МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED=45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6, \\ x^2-2x-3y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 19$, $3 \leqslant y \leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

II x и y такие, что x и y - простые и $x-y<0$

~~таким на~~

все простые числа находящиеся ~~в~~ на отрезке $[3;19]$ - 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

чисел удовлетворяющих условию II

для $x=3$, 6 для $x=5$ 5 чисел и т.д.

$S = \cancel{3}\ \frac{6+1}{2}\cdot 6 = 21$

~~x имеет два делителя~~

$f(3)=3$ $\quad f(8)=6$ $\quad f(13)=13$ $\quad f(17)=17$

$f(4)=4$ $\quad f(9)=6$ $\quad f(14)=9$ $\quad f(18)=8$

$f(5)=5$ $\quad f(10)=7$ $\quad f(15)=8$ $\quad f(19)=19$

$f(6)=5$ $\quad f(11)=11$ $\quad f(16)=8$

$f(7)=7$ $\quad f(12)=7$

сделаем перебор чисел удовлетворяющих условиям $3\le x\le 19$, $3\le y\le 19$ и $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

если $x=19$ таких чисел ~~18~~ (y) - (18)

~~для 19 таких чисел 18~~

для $x=18$ - таких y (9)

для $x=17$ - таких y (17)

для $x=16$ - таких y (9)

для $x=15$ - таких y (9)

для $x=14$ - таких y (12)

для $x=13$ - таких y (16)

для $x=12$ - таких y (6)

для $x=11$ - таких y (15)

для $x=9$ - таких y (4)

для $x=8$ - таких y (4)

для $x=7$ - таких y (6)

для $x=6$ - таких y (2)

для $x=5$ - таких y (2)

для $x=4$ - таких y (1)

для $x=3$ - таких y (0)

$S_1 = \cancel{917}\ 9\cdot 3+17+12+16+6+15+2\cdot 4+2\cdot 2+6+1+0=$

$=110$ Ответ: таких пар $(x;y)$ - (110)

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(\cancel{\frac{x}{y}})$

$f(p)=p$

если p-простое

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$f\left(\frac{y}{y}\right) = f(y)+f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$(1)\quad f(1) = f(y)+f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{1}\right) = f(1)+f(1) \Rightarrow$$

$$f(1) = 2f(1) \Leftrightarrow f(1)=0$$

$$(1)\quad -f(y) = f\left(\frac{1}{y}\right)$$

Пусть ~~$f(t)$~~ t - число с простыми множителями $a_1, a_2, a_3 \dots, a_k$, тогда

$$f\left(\frac{x\cdot a_1}{a_1}\right) = f\left(\frac{x}{a_1}\right)+f(a_1) = a_1 + f\left(\frac{x}{a_1}\right) =$$

$$= a_1 + f\left(\frac{x\cdot a_2}{a_1\cdot a_2}\right) = a_1+a_2+f\left(\frac{x}{a_1\cdot a_2}\right)$$

~~если и так далее, значит~~

~~$f(x) = a_1+a_2+\dots a_k$~~

и так далее, последнее преобразование будет:

$$a_1+a_2\dots+a_{k-1}+f\left(\frac{x}{a_1\cdot a_2\dots a_{k-1}}\right) =$$

$$= a_1+a_2\dots+a_{k-1}+f(a_k) = a_1+a_2\dots+a_k$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x)-f(y) =$$

если все простые делители x - $a_1, a_2 \dots, a_k$, а простые делители y - $b_1, b_2 \dots, b_n$:

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = a_1+a_2\dots+a_k - b_1 - b_2 \dots - b_n$$

~~если x и y простые числа, тогда~~

~~$f\left(\frac{x}{y}\right) = x-y$ если будут подходить все числа~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

вся часть ~~окружности~~ круга, которая входит в левую нижнюю четверть

$\begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \\ 2y - 3x + 6 \geq 0 \end{cases}$ (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \\ y \leq 3 - 1{,}5x \end{cases}$: $3x - 2y + 6 - 3x - 2y > 6$

$-4y > 0$

$y < 0$

значит решением неравенства при условии (2) будет все, что ниже прямой $y = 3 - 1{,}5x$ в правой нижней четверти. При объединении этих точек с точками ~~внутри~~ ~~окружности~~ круга получим все точки ~~окружности~~ круга, лежащие в правой нижней четверти.

~~Больше случаев~~ можно не рассматривать ~~не нужно~~

т.к.

$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 3 - 1{,}5x \end{cases}$: $3x + 2y - 3x - 2y + 6 > 6 \Leftrightarrow 6 > 6 \Leftrightarrow \varnothing$

Больше случаев можно не рассматривать т.к. решениями системы уже являются все точки круга лежащие в нижней правой и верхней левой четвертях (а "случаи", где $x \geq 0$, $y \geq 0$ мы все рассм.) (круг не лежит в нижней левой четверти)

Площадь закрашенной фигуры будет площадью круга (S_0) минус площадь $\triangle OFC$ ($S_{\triangle OFC}$)

$S = S_0 - S_{\triangle OFC} = \pi \cdot r^2 - OF \cdot OC \cdot \frac{1}{2} = \pi \cdot 3{,}25 - 3$

Ответ: $S = \pi \cdot 3{,}25 - 3$

№6.

① $\begin{cases} |3x| + |2y| + |6-3x-2y| > 6 \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \geq 0 \end{cases}$

$x^2 - 2x - 3y + y^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1,5)^2 \geq 1,5^2 + 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1,5)^2 \geq 3,25$

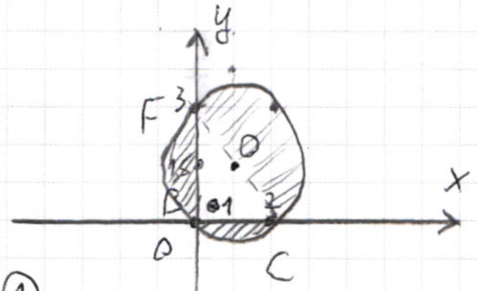
решениями этого неравенства явл. круг с центром в точке $O(1;1,5)$ и $r=\sqrt{1+1,5^2}$

Это ~~круг~~ ~~окружности с центром в точке~~

~~$O(1;1,5)$ и радиусом $r=\sqrt{1^2+1,5^2}$~~

~~решениями этого неравенства будет круг~~!

$r=\sqrt{1^2+1,5^2}$, значит окружность пересекает точку $B(0;0)$, точку $C(2;0)$, и точку $F(0;3)$



$|3x| + |2y| + |6-3x-2y| > 6$

$\begin{cases} 3x \geq 0 \\ 2y \geq 0 \\ 6-3x-2y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y > 3-1,5x \end{cases}$;

$3x + 2y + 3x + 2y - 6 > 6$

$3x + 2y > 6 \Leftrightarrow y > 3 - 1,5x$

прямая $y = 3-1,5x$ проходит через центр окружности. Значит является диаметром.

решениями системы будет половина окружности, которая находится выше прямой $y=3-1,5x$.

①
$\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ 6-3x-2y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 3 - 1,5x \end{cases}$

$2y - 3x + 6 - 3x - 2y > 6$

$-6x > 0$

$x < 0$

решениями этого неравенства будут при условии ① все точки ниже прямой $3-1,5x$ в левой нижней четверти. Если объединить эти точки с точками внутри окружности, то будет

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle ADE = 90 - \angle A$

$\angle B = 90 - \angle A$ $\Rightarrow \angle ADE = \angle B$

~~$\angle AED = \angle C = 90^\circ$~~

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (по двум углам)

т.к. $\angle ADE = \angle B$ и $\angle AED = \angle C = 90^\circ$

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{\frac{29}{2}}{\frac{5\sqrt{29}}{2}} = \frac{29\sqrt{29}}{5 \cdot 29} =$

$= \frac{\sqrt{29}}{5}$ $AD = \frac{AE\sqrt{29}}{5} = \frac{15 \cdot \sqrt{29}}{10} = \frac{3\sqrt{29}}{2}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{\frac{3\sqrt{29}}{2}}{\frac{5\sqrt{29}}{2}} = \frac{3}{5}$

т.к. $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

$k = \frac{AD}{AB} = \frac{\frac{3\sqrt{29}}{2}}{\frac{29}{2}} = \frac{3\sqrt{29}}{29}$

$S_{\triangle ABC} = \frac{CH \cdot AB}{2} = \frac{5 \cdot 29}{4}$

$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = k^2$ $S_{\triangle ADE} = \frac{3 \cdot 29}{29^2} \cdot \frac{5 \cdot 29}{4} =$

$= \frac{15}{4} = 3{,}75$

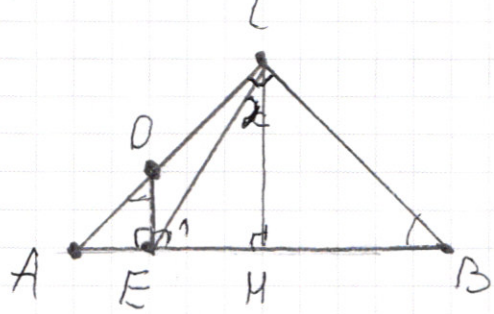
Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$; $S_{\triangle ADE} = 3{,}75$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№5.



Дано:

$DE \perp AB$

$AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$

$BC = \sqrt{29}$

$\angle CED = 45^\circ$

$\angle ABC$ – прямоугольные

$\angle C = 90^\circ$

$AD : AC$ – ?

$S_{\triangle AED}$ – ?

Проведём CH – высоту $\triangle ABC$

$\angle DEH + \angle EHC = 180^\circ$

$\angle DEH$ и $\angle EHC$ – односторонние углы

Значит $DE \parallel HC$, значит $\angle ECH = \angle DEC = 45^\circ$

$\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ \Leftrightarrow \angle 1 = 45^\circ$

$\triangle EHC$ – р/б, значит $EH = EC$

$S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2}$

$S_{\triangle ABC} = \frac{CH \cdot AB}{2}$ $\Rightarrow HC = \frac{AC \cdot BC}{AB}$ (1)

(по т. Пифагора)

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$AB^2 = \frac{25 \cdot 29}{4} + 29 = \frac{29^2}{2^2}$

$AB = \frac{29}{2}$

(1) $HC = \frac{5\sqrt{29} \cdot \sqrt{29}}{2 \cdot 29 \cdot \frac{1}{2}} = 5$

(по т. Пифагора)

$AH^2 + CH^2 = AC^2 \Leftrightarrow AH^2 = \frac{25 \cdot 29}{4} - 25 = \left(\frac{25}{2}\right)^2 \Leftrightarrow AH = \frac{25}{2}$; $AE = AH - EH = \frac{15}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.

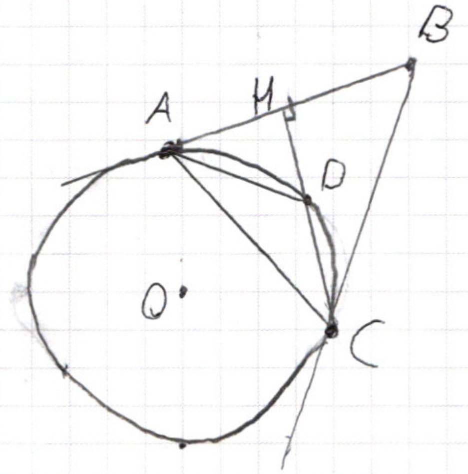
Дано:

O - центр окружности

$DC=6$

$S_{\triangle ABD}=15$

AB и BC касаются окружности в точках A и C соответственно.



☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

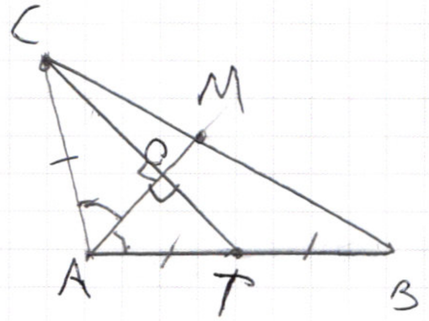
Дано
$P_{ABC}=300$

$AT=TB$

AM-биссектриса

$AM\perp CT$

№2.



O-точка пересечения MA и CT

$\triangle AOC = \triangle OAT$ по катету и углу.

значит $AT = AC$

$AB = \frac{1}{2}CA$ пусть $AC=x$, тогда $AB=2x$

по неравенству треугольника:

$\cancel{2x+}\ AB + AC > CB$

$CB+AC>AB$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x > CB \\ CB > x \end{cases}$

Пусть $CB=t$.

$\cancel{3x>t}$ $\quad t<3x<3t$

$P_{ABC} = 3x+t = 300$

$3x = 300-t$

$t<300-t<3t \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow \quad 75<t<150$

$(300-t)\,⋮\,3$ т.к. $(3\cdot x)\,⋮\,3$

$300\,⋮\,3$, значит $t\,⋮\,3$

$\begin{cases} 75<t<150 \\ t\,⋮\,3 \end{cases}$ на интервале $(75;150)$ чисел кратных 3

26

~~Для каждого~~ каждому t соответствует единственный x

значит всего таких треугольников 26

Ответ: 26 треугольников.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y=4x$:

$2\cdot 4x+x^2=9 \Leftrightarrow x^2+8x-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-9 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-9 \\ y=-36 \end{cases} \end{array}\right.$

т. к. мы решали следствием первое ур-е выполним проверку:

$\begin{cases} x=-1+\sqrt{10} \\ y=-1+\sqrt{10} \end{cases}$:

$y-2x=-1+\sqrt{10}+2-2\sqrt{10}=1-\sqrt{10}<0$

корни не подходят.

$\begin{cases} x=-1-\sqrt{10} \\ y=-1-\sqrt{10} \end{cases}$:

$y-2x=-1-\sqrt{10}+2+2\sqrt{10}=1+\sqrt{10}=\sqrt{(-1-\sqrt{10})^2}$

корни подходят.

$\begin{cases} y=4 \\ x=1 \end{cases}$; $4-2=2=\sqrt{1\cdot 4}$

корни подходят

$\begin{cases} x=-9 \\ y=-36 \end{cases}$; $-36+2\cdot 9=-18<0$

корни не подходят

Ответ: $(-1-\sqrt{10}; -1-\sqrt{10})$; $(1; 4)$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\leq 0$$

ОДЗ: $\begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq 3\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \frac{(|x-1|)^2+4-4|x-1|}{4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(|x-1|-2)^2}{4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|}\leq 0$$

$x\geq 3$:

$$\frac{(|x-1|-2)^2}{x(x-3)(4+1)}\leq 0$$

т.к. $\begin{cases} x\geq 0 \\ x\geq 3\end{cases}$ знаменатель ≥ 0

числитель ≥ 0

$(|x-1|-2)^2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \text{ - не подходит по ОДЗ} \\ x=-1 \end{array}\right.$ | $\varnothing$

$0\leq x<3$:

$$\frac{(|x-1|-2)^2}{x(x-3)(4-\cancel{1})}\leq 0$$

$0\leq x<3$, значит знаменатель <0

числитель обращается в 0, при $\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1\end{array}\right.$ оба зн-я не подходят.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1 (Нумеровать только чистовики)

т.к. числитель ≥ 0
знаменатель < 0

дробь всегда меньше 0, при $0 < x < 3$ | $0 < x < 3$

0 не подходит по ОДЗ

$x < 0$:

$$\frac{(|x-1|-2)^2}{x(x-3)\cdot 5} \leq 0$$

знаменатель > 0 при $x < 0$

$|x-1|-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right.$ | $x=-1$

Ответ: $x \in (0;3) \cup \{-1\}$

№ 3.

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$y-2x=\sqrt{xy} \Rightarrow y^2-4xy+4x^2=xy \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2-5xy+4x^2=0$

$\Leftrightarrow (y-x)(y-4x)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=4x \end{array}\right.$

подставим в II ур-е системы $y=x$:

$x^2+2x-9=0$

$\frac{D}{4}=1+9=10$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{10}}{1}$, значит $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1+\sqrt{10} \\ y=-1+\sqrt{10} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1-\sqrt{10} \\ y=-1-\sqrt{10} \end{cases} \end{array}\right.$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$y^2-4xy+4x^2=xy$

$y^2-5xy+4x^2=0$

$D=25x^2-16x^2=9x^2$

$y=\frac{5x\pm 3x}{2}$

$y=4x$

$y=x$

$y=2x$

$\cancel{x^2+2y}=9$

$x^2+2x=9$

$x^2+2x-9=0$

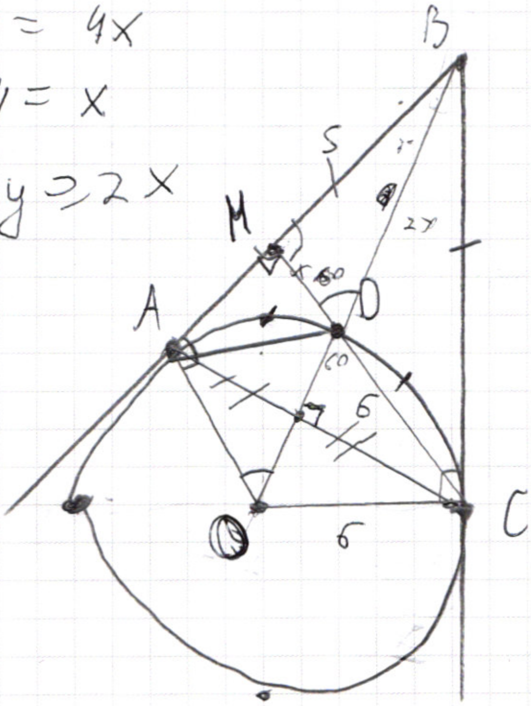
$x=\frac{-1\pm\sqrt{10}}{1}$

$x^2+8x-9=0$

$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-9 \end{array}\right.$

$\frac{D}{4}=16+9=25$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=4 \\ x=1 \end{cases} \\ \begin{cases} y=-36 \\ x=-9 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1-\sqrt{10} \\ y=-1-\sqrt{10} \end{cases} \end{array}\right.$$

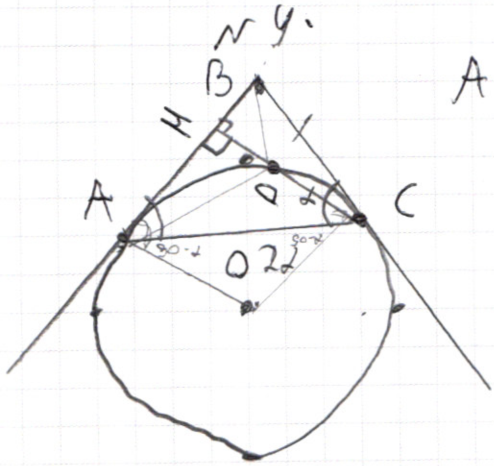


$\frac{MB}{AB}=\frac{MD}{AO}=\frac{MD}{6}$

$\frac{MB}{AB}=\frac{MD}{6}=\frac{\cancel{30}^{5}}{\cancel{6}\cdot\cancel{AB}}$

$MB=5$

№ 4.



$AB:CM$ $\quad S_{\triangle ABD}=15$

$R<6$

$\triangle ABC$ - р/б

$AB:CM=BC:CH$

180

$\frac{MD\cdot AB}{2}=15$

$MD\cdot AB=30$

$CH\cdot AB\cdot\frac{1}{2}=$

$=(DC+DH)\cdot AB\cdot\frac{1}{2}=15+\frac{DH\cdot AB}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

ОДЗ:

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\le 0$$

$$\frac{(|x-1|)^2-4|x-1|+4}{4\cdot x(x-3)+|x|\cdot|x-3|}\le 0$$

$x\ge 3$

$$\frac{(|x-1|-2)^2}{\underbrace{(x-3)}_{\ge 0}\underbrace{(4x+|x|)}_{>0}}\le 0$$

$(=)$ $|x-1|=2$

$\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right.$ $\varnothing$

$0\le x<3$:

$$\frac{(|x-1|-2)^2}{\underset{<0}{(x-3)}(4x-|x|)}\le 0$$

$$\frac{(|x-1|-2)^2}{(x-3)(3x)}\le 0$$

$0<x<3$

Ответ: $x\in(0;3)\cup\{-1\}$

$x<0$:

$$\frac{(|x-1|-2)^2}{(x-3)(5x)}\le 0$$

$x=-1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{HB}{AB}=\frac{HD}{AD} \qquad HD=\frac{30}{AB} \qquad 6^2+$$

$$\frac{HB}{AB}=\frac{HD}{6}=\frac{30}{6AB}=\frac{5}{AB} \qquad \frac{HD}{5}=\frac{CD}{BC}$$

$HB=5$

$5CD=HD\cdot BC$

$5CD=30 \quad CD=6$

$$\frac{HB}{AH+HB}=\frac{BD}{AD}=\frac{BD}{BD+6}$$

$$\frac{5}{AH+5}=\frac{BD}{BD+6}$$

$$|3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6$$

$$(x-1)^2+(y-1,5)^2 - 1 - 1,5^2 \leq 0$$

$$(x-1)^2+(y-1,5)^2 \leq 3,25$$

$$|3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6$$

$\cancel{3x+2x}$ $\begin{cases} 3x+2y\leq 6 \\ 3x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\leq \frac{6-3x}{2} \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\leq 3-1,5x \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$

$6>6: \varnothing$

$\begin{cases} 3x+2y\leq 6 \\ x\leq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad -3x+\cancel{2y}+6-3x-\cancel{2y}>6$

$1-x>1 \Leftrightarrow x<0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

~~из подобия~~

в силу симметрии $D \in OB$

из подобия $\triangle AOB$ и $\triangle ABO$

$BH = 5$

т.к. DB – бисс. $\triangle HBC$

$$\frac{HD}{HB} = \frac{DC}{BC}$$

$$\frac{HD}{5} = \frac{DC}{BC} \qquad AB \cdot HD = 5 \cdot DC$$

$$CD = 6 \quad \frac{30}{5} = 6$$

$$AB = \frac{30 \cdot \sqrt{3}}{5} = 6\sqrt{3} \qquad \frac{AB}{CH} = \frac{AB}{6+HD} =$$

$$\frac{6\sqrt{3}}{6 + \frac{5\sqrt{3}}{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\frac{18+5\sqrt{3}}{3}} = \frac{18\sqrt{3}}{18+5\sqrt{3}}$$

$$\frac{6+HD}{AB} = \frac{6}{AB} + \frac{HD}{AB}$$

$$OC = DC = OD = 6$$

$$\angle ODC = 60^\circ$$

$$\angle HDB = 60^\circ$$

$$AB \cdot HD = 30$$

$$9x^2 - x^2 = 25$$

$$AB \cdot \frac{5}{\sqrt{3}} = 30$$

$$3x^2 = 25$$

$$x = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

$$AB = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

21/31

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{6 + \frac{5\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 3}{18+5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{32+10\sqrt{3}} =$$

512

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=p$ ~~ge~~ p - простое

$3\le x\le 19,\ 3\le y\le 19$ $\ f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$\frac{x}{y}$ - простое $\varnothing$

$x\ne y$

$f(1)=2f(1)\quad f(1)=0$

~~$f(2)+...$~~ $\quad f\left(\frac{y}{3}\right)=f(y)+f\left(\frac{1}{3}\right)$

$f(\frac{1}{y}$

$f(1)=f\left(\frac{1}{y}\right)+f(y)$

$f\left(\frac{1}{y}\right)=-f(y)$

~~$f(\frac{1}{y})=f\left(\frac{y^2}{y^2}\right)=f(y^2)+f\left(\frac{1}{y}\right)$~~

$f\left(\frac{1}{y}\right)=f\left(\frac{y}{y^2}\right)=f(y)+f\left(\frac{1}{y}\right)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f($

№25.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

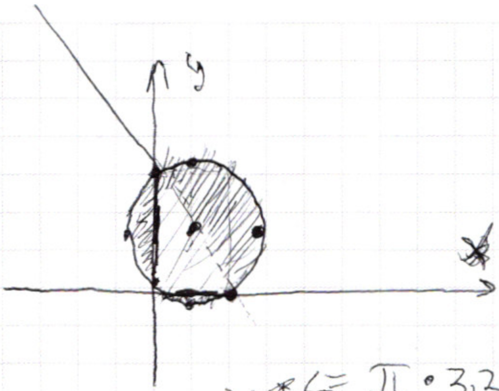
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$2x6 = \pi \cdot 3{,}25$

$x<0$
$y\geq 0$
$y \leq 3-1{,}5x$

$x \geq 0$

$y \leq 0$
$y \leq$

$t=90$
$x=70$

$x\geq 0$
$y\geq 0$ $3x+2y+2y+3x-6>6$

$4y+6x>12$

$2y+3x>6$

$y>\frac{6-3x}{2} \Rightarrow y>3-1{,}5x$

$3x=300-t$

$t<300-t<3t$

$2t<300<4t$

$t<3x<3t$

$t<150<2t$

$t\in(75;150)$

N2.

$3\cdot 25$ $3\cdot 50$

$3x>t$

$3x<3t$ $P=300$

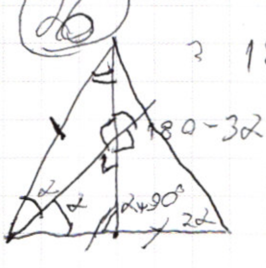
~~$3x+y=300$~~

$x+x+x+t=300$

$3x+t=300$

~~$t=3(x-100$~~

$t=3(100-x)$



$\frac{x}{p}=\frac{y}{2p}$

$x=\frac{y}{2}$

$3x>t$ $t>x$

$t+x>2x$

$3x>t$ $x+t>2x$

~~$2x+t>x$~~ $t>x$

~~$x<\frac{300+t}{3}$~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{AD}{AC}$ - ?

$S_{\Delta AED}$ - ?

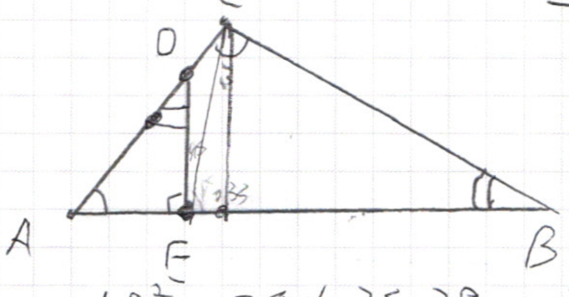
$\cancel{AM = \sqrt{29}}$

$\cancel{BC = \frac{\sqrt{29}}{2}}$

$\angle CED = 45^\circ$

$AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$

$BC = \sqrt{29}$



h

$AC \cdot CB \cdot \frac{1}{2} =$

$= h \cdot AB \cdot \frac{1}{2}$

$h = \frac{AC \cdot CB}{AB} =$

$= \frac{\sqrt{29} \cdot 5 \cdot \sqrt{29}}{\cancel{2} \cdot 29}$

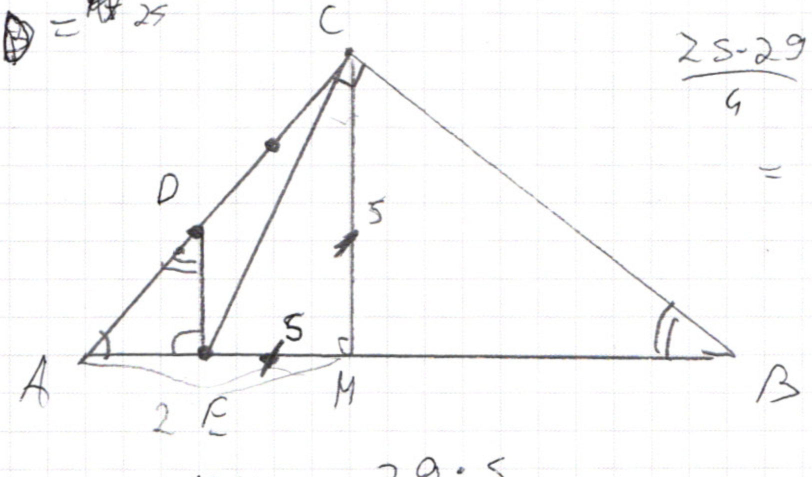
$AB^2 = 29 + \frac{25 \cdot 29}{4} = \frac{29 \cdot 29}{4}$

$AB = \frac{29}{2}$

$\frac{AD}{AB} = \cancel{\frac{AC}{AE}}\ \frac{AE}{AC}$

$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{29}{2\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{29}}{2}$

$AD = \cancel{AE}\ 25$



$\frac{25 \cdot 29}{4} - \frac{25 \cdot 4}{4} =$

$= \frac{25 \cdot 25}{4}$

$\frac{25}{2}$

$CH \cdot \frac{29}{2} = \frac{29 \cdot 5}{2}$

$CH = 5$

$AM^2 = 29 - 25 = 4$

$AM = 2$

$\frac{5 \cdot 29}{2 \cdot 2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

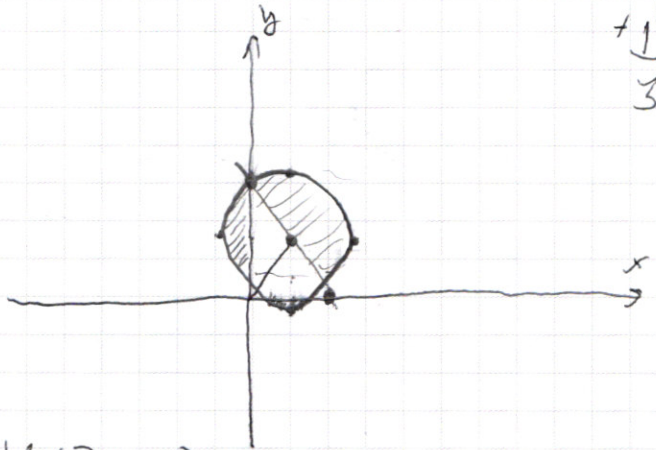
$|3x| + |2y| + |6-3x-2y| \geq 6$

$x^2-2x+1+y^2-3y+1{,}5^2-1-1{,}5^2 \leq 0$

$(x-1)^2+(y-1{,}5)^2 \leq 2{,}25+1 = 3{,}25$

$6 \approx 1{,}8$

$\times 1{,}8$
$1{,}8$
$+144$
18
324



$x \geq 0$
$y \geq 0$:
≥ 0

$6 > 6$

$y-p$
$y-ke\,p$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = p - f(y) =$
$= p - \cancel{kkt} - e$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \leq 0 \end{cases}$: $3x+2y+3x+2y-6 > 6$

$3x+2y > 6$ $\quad y > 3-1{,}5x$

$6-3x-2y < 0$
$3x+2y > 6$

$\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ y < 3-1{,}5x \end{cases}$: $2y-3x+6-3x-2y > 6$

$0-6x > 0$
$x < 0$

$\frac{3{,}25\pi}{2} +$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \\ y < 3-1{,}5x \end{cases}$ $\quad 3x-2y+6-3x-2y < 8$

$-4y < 0$
$y < 0$

p
$x-p$:
$y-p$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = x-y$

$x < y$
$x-p$
$y-p$

$f(ab) = f(a)+f(b)$

$3 \leq x \leq 19, \quad 3 \leq y \leq 19$
$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(1) = 0$

$x=3$
$y=4$

$f\left(\frac{x}{y}\right) =$
$x-p$
$= x + f(y) =$
$=$

$f\left(\frac{3}{4}\right) = 3 + f\left(\frac{1}{4}\right) = 3 - f(4) = 3 - 2f(2) = 3-4 = -1$

$\frac{3}{4}$ $f\left(\frac{4}{5}\right) = f(4) - f(5) = -4 - 5 < 0$

$f\left(\frac{5}{6}\right) = \cancel{k} \; 5 - f(6) = 0$

$f(2\cdot 3) = \cancel{5}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) =$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f\left(\frac{x}{y}\right) = a_1 + a_2 + a_3$

$x = a_1 \cdot a_2 \ldots a_n$

$y = b_1 \cdot b_2 \ldots b_n$

$f\left(a_1 \cdot \frac{x}{a_1}\right) = a_1 + f\left(\frac{x}{a_1}\right) = a_1 - f\left(\frac{x \cdot a_2}{a_1 \cdot a_2}\right) =$

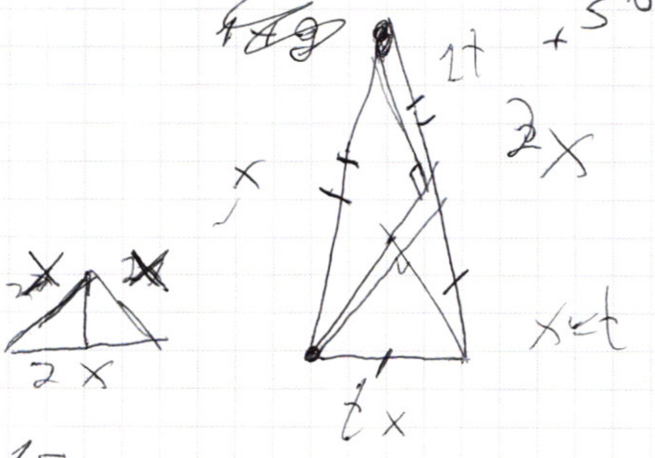
$= a_1 + f\left(\frac{x}{a_1 \cdot a_2}\right) - a_2 \ldots a = \ldots = a_1 + a_2 + a_3 \ldots a_n$

$a_1 + a_2 + a_3 \ldots a_n - b_1 + b_2 \ldots - b_k$

3;4 < 0 5;6 < 0 7;8 > 0

4;5 < 0 6;7 < 0 8;9 <

$f(x) =$



1
39
+ 17
56

7+4
11
19
34
40
56
66
+ 79
83
+ 27
110

2
1,5
+ 1,5
75
+ 15
225

$\frac{15}{4} = \frac{12+3}{4} = 3 + 0{,}75 = 3{,}75$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)