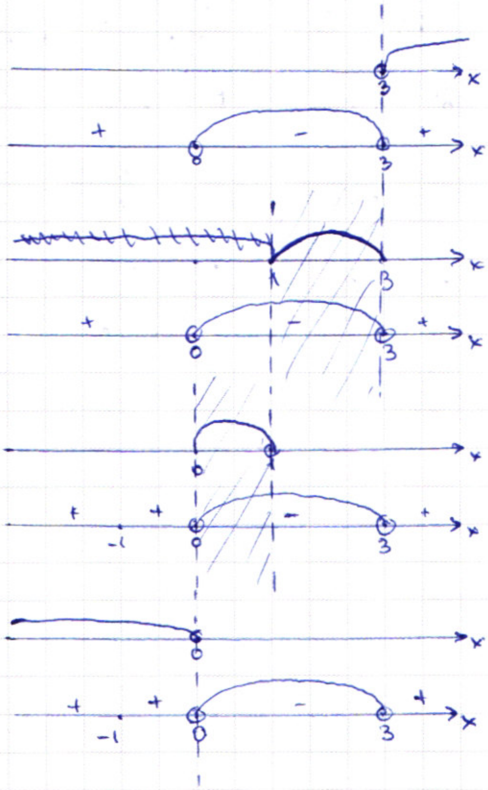
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1



$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\leq 0$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x>3 \\ \dfrac{x^2-2x+5-4x+4}{4x^2-12x+x(x-3)}\leq 0\end{cases} \\ \begin{cases} 1\leq x\leq 3 \\ \dfrac{x^2-2x+5-4x+4}{4x^2-12x+x(3-x)}\leq 0\end{cases} \\ \begin{cases} 0\leq x<1 \\ \dfrac{x^2-2x+5+4x-4}{4x^2-12x+x(3-x)}\leq 0\end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ \dfrac{x^2-2x+5+4x-4}{4x^2-12x+(-x)(3-x)}\leq 0\end{cases}\end{array}\right.
\qquad
\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x>3 \\ \dfrac{\overset{\geq 0}{(x-3)^2}}{5x(x-3)}\leq 0\end{cases} \\ \begin{cases} 1\leq x\leq 3 \\ \dfrac{\overset{\geq 0}{(x-3)^2}}{3x(x-3)}\leq 0\end{cases} \\ \begin{cases} 0\leq x<1 \\ \dfrac{\overset{\geq 0}{(x+1)^2}}{3x(x-3)}\leq 0\end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ \dfrac{\overset{\geq 0}{(x+1)^2}}{5x(x+3)}\leq 0\end{cases}\end{array}\right.$$



$x\in(0;\ 3)$

Ответ: $x\in(0;\ 3)$

ОДЗ: $xy\geq 0$

№3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9\end{cases}\qquad \begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ y=\dfrac{9-x^2}{2}\end{cases}\qquad \begin{cases} \dfrac{9-x^2}{2}-2x=\sqrt{x\cdot\dfrac{9-x^2}{2}} \\ y=\dfrac{9-x^2}{2}\end{cases}\quad |\cdot 2$$

$$9-x^2-4x=2\sqrt{\frac{9x-x^3}{2}}\qquad |\wedge 2$$

$$(9-x^2-4x)^2=4\cdot\frac{9x-x^3}{2}$$

$$x^4+16x^2+81-18x^2+8x^3-72x=18x-\cancel{18}^{2}x^3$$

$$x^4+10x^3-2x^2-90x+81=0$$

№4 (продолжение)

3) $AC = \sqrt{12AH}$

4) По т. Пифагора $AH^2 + HC^2 = AC^2$

$HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{12AH - AH^2}$

5) $\triangle AHD \sim \triangle ACH$ по 2 углам ($\angle 3 = \angle 4 = \frac{1}{2} \cup AD$, $\angle AHC$ – общий),

$\frac{AC}{AD} = \frac{AH}{DH} = \frac{CH}{AH}$

$DH = \frac{AH^2}{CH} = \cancel{\frac{AH^3}{\sqrt{12AH}\,CH}} = \frac{AH^2}{\sqrt{12AH - AH^2}} = \frac{AH\sqrt{AH}}{\sqrt{12 - AH}} = \frac{AH\sqrt{AH}(\sqrt{12+AH})}{12 - AH} = \frac{AH\sqrt{12AH - AH^2}}{12 - AH}$

6) $S_{ADB} = \frac{1}{2} DH \cdot AB$

$AB = \frac{2S}{DH} = \frac{2 \cdot 15}{\frac{AH^2}{\sqrt{12AH - AH^2}}} = \frac{30\sqrt{12AH - AH^2}}{AH^2}$

7) $\frac{AB}{CH} = \frac{\frac{30\sqrt{12AH - AH^2}}{AH^2}}{\sqrt{12AH - AH^2}} = \frac{30}{AH^2}$

8)

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № [illegible]

(Нумеровать только чистовики)

№3 (продолжение)

$x^4+10x^3-2x^2-90x+81=0$

По схеме Горнера!

	1	10	-2	-90	81	
1	1	11	9	-81	0	+
-9	1	2	-9	0	+	

$(x-1)(x+9)(x^2+2x-9)=0$

$D=4+4\cdot 9=40$

$x=\frac{-2\pm 2\sqrt{10}}{2}$

$x=-1\pm\sqrt{10}$

$$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-9 \\ x=\sqrt{10}-1 \\ x=-\sqrt{10}-1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y=\frac{9-x^2}{2}=4 \\ y=\frac{9-x^2}{2}=45 \\ y=\sqrt{10}-1 \\ y=-\sqrt{10}-1 \end{array}\right.$$

но $xy>0$, не подходит

Проверка:

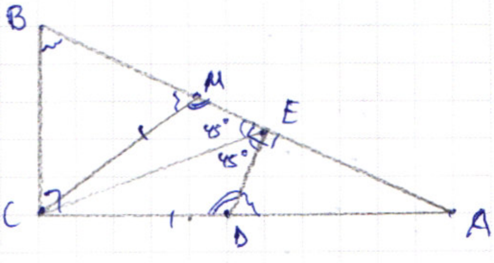
$x=1$, $y=4$ $\begin{cases} 4-2\cdot 1=\sqrt{1\cdot 4} \\ 2\cdot 4+1^2=9 \end{cases}$ ✓

$x=\sqrt{10}-1$, $y=\sqrt{10}-1$ $\begin{cases} \sqrt{10}-1-2\cdot(\sqrt{10}-1)=\sqrt{(\sqrt{10}-1)^2} \\ 2(\sqrt{10}-1)+(\sqrt{10}-1)^2=9 \end{cases}$ $\begin{cases} -\sqrt{10}+1=\sqrt{10}-1 \\ 2\sqrt{10}-2+11-2\sqrt{10}=9 \end{cases}$ ✗

$x=-\sqrt{10}-1$, $y=-\sqrt{10}-1$ $\begin{cases} -\sqrt{10}-1-(-\sqrt{10}-1)=\sqrt{(-\sqrt{10}-1)^2} \\ 2(-\sqrt{10}-1)+(-\sqrt{10}-1)^2=9 \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{10}+1=\sqrt{10}+1 \\ -2\sqrt{10}-2+2\sqrt{10}+11=9 \end{cases}$ ✓

Ответ: $(1;4)$, $(-\sqrt{10}-1;\ \sqrt{10}-1)$

№5



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C=90°$, $D\in AC$, $E\in AB$, $DE\perp AB$, $BC=\sqrt{29}$, $AC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, $\angle CED=45°$

Найти: $\frac{AD}{AC}$, S_{AED}

Решение:

1) $\angle BED=90°$, $\angle CED=45°$, $\angle BEC=45°=\angle CED$

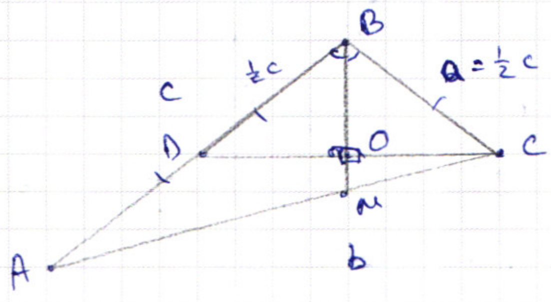
2) Доп. постр. ~~$CM=CD$~~, $ME=ED$

3) $\triangle CME=\triangle CED$ по 1 признаку (CE – общ. сторона, $\angle BEC=\angle CED$, $ME=ED$), $\angle CME=\angle CDE$, $CM=CD$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$P=300$ – периметр
a, b, c – стороны
$a \in N$
$b \in N$
$c \in N$
BM – бисс., CD – медиана, $BM \perp CD$



Кол-во Δ = ?

Решение:

1) $\Delta BOD = \Delta BOC$ по стороне и 2 углам (BO - общ., $\angle DOB = 90^\circ = \angle BOC$, $\angle DBO = \angle OBC = \frac{1}{2}\angle B$) $\Rightarrow$ $BC = DB$

2) $DB = \frac{1}{2}AB$

$a = \frac{1}{2}c$

3) $P = a+b+c = \frac{1}{2}c + c + b = b + 1{,}5c = 3a+b$

4) По неравенству Δ:

$\begin{cases} a+b>c \\ a+c>b \\ b+c>a \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{2}c+b>\frac{2}{2}c \\ \frac{1}{2}c+c>b \\ b+c>\frac{1}{2}c \end{cases}$ $\begin{cases} b>\frac{1}{2}c \\ 1{,}5c>b \\ b>-\frac{1}{2}c \end{cases}$ – $b\in N$, всегда

$a = \frac{1}{2}c$

$\begin{cases} b>a \\ 3a>b \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3a+b=300 \\ b>a \\ 3a>b \end{cases}$ $\begin{cases} 3a=300-b \\ 3a>b>a \end{cases}$ $\begin{cases} -a>-b>-3a \\ 3a=300-b \end{cases}$ $|+300$

$300-a>300-b>300-3a$
$300-a>3a>300-3a$
$\begin{cases} 300-a>3a \\ 3a>300-3a \end{cases}$ $\begin{cases} 4a<300 \\ 6a>300 \end{cases}$ $\begin{cases} a<75 \\ a>50 \end{cases}$ $50<a<75$ – всего 24

Ответ: 24 треугольников

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (продолжение)

4) $\angle EDA = 180^\circ - \angle CDE = 180^\circ - \angle CME = \angle BMC$

5) $\angle CBA = \cancel{180^\circ - \angle A = \angle}\ 90^\circ - \angle A = \angle EDA = \angle BMC$

6) $\angle BMC = \angle CBA \Rightarrow \triangle CBM$ – р/б, $CB = CM$

7) $CD = CM = BC = \sqrt{29}$

8) $AD = AC - CD = \frac{5\sqrt{29}}{2} - \sqrt{29} = \frac{3\sqrt{29}}{2}$

9) $\frac{AD}{AC} = \frac{\frac{3\sqrt{29}}{2}}{\frac{5\sqrt{29}}{2}} = \frac{3}{5}$

10) $\triangle AED \sim \triangle ABC$ по 2 углам ($\angle A$ – общий, $\angle C = \angle DEA = 90^\circ$),

поэтому $\frac{S_{AED}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2$

11) $S_{ABC} = \frac{1}{2} CB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{5\sqrt{29}}{2} = \frac{5 \cdot 29}{4} = \frac{145}{4}$

12) $AB^2 = AC^2 + BC^2$ по т. Пифагора

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(\sqrt{29})^2 + \left(\frac{5\sqrt{29}}{2}\right)^2} = \sqrt{29 \cdot \left(1 + \frac{25}{4}\right)} = \sqrt{\frac{29^2}{2^2}} = \frac{29}{2}$

13) $S_{AED} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 \cdot S_{ABC} = \frac{AD^2 \cdot S_{ABC}}{AB^2} = \frac{\left(\frac{3\sqrt{29}}{2}\right)^2 \cdot \frac{145}{4}}{\left(\frac{29}{2}\right)^2} = \frac{\frac{9 \cdot 29 \cdot 145}{4 \cdot 4}}{\frac{29 \cdot 29}{4}} =$

$= \frac{9 \cdot \cancel{29} \cdot 5 \cdot \cancel{29} \cdot \cancel{4}}{4 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{29} \cdot \cancel{29}} = \frac{45}{4} = \cancel{10,25}\ 11,25$

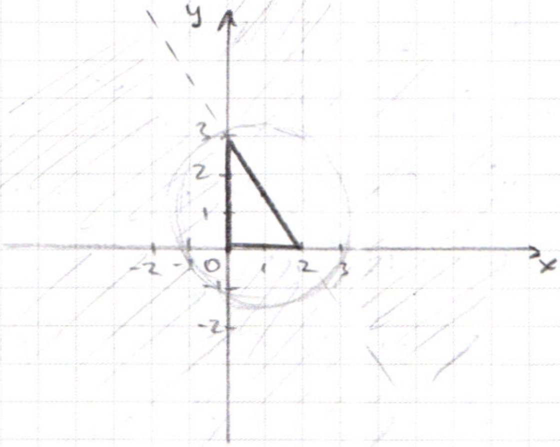
Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$, $S_{AED} = 11,25$

№6

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6 & (1)\\ x^2-2x-3y+y^2\le 0 & (2)\end{cases}$$

1. $|3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6$

$$\left[\begin{aligned} &3x+2y+6-3x-2y>6\\ &3x+2y-6+3x+2y>6\\ &3x-2y-6+3x+2y>6\\ &-3x+2y-6+3x+2y>6\\ &-3x-2y-6+3x+2y>6\\ &3x-2y+6-3x-2y>6\\ &-3x+2y+6-3x-2y>6\\ &-3x-2y+6-3x-2y>6\end{aligned}\right. \qquad \left[\begin{aligned} &6>6 \quad -\\ &6x+4y>12\\ &6x>12\\ &4y>12\\ &-6>6 \quad -\\ &-4y>0\\ &-6x>0\\ &-6x-4y>0\end{aligned}\right. \qquad \left[\begin{aligned} &3x+2y>\cancel{12}\ 6\\ &x>2\\ &y>3\\ &y<0\\ &x<0\\ &3x+2y<0\end{aligned}\right.$$



2. $x^2-2x-3y+y^2\le 0$

$(x^2-2x+1)+y^2-3y+2{,}25\le 3{,}25$

$(x-1)^2+(y-1{,}5)^2\le\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$

Окр. ц. $(1;\ 1{,}5)$ $\quad r=\frac{\sqrt{13}}{2}$

$S=\frac{1}{2}\cdot(3-0)\cdot(2-0)=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2=3$

Ответ: 3

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

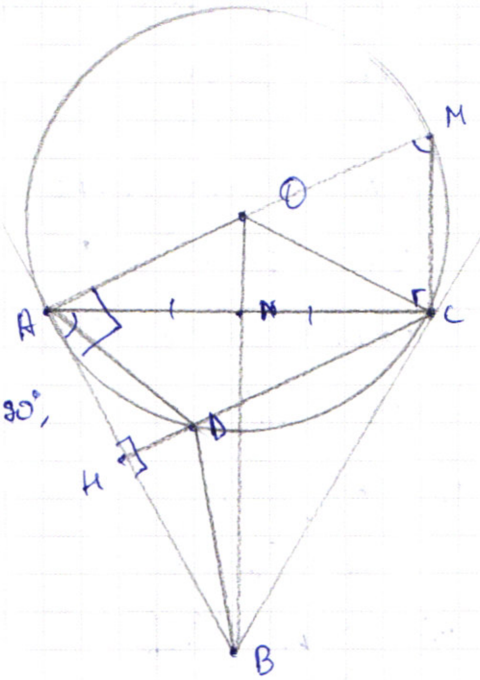
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Дано: окр. центр O, кас. AB и BC,

высота CH, $S_{ABD} = 15$, $R = 6$

Найти: $\frac{AB}{CH}$



Решение:

1) AM – диаметр, $\angle ACM = 90^\circ$

2) $\triangle AMC \sim \triangle ACH$ по 2 углам ($\angle AHC = \angle ACM = 90^\circ$,

$\angle M = \angle HAC$) $\Rightarrow$ $\frac{AM}{AC} = \frac{AC}{CH}$

$CH = \frac{AC^2}{AM} = \frac{AC^2}{2R} = \frac{AC^2}{12}$

3) $S_{AOCB} = 2 S_{AOB} = 2 \cdot \frac{1}{2} AN \cdot OB = \frac{1}{2} AC \cdot OB$

$S_{AOCB} = 2 S_{AOB} = 2 \cdot \frac{1}{2} OA \cdot AB = 6 AB$

$\frac{1}{2} AC \cdot OB = 6 AB$

$AC \cdot OB = 12 AB$

4) По т. Пифагора $OB^2 = OA^2 + AB^2$

$OB = \sqrt{36 + AB^2}$

5) $AC \cdot \sqrt{36 + AB^2} = 12 AB$

$AC = \frac{12 AB}{\sqrt{36 + AB^2}}$

6) $CH = \frac{AC^2}{12} = \frac{12 AB^2}{36 + AB^2}$

7) $\frac{AB}{CH} = \frac{AB}{\frac{12AB^2}{36+AB^2}} = \frac{36 + AB^2}{12 AB}$

8) $\triangle ACH \sim \triangle ADH$ по 2 углам ($\angle AHC = 90^\circ = \angle AHC$, $\angle HAD = \frac{1}{2} \smile AD = \angle ACH$),

$\frac{CH}{AH} = \frac{AH}{DH}$, $DH = \frac{AH^2}{CH}$

9) По т. Пифагора $AH^2+CH^2=AC^2$

$AH=\sqrt{AC^2-\left(\frac{AC^2}{12}\right)^2}=AC\sqrt{1-\frac{AC^2}{144}}=\frac{AC\sqrt{144-AC^2}}{12}$

10) $DH=\frac{AH^2}{CH}=\left(\frac{AC\sqrt{144-AC^2}}{12}\right)^2:\frac{AC^2}{12}=\frac{AC^2(144-AC^2)}{144}:\frac{AC^2}{12}=\frac{144-AC^2}{12}$

11) $S_{ABD}=\frac{1}{2}DH\cdot AB$

$AB=\frac{2S}{DH}=\frac{2\cdot 15}{\frac{144-AC^2}{12}}=\frac{360}{144-AC^2}$

12) $\frac{AB}{CH}=\frac{36+AB^2}{12AB}$

$12AB^2=36CH+CH\cdot AB^2$

$12AB^2=36\cdot\frac{AC^2}{12}+\frac{AC^2}{12}\cdot AB^2 \qquad |\cdot 12$

$144AB^2=36AC^2+AC^2\cdot AB^2$

$AB^2=\frac{36AC^2}{144-AC^2}$

13) $AB=\frac{360}{144-AC^2}$

$AB^2=\frac{360^2}{(144-AC^2)^2}$

14) $\begin{cases} AB^2=\frac{36AC^2}{144-AC^2} \\ AB^2=\frac{360^2}{(144-AC^2)^2}\end{cases}$

$\frac{36AC^2}{144-AC^2}=\frac{360^2}{(144-AC^2)^2}$

$AC^2=\frac{3600}{144-AC^2}$

$t=AC^2$

$144t-t^2=3600$

$t^2-144t+3600=0$

$D=144^2-4\cdot 3600=12^4-4\cdot 3\cdot 12\cdot 100=12^4-12^2\cdot 100=12^2\cdot(144-100)=12^2\cdot 44$

$t=\frac{144\pm 12^2\sqrt{44}}{2}$

$t=72+12\sqrt{11}$

$AC^2=72+12\sqrt{11}$

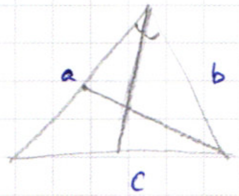
15) $AB=\frac{360}{144-AC^2}=\frac{360}{144-72-12\sqrt{11}}=\frac{360}{72-12\sqrt{11}}=\frac{30}{6-\sqrt{11}}=\frac{30(6+\sqrt{11})}{36-11}=\frac{6(6+\sqrt{11})}{5}$

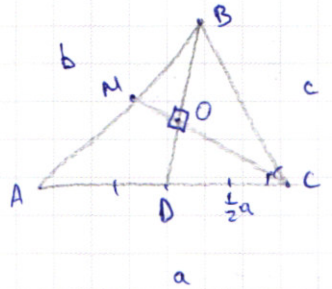
16) $\frac{AB}{CH}=\frac{36+\left(\frac{36+6\sqrt{11}}{5}\right)^2}{12\cdot\frac{6(6+\sqrt{11})}{5}}=\frac{36+\frac{6^2(47+12\sqrt{11})}{5^2}}{2\cdot 6^2\cdot\frac{6+\sqrt{11}}{5}}=\frac{\frac{6^2}{5^2}(25+47+12\sqrt{11})}{\frac{6^2}{5}\cdot 2(6+\sqrt{11})}=\frac{72+12\sqrt{11}}{2\cdot 5\cdot(6+\sqrt{11})}=$

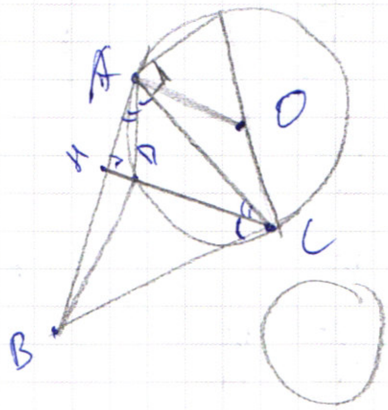
$=\frac{72+12\sqrt{11}}{10\cdot(6+\sqrt{11})}=\frac{6}{10}=0{,}6$

Ответ: $\frac{6}{10}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА







$a+b+c=300$
$a \in N$
$b \in N$
$c \in N$

$\frac{\frac{1}{2}a}{c}=\frac{BO}{OD}$

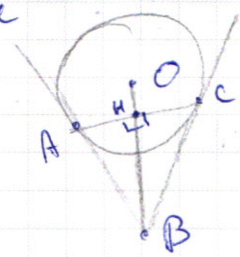
$\frac{\frac{1}{2}a}{c}OD+OD=\left(\frac{a}{2c}+1\right)OD$

$OD=\frac{d}{\frac{a+2c}{2c}}=\frac{2cd}{a+2c}=\frac{1}{3}$

$a+2c=6cd$

$d=\frac{a+2c}{6c}=BD$

$\frac{AC}{HC}=\frac{2R}{AC}$



$AC^2=12CH$

$CH=\frac{AC^2}{}$

$2\sqrt{10}-2$, $11-2\sqrt{10}$

$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$ $|\cdot 4$ $\begin{cases} \cancel{4y-8x=4\sqrt{xy}} \\ \cancel{2y+x^2=9} \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{9-x^2}{2}-2x=\sqrt{\frac{9x-x^3}{2}} \\ y=\frac{9-x^2}{2} \end{cases}$ $|\cdot 2$

27
25

$\cancel{x^2+6y-3x\ldots-9=0}$

$\begin{cases} 9-x^2-4x=2\sqrt{\frac{9x-x^3}{2}} \\ y=\frac{9-x^2}{2} \end{cases}$ $|^2$

$x=1$
$y=4$

$81+x^4+16x^2-18x^2+8x^3-72x=4\cdot\frac{9x-x^3}{2}$

$x^4+8x^3-2x^2-72x+81=18x-18x^3$

$x^4+26x^3-2x^2-90x+81=0$

$\frac{BH}{AB}=\frac{\frac{30}{AB}}{6R}$

$\frac{BH}{AB}=\frac{30}{6AB}$

$BH=5$

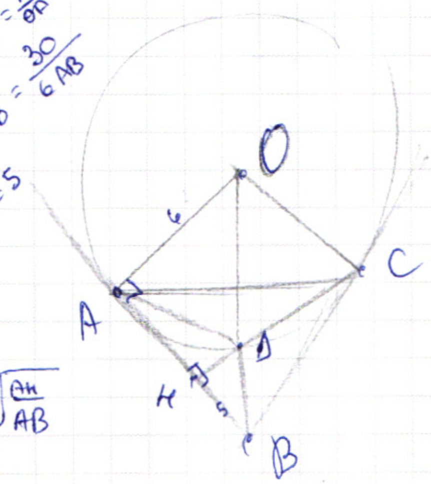
	1	11	9	-81
-9	1	2	-9	

$\cancel{2\sqrt{10}-2}+\sqrt{10}$

$2\sqrt{10}-2=1-\sqrt{10}$

$\sqrt{10}-1-2\sqrt{10}+2$

17
81
98
12
80
88
22
16

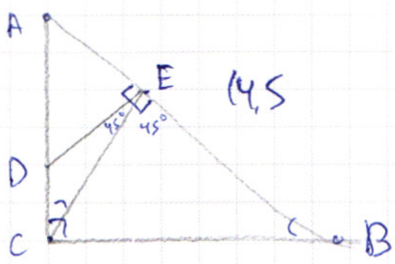


$S_{ABD}=15=\frac{1}{2}DH\cdot AB$

$R=6$

Найти: $\frac{AB}{CH}$

$\sqrt{\frac{S_{ACH}}{S_{ABC}}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}AH\cdot HC}{\frac{1}{2}CH\cdot AB}}=\sqrt{\frac{AH}{AB}}$



14,5

$AC = \sqrt{29}$

$BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$

$\angle CED = 45^\circ$

Найти: $\frac{AD}{AC}$, S_{AED}

$725 \mid 25$
$50 \quad 29$
225

$\cancel{\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC}}$

$\frac{DE}{CE} = \frac{EC}{EB} = \frac{CD}{CB}$

$x \qquad 2,5x$

$x^2 \qquad 6,25x$

$7,25x \qquad \sqrt{7,25 \cdot 29} =$

$= \sqrt{0,25 \cdot 29^2} = 29 \cdot 0,5 =$

$= 14,5$

$\cancel{\frac{AD}{\sqrt{29}} = \frac{DE}{\frac{5}{2}\sqrt{29}}}$

$\cancel{AD = \frac{2}{5} DE}$

$AE = 2,5\,DE$

$\cancel{EB = AB - AE = \frac{AD \cdot AC}{AE} - 2,5\,DE = \frac{AD\sqrt{29}}{2,5\,DE}} \quad \cancel{DE \cdot \frac{5}{2} = \frac{2}{5}\sqrt{29}\,AD} \quad -\frac{5}{2}DE$

$$\begin{cases} \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \\ \frac{DE}{CE} = \frac{CE}{EB} = \frac{CD}{CB} \end{cases}$$

$AE = 2,5\,DE$

$BE = 14,5 - 2,5\,DE$

$EC = \sqrt{BE \cdot DE}$

$CD = \frac{\sqrt{BE \cdot DE} \cdot CB}{BE} = \cancel{\sqrt{14,5 - 2,5\,DE}} \sqrt{\frac{DE}{BE}} \cdot \frac{5\sqrt{29}}{2} =$

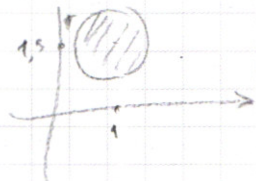
13

$x \le 0$
$y \ge 0$

$x^2 - 2x - 3y + y^2 \le 0$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 3y + 2,25 \le 3,25$

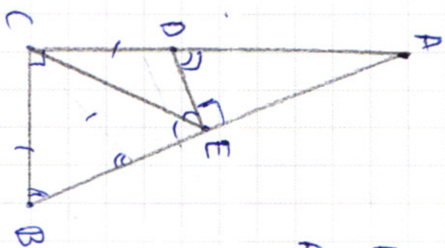
$(x-1)^2 + (y-1,5)^2 \le 3,25$



$x \ge 0$
$y \ge 0$
$6 > \cancel{0}$

$x \ge 0$
$y \le 0$
$6 - 4y \ge 6$
$y \le 0$

$AB = 14,5$



$BC = \sqrt{29}$

$AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$

$\angle CED = 45^\circ$

Найти: $\frac{AD}{AC}$

$S_{AED} = ?$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (продолжение)

$x^4+10x^3-2x^2-90x+81=0$

По схеме Горнера:

	1	10	-2	-90	81	
1	1	11	9	-81	0	+
3	1	14	51			−
-3	1	8	15			−
-9	1	2	-9	0		+

$(x-1)(x^3+11x^2+9x-81)=0$

$(x-1)(x+9)(x^2+2x-9)=0$

$D=4+4\cdot 9=40$

$x=\frac{-2\pm 2\sqrt{10}}{2}=-1\pm\sqrt{10}$

$(x-1)(x+9)(x+1+\sqrt{10})(x+1-\sqrt{10})=0$

$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-9 \\ x=\sqrt{10}-1 \\ x=-\sqrt{10}-1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} y=\frac{9-x^2}{2}=\frac{9-1^2}{2}=4 \\ y=\frac{9-x^2}{2}=\frac{9-(-9)^2}{2}=\frac{9+81}{2}=45 \\ y=\frac{9-x^2}{2}=\frac{9-(\sqrt{10}-1)^2}{2}=\frac{9-11+2\sqrt{10}}{2}=\sqrt{10}-1 \\ y=\frac{9-x^2}{2}=\frac{9-(-\sqrt{10}-1)^2}{2}=\frac{9-11-2\sqrt{10}}{2}=-\sqrt{10}-1 \end{array}\right.$

$xy=y^2+4x^2-4xy$

$y^2-5xy+4x^2=0$

но $xy\geq 0$ по ОДЗ
не подходит

$(y-4x)(y-x)=0$

Ответ: $(1;\ 4)$, $(\cancel{\sqrt{10}-1;\ \sqrt{10}-1})$, $(-\sqrt{10}-1;\ -\sqrt{10}-1)$

$\sqrt{AC^2-\frac{AC^4}{144}}=AC\sqrt{1-\frac{AC^2}{144}}=\frac{AC\sqrt{144-AC^2}}{12}$

$\cancel{(2x-y)}(2x+y)=0$

$12AB=AC\cdot OB$

$12AB=AC\cdot\sqrt{36+AB^2}$

$144AB^2=AC^2(36+AB^2)$

$AC^2=\frac{144AB^2}{36+AB^2}$ №4 $\frac{AC^2}{12}$ $\frac{12AB^2}{AB^2+36}$ $\frac{AB}{\frac{12AB}{AB^2+36}}=\frac{AB^2+36}{12AB}$

Дано: окр. ц. O, касается AB и BC в (.)A и (.)C, CH – высота, $S_{ABO}=15$, $R=6$

$12AB^2=36CH+CH\cdot AB^2$

$3AC^2=12AB^2-\frac{AC^2}{12}\cdot AB^2$

$36AC^2=144AB^2-AC^2\cdot AB^2$

Найти: $\frac{AB}{CH}=\frac{30}{AH^2}$

$\frac{CH}{DH}=\frac{S_{ABC}}{15}$

$AB^2=\frac{36AC^2}{144-AC^2}=\cancel{\frac{360^2}{(144-AC)^2}}=\frac{360^2}{(144-AC)^2}$

Решение:

$\cancel{30\sqrt{6}}$

$\cancel{30\sqrt{6}}$

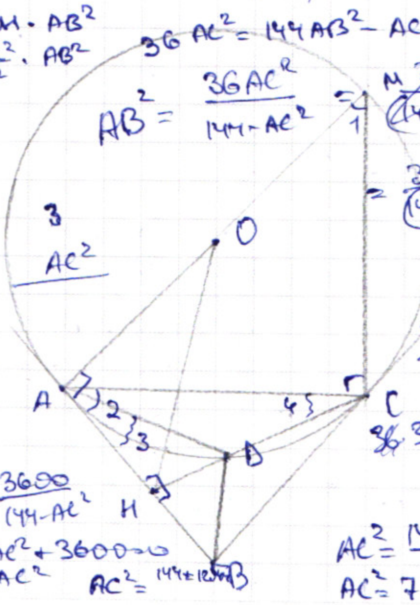
$\frac{CH^2}{AH^2}=\frac{12AH-HA^2}{AH^2}=\frac{12-AH}{AH}$ $\frac{3}{AC^2}$

1) AM – диаметр $\frac{30(6+\sqrt{11})}{25}=\frac{5(\sqrt{11}+6)}{4}$

2) $\angle ACM=90^\circ$ т.к. опир. на диаметр

$\triangle ACM\sim\triangle ACH$ ($\angle 1=\angle 2=\frac{1}{2}\cup AC$, $\angle ACM=\angle AHC$),

$\frac{AM}{AC}=\frac{AC}{AH}$, $AC=\sqrt{2R\cdot AH}=\sqrt{12AH}$



$\frac{360}{72-12\sqrt{11}}$

$36\cdot 36\cdot 100$

$\frac{30}{6-\sqrt{11}}$

$AC^2=\frac{3600}{144-AC^2}$

$AC^4-144AC^2+3600=0$

$t=AC^2$

$144\cdot 144-4\cdot 3600=$
$=12^2\cdot 12\cdot 12\cdot 100=12^2(144-100)=12^2\cdot 44$

$AC^2=\frac{144\pm 24\sqrt{11}}{2}$

$AC^2=72+12\sqrt{11}$

$\frac{5(6+\sqrt{11})}{4}$ $\frac{25\cdot(47+12\sqrt{11})}{16}+36$

$\frac{4}{25}$ $\frac{\sqrt{11}}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

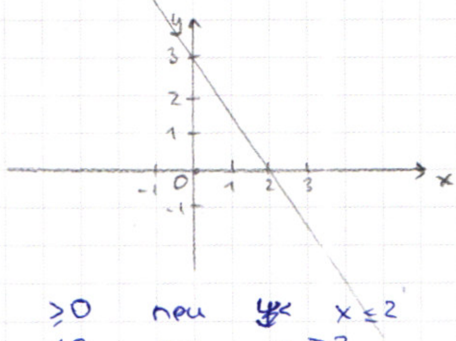
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

N6

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6-3x-2y| > 6 & 1 \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \le 0 & 2 \end{cases}$$

$6 - 3x - 2y = 0$

$y = \frac{6-3x}{2} = -1{,}5x + 3$



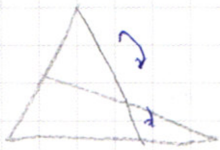
≥ 0 при $x \le 2$

< 0 при $x > 2$

1. $|3x| + |2y| + |6-3x-2y| > 6$

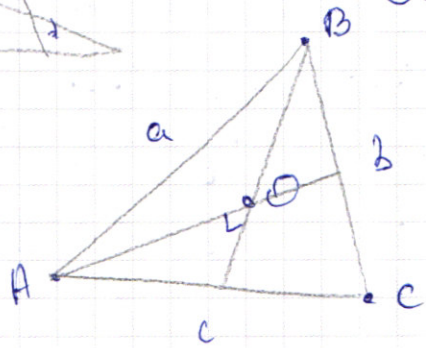
$\begin{cases} \cancel{x \ge 0} \\ y \end{cases}$

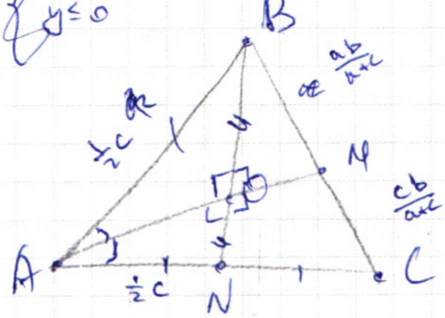
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 3x + 2y + 6 - 3x - 2y > 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0 \\ y < 0 \\ 3x - 2y + 6 - \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 0 \\ y \le 0 \end{cases} \end{array}\right.$$



$\begin{cases} a < 75 \\ a > 50 \end{cases}$

$50 < a < 75$





b

c

$\frac{BM}{BC}$

~~$3a > 300 - 3a > a$~~

~~$6a > 300$~~

$\begin{cases} 3a + b = 300 \\ a + b > 2a \\ 2a + a > b \\ 2a + b > a \end{cases}$

$\frac{a}{x} = \frac{c}{y}$

$\begin{cases} 3a + b = 300 \\ b > a \\ 3a > b \end{cases}$

$\frac{BO}{ON} \cdot \frac{AN}{AC} \cdot \frac{MC}{BM} = 1$

$\frac{a}{\frac{1}{2}c} \cdot \frac{\frac{1}{2}c}{c} \cdot \frac{c}{a} = 1$

$x +$

$y = \frac{cx}{a} =$

$ay = cx$

$a(b - x) = cx$

$ab - ax = cx$

$x = \frac{ab}{a+c}$

$b - \frac{ab}{a+c}$

$3a > b > a$

$\begin{cases} 3a > b \\ 3a + b = 300 \\ 3a > b > a \end{cases}$

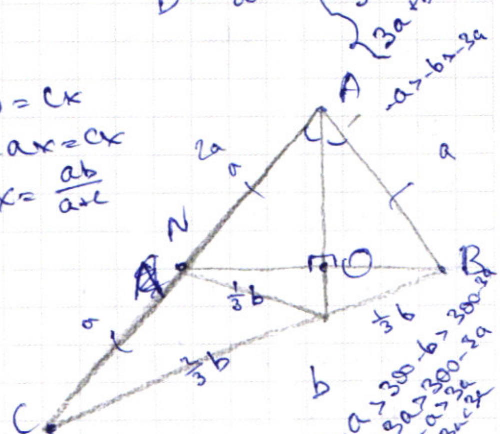
$a > b > 3a$

$\overrightarrow{AO} =$

$\overrightarrow{AM} = \frac{c}{a+c}\overrightarrow{AB} + \frac{a}{a+c}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AO} = k \cdot \overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{AO} = \frac{\frac{1}{2}c}{a + \frac{1}{2}c}\overrightarrow{AB} + \frac{a}{\frac{1}{2}c + a} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$



$300 - a > 300 - b > 300 - 3a$

$300 - a > 3a > 300 - 3a$

$300 - a > 2a$

$300 - 3a < 2a$

$\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}c + a} + \frac{\frac{1}{2}c}{a + \frac{1}{2}c} = 1$

$\frac{a}{2a+c} + \frac{c}{2a+c} = 1$

$\frac{a+c}{2a+c} = 1$

$a + c = 2a + c$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)