МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30°$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

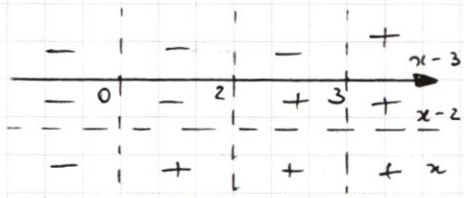
7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0$$

НУПИ: $\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=2 \\ x=0 \end{array}\right.$



1) $\begin{cases} x \leqslant 0 \\ \dfrac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x^2-2x} \leqslant 0 \quad (1) \end{cases}$

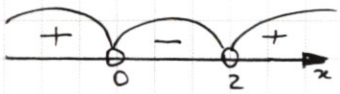
(1): $\dfrac{x^2-4x+4}{3x^2-6x} \leqslant 0$

$\dfrac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \leqslant 0$

$f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{3x(x-2)}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$

~~НУПИ: x=2~~



$f(x) \leqslant 0$ при $x \in (0; 2)$

Вернемся к системе:

$\begin{cases} x \leqslant 0 \\ x \in (0; 2) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing$

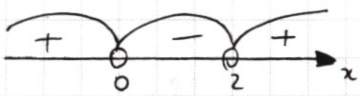
2) $\begin{cases} x \in (0; 2) \\ \dfrac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x-x^2+2x} \leqslant 0 \, (2) \end{cases}$

(2): $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-2x} \leqslant 0$

$\dfrac{(x-2)^2}{x(x-2)} \leqslant 0$

$f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x(x-2)}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$



$f(x) \leqslant 0$ при $x \in (0; 2)$

Вернемся к системе:

$$\begin{cases} x \in (0;2) \\ x \in (0;2) \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in (0;2)$$

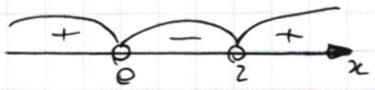
3) $$\begin{cases} x \in [2;3] \\ \dfrac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x^2-2x} \leq 0 \quad (3) \end{cases}$$

(3): $$\frac{x^2-4x+4}{3x^2-6x} \leq 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \leq 0$$

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{3x(x-2)}$$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0;2\}$



$f(x) \leq 0$ при $x \in (0;2)$

Вернемся к системе:

$$\begin{cases} x \in [2;3] \\ x \in (0;2) \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in \varnothing$$

4) $$\begin{cases} x > 3 \\ \dfrac{x^2-6x+10-2x+6}{2x^2-4x+x^2-2x} \leq 0 \quad (4) \end{cases}$$

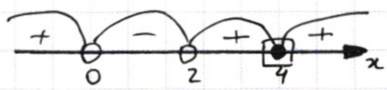
(4): $$\frac{x^2-8x+16}{3x^2-6x} \leq 0$$

$$\frac{(x-4)^2}{3x(x-2)} \leq 0$$

$$f(x) = \frac{(x-4)^2}{3x(x-2)}$$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0;2\}$

нули: $x = 4$



$f(x) \leq 0$ при $x \in (0;2) \cup \{4\}$

Вернемся к системе:

$$\begin{cases} x > 3 \\ x \in (0;2) \cup \{4\} \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = 4$$

5) $$\left[\begin{array}{l} x \in \varnothing \\ x \in (0;2) \\ x \in \varnothing \\ x = 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \quad x \in (0;2) \cup \{4\}$$

Ответ: $x \in (0;2) \cup \{4\}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)^2=xy \\ x-2y\geq 0 \\ x+y^2=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2y\geq 0 \\ x^2-5xy+4y^2=0 \\ x+y^2=5 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1): \begin{cases} x^2-5xy+4y^2=0 \\ x+y^2=5 \end{cases}, \quad D=25y^2-16y^2=9y^2=(3y)^2$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=4y \end{array}\right. \\ y^2+x-5=0 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y \\ y^2+y-5=0 \end{cases}, \quad D=1+20=21 \\ \begin{cases} x=4y \\ y^2+4y-5=0 \end{cases}, \quad D_1=4+5=9 \end{array}\right.$$

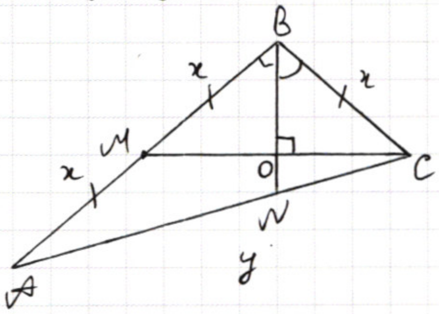
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2} \\ x=\frac{-1-\sqrt{21}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} y=\frac{-1+\sqrt{21}}{2} \\ x=\frac{-1+\sqrt{21}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} y=-5 \\ x=-20 \end{cases} \\ \begin{cases} y=1 \\ x=4 \end{cases} \end{array}\right.$$

Вернемся к системе:

$$\begin{cases} x-2y\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2} \\ x=\frac{-1-\sqrt{21}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} y=\frac{-1+\sqrt{21}}{2} \\ x=\frac{-1+\sqrt{21}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} y=-5 \\ x=-20 \end{cases} \\ \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{-1-\sqrt{21}}{2}+2\cdot\frac{1+\sqrt{21}}{2}\geq 0 \quad (в) \\ x=\frac{-1-\sqrt{21}}{2} \\ y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{21}}{2}+\frac{1-\sqrt{21}}{2}+\frac{1-\sqrt{21}}{2}\geq 0 \quad (н) \\ x=\frac{-1+\sqrt{21}}{2} \\ y=\frac{-1+\sqrt{21}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} -20+10\geq 0 \quad (н) \\ x=-20 \\ y=-5 \end{cases} \\ \begin{cases} 4-2\geq 0 \quad (в) \\ x=4 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{-1-\sqrt{21}}{2} \\ y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(4; 1)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}; \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)$

№2



Дано: $\triangle ABC$
CM – медиана
BN – биссектриса
$CM \perp BN$
$P = 600$
~~...~~
$AB \in \mathbb{N}$, $BC \in \mathbb{N}$, $AC \in \mathbb{N}$

Найти кол-во возможных треуг.

Решение:

1) Т.к. CM – медиана $\Rightarrow AM = MB = \frac{1}{2} AB$ (по опред. мед.)

2) Пусть $AM = MB = x \Rightarrow AB = 2x$ $(x \in \mathbb{N})$
$AC = y$ $(y \in \mathbb{N})$

3) Рассм $\triangle MOB$ и $\triangle COB$
$\angle MOB = \angle COB = 90°$ (т.к. $CM \perp BN$) $\Rightarrow$ $\triangle$-ки п/у
$\angle MBO = \angle CBO$ (т.к. BN – бисс.)
OB – общая
$\Rightarrow \triangle MOB = \triangle COB$ по катету и острому углу

Из рав-ва треуг. $\Rightarrow MB = BC = x$

4) Т.к. ABC – треугольник, то должны выполняться нер-ва:

$$\begin{cases} AC < AB + BC \\ AB < AC + BC \\ BC < AB + AC \end{cases} \quad \begin{cases} y < 2x + x \\ 2x < y + x \\ x < 2x + y \end{cases} \quad \begin{cases} y < 3x \\ y > x \\ y > -x \end{cases}$$

Т.к. $y \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{N}$, то $y > -x$ верно при $\forall x, y$

$$\Rightarrow \begin{cases} y < 3x \\ y > x \\ y > -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < 3x \\ y > x \end{cases} \Rightarrow y \in (x; 3x)$$

5) По условию $P_{ABC} = AB + BC + AC = 2x + x + y = 3x + y = 600$

~~Т.к.~~ при $x = y$: $3x + x = 600 \Rightarrow x = 150$

при $y = 3x$: $3x + 3x = 600 \Rightarrow x = 100$

Т.к из п.4 следует, что $y \in (x; 3x) \Rightarrow x \in (100; 150)$

Т.к. $y = 600 - 3x \Rightarrow$ для каждого значения ~~x существующего~~ $x \in (100; 150)$, где $x \in \mathbb{N}$, существует $y \in \mathbb{N}$

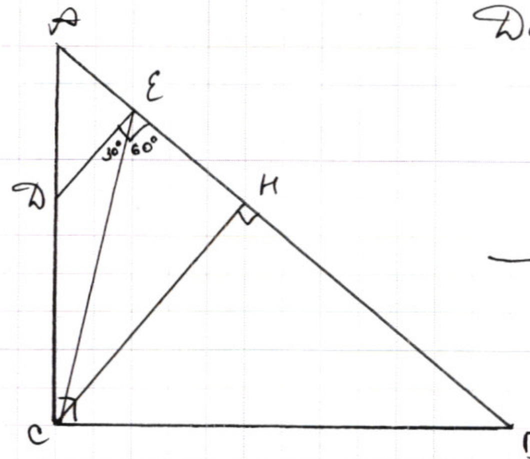
Т.к $x = \{101; 102; 103; \dots; 149\} \Rightarrow$ кол-во возможных x равно 49

Значит, кол-во возможных треуг, удовлет условию, равно 49

Ответ: 49

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№5



Дано: $\triangle ABC$ – п/у
$D \in AC$
$E \in AB$
$DE \perp AB$
$AC = \sqrt{7}$, $BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$
$\angle CED = 30°$

Найти: $AD : AC$ и S_{AED}

Решение:

1) $\triangle ABC$ – п/у => по т. Пифагора: $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$AB = \sqrt{7 + \frac{4 \cdot 7}{3}} = \sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$

2) Д. п. CH – высота

3) Т.к. $\triangle ABC$ – п/у, CH – высота => $\triangle CHB$ и $\triangle CHA$ – прямоуг
и $\triangle CHB \sim \triangle ACB$, $\triangle CHA \sim \triangle BCA$

4) Рассм $\triangle CHB$ – п/у
По т. Пифагора: $CH^2 = AC^2 - AH^2$ (1)

5) Рассм $\triangle CHA$ – п/у
По т. Пифагора: $CH^2 = BC^2 - HB^2 =$
$= BC^2 - (AB - AH)^2$ (2)

6) Приравняем (1) и (2):

$AC^2 - \cancel{AH^2} = BC^2 - AB^2 + 2AB\,AH - \cancel{AH^2}$

$7 = \frac{28}{3} - \frac{49}{3} + \frac{14}{\sqrt{3}} \cdot AH$

$\frac{14}{\sqrt{3}} AH = \frac{21 - 28 + 49}{3} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3} \cdot 42}{14 \cdot 3} = \sqrt{3}$

Тогда $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{7 - 3} = 2$

7) Рассм $\triangle EHC$ – п/у (т.к. CH – высота)

$\angle CEH = 90° - \angle DEH = 90° - 30° = 60° \Rightarrow \cos 60° = \frac{EH}{EC} \Rightarrow EH = \frac{EC}{2}$ или $EC = 2EH$

По т. Пифагора:

$EC^2 = EH^2 + CH^2$
$4EH^2 = EH^2 + CH^2$; $3EH^2 = CH^2 \Rightarrow EH = \sqrt{\frac{CH^2}{3}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Тогда $CE = 4\sqrt{3}$, $AE = AH - EH = \sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4 & (2) \\ x^2-2x-4y+y^2\le 0 & (1) \end{cases}$$

(1): $x^2-2x-4y+y^2\le 0$

$(x^2-2x+1)-1+(y^2-4y+4)-4\le 0$

$(x-1)^2+(y-2)^2\le 5$

Рассм $(x-1)^2+(y-2)^2=5$ – ~~круг~~ ок-ть с центром в т. $(1;2)$ и радиусом $\sqrt{5}$

(2): $|2x|+|y|+|4-2x-y|>4$

$|4-2x-y|>4-|2x|-|y| \iff \left[\begin{array}{l} 4-2x-y>4-|2x|-|y| \\ 4-2x-y<-(4-|2x|-|y|) \end{array}\right. \iff$

$\iff \left[\begin{array}{l} 4-|2x|-|y|<4-2x-y \\ 4-|2x|-|y|>(4-2x-y) \end{array}\right.$

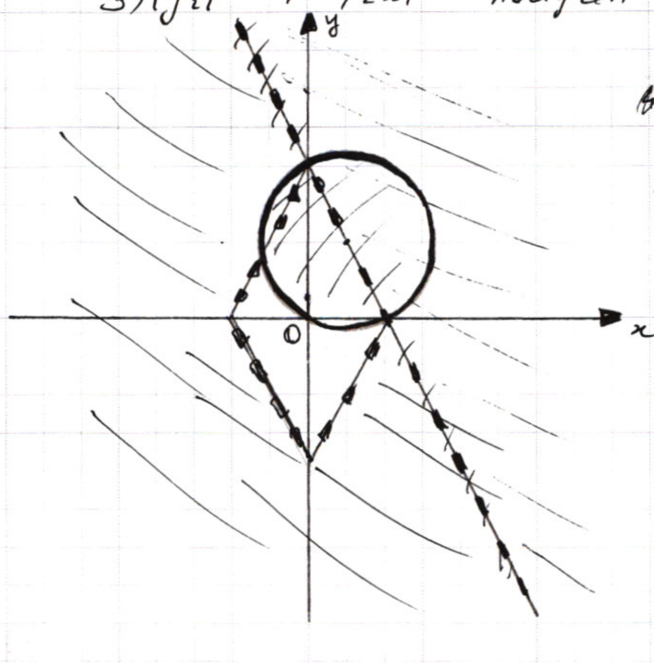
1) $4-2x-y=0$

$y=4-2x$ – линейная ф-ция, график – прямая,

x	0	2
y	4	0

2) $y_1=4-|2x|$ – получен из ① симмет. отражением от-но оси Oy части графика при $x\le 0$

3) $|y_2|=4-|2x|$ – получен из ② симметрич. отраж. от-но Ox части графика при $y\le 0$

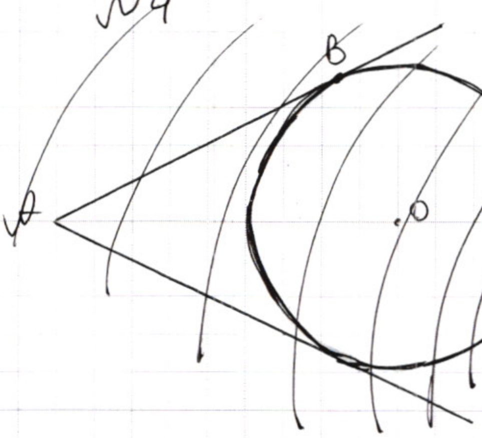


$S=\frac{\pi R^2}{2}+\frac{\pi R^2 \angle}{360^\circ}-\frac{1}{2}R^2\cdot\sin\angle$

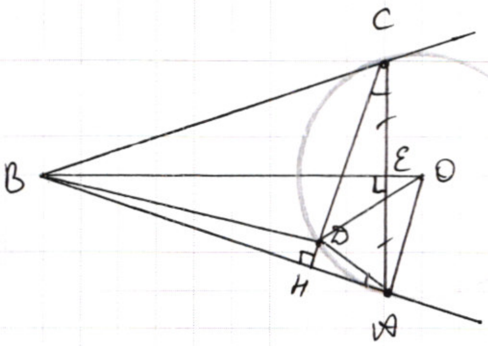
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№4



№4



Дано: $\omega(O; R)$, $R=4$
т. A и C – т. касания
CH – высота
$S_{ABD}=6$

Найти: AB:CH.

Решение:

1) По св-ву касат AB и AC:
$AB = AC$, $\angle EBC = \angle EBA$

2) Рассм $\triangle ABC$
$AB = AC \Rightarrow \triangle$ равноб.
$\angle EBC = \angle EBA \Rightarrow BE$ – биссе $\Rightarrow$ BE – высота и мед. (по св-ву равнобед $\triangle$-ке)

3) AB – касат, AD – хорда $\Rightarrow$ по св-ву касат и хорды:
$\angle HAD = \frac{1}{2}\angle AOD$, где по св-ву впис. угла $\angle AOD = 2\angle ACH$
$\Rightarrow \angle HAD = \angle ACH$

4) По следствию т. синусов, $\triangle CDA$: $\frac{AD}{\sin\angle ACD} = 2R = 2\cdot 4 = 8$
$\Rightarrow \sin\angle ACD = \sin\angle HAD = \frac{AD}{8}$

5) Рассм $\triangle ABD$, по ф-ле площади через синус:
$S_{ABD} = \frac{1}{2} AD\cdot AB\cdot \sin\angle BAD = \frac{1}{2}\cdot AD\cdot AB\cdot \frac{AD}{8} = \frac{AB\cdot AD^2}{16} = 6$
$\Rightarrow AD^2 = \frac{96}{AB}$ (1)

6) Рассм $\triangle AHD$ – п/у (т.к. CH – высота)
По т. Пифагора: $AD^2 = AH^2 + HD^2$ (2)
(1) и (2) $\Rightarrow \left(\frac{96}{AB}\right)^2 = AH^2 + HD^2$ (3)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

8) Рассм $\triangle AED$ – п/у (т.к. $DE \perp AB$) и $\triangle ACB$ – п/у

$\left.\begin{array}{l}\angle CAB \text{ – общий} \\ \angle AED = \angle ACB = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AED \sim \triangle ACB$ по двум углам

Из подобия: $\frac{AE}{AC} = \frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt3}{3\cdot\sqrt7} = \frac{\sqrt3}{3\sqrt7}$

~~$\Rightarrow AD = \frac{\sqrt3}{3\sqrt7}\cdot AB = \frac{\sqrt3}{3\cdot\sqrt7}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt7}{\sqrt3} = \frac{2}{3}$, $DE = \frac{\sqrt3}{}$~~

~~Тогда $\frac{AD}{AC} = \frac{2}{3\cdot\sqrt7} = \frac{2\sqrt7}{21}$~~

9) По ф-ле площади п/у треуг, $\triangle AED$:

$S_{AED} = \frac{1}{2} DE \cdot AE =$

$\Rightarrow AD = \frac{\sqrt3}{3\sqrt7}\cdot AB = \frac{\sqrt3}{3\sqrt7}\cdot\frac{7}{\cancel{2}\sqrt3} = \frac{7\sqrt7}{3\cdot7} = \frac{\sqrt7}{3}$

$DE = \frac{\sqrt3}{3\sqrt7}\cdot BC = \frac{\sqrt3}{3\sqrt7}\cdot\frac{2\sqrt7}{\sqrt3} = \frac{2}{3}$

Тогда $\frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt7}{3\cdot\sqrt7} = \frac{1}{3}$

$S_{AED} = \frac{1}{2} DE\cdot AE = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt3}{3} = \frac{\sqrt3}{9}$

Ответ: $AD : AC = 1 : 3$, $S_{AED} = \frac{\sqrt3}{9}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~7) Рассм. $\triangle CBH$ — п/уг. т.к. CH — высота)~~

~~По т. Пифагора: $BC^2 = BH^2 + CH^2$~~

7) ~~Рассм~~ $\sin \angle HAD = \frac{HD}{AD}$

HD $\sin \angle HAD = \frac{AD}{8}$ => $\frac{AD}{8} = \frac{HD}{AD}$ => $AD^2 = 8HD$

Тогда (1) => $8HD = \frac{96}{AB}$

$HD = \frac{12}{AB}$

8) (3) => $\left(\frac{96}{AB}\right)^2 = AH^2 + \frac{144}{AB^2}$

$AH^2 =$ ———

Ответ: $AB : CH = 1 : 12$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+x^2-2|x|} \leq 0$$

$x \leq 0$

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x}$$

$x \leq 0$

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x^2+2x} \qquad \frac{x^2-4x+4}{3x^2-2x} \leq 0$$

$x \in (0; 3)$

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x^2-2x} \qquad \frac{x^2-4x+4}{3x^2-6x}$$

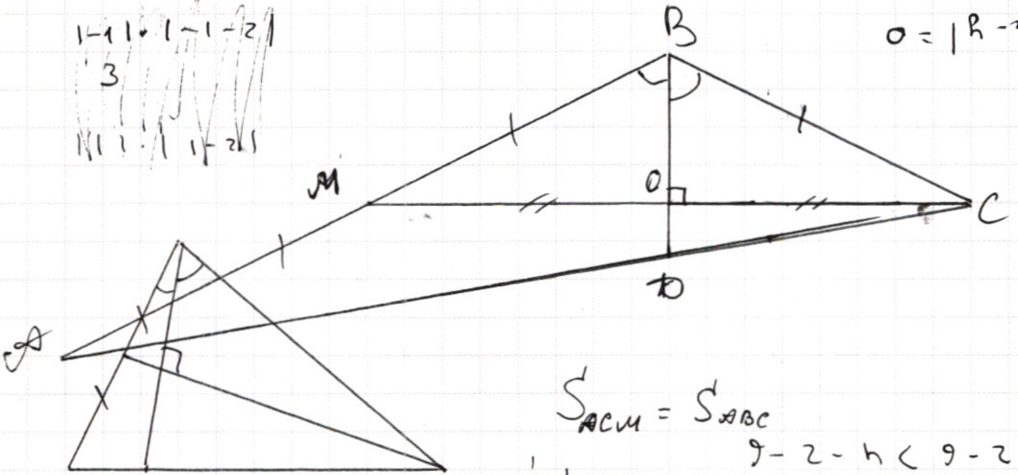
$x \geq 3$

$$\frac{x^2-6x+10-2x+6}{3x^2-6x} \qquad \frac{x^2-8x+16}{}$$

$|4-2x-y| = 0$

$y=1$

$y = 4-2x$



x	0	2
y	4	0

$S_{ACM} = S_{ABC}$

$\frac{1}{2}h.$

$|y| = |2x| - 4$

$|4-2x-y| > 4-|2x|-|y|$

$2x+y \leq 2|x|+|y|$

$-2x-y > -2|x|-|y|$

$-16x-8y > -16|x|-8|y|$

x и y одного знака:

$x \geq 0$ и $y \geq 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} & (1) \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

(1): $x-2y=\sqrt{xy}$

$$\begin{cases} (x-2y)^2=xy & (2) \\ x-2y\geq 0 \end{cases}$$

$y=-2\pm 3$

(2): $x^2-4xy+4y^2=xy$

$x^2-5xy+4y^2=0$

$$\begin{cases} x-2y\geq 0 \\ \cancel{\tan} \; x^2-5xy+4y^2=0 \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

$x^2-5xy+4y^2=0$

$D=25y^2-16y^2=9y^2$

$x=\frac{5y\pm 3y}{2}$

$\cancel{y^2=}$

$\cancel{4y^2-5xy+x^2=0}$

$\cancel{D=25-16=9} \Rightarrow \cancel{y=\frac{5x\pm 3}{}}$

$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=4y \end{array}\right. \\ x=5-y^2 \end{cases}$

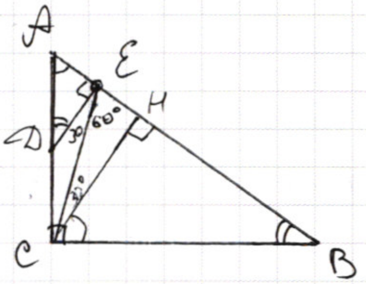
$\cancel{D=2}$

$y^2+y-5=0, \quad D=1+20=21$

$y=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

$y^2+4y-5=0$

$D=4+5=9$



$\triangle ABC$ - п/у

$DE\perp AB$

$AC=\sqrt{7}$

$BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$

$\angle CED=30°$

$AD:AC$ - ?

S_{AED} - ?

$tg\angle CAB=\frac{BC}{AC}=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}\sqrt{7}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{7+\frac{4\cdot 7}{3}}=\sqrt{\frac{21+28}{3}}=\sqrt{\frac{49}{3}}=\frac{7}{\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$

$\frac{BH}{BC}=\cancel{\frac{BC}{}}$ $\quad \frac{AH}{AC}=\frac{AD}{AB} \Rightarrow \cancel{AH=\frac{AC\cdot AD}{AB}=\sqrt{7}}$

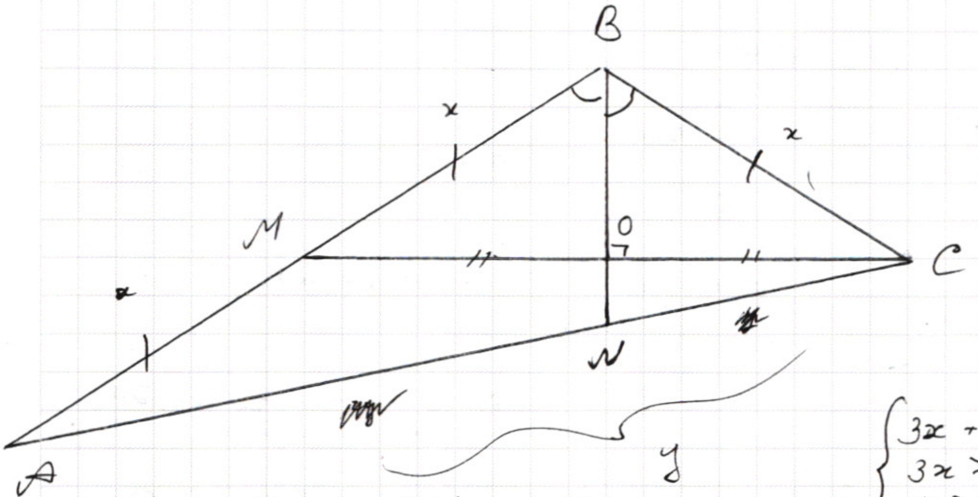
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$x+y > 2x$

$y > x$

$2x+y > x$

$y > -x$

$$\begin{cases} 3x+y=600 \\ 3x > y \\ y > x \end{cases}$$

$$\frac{AN}{NC} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{1}$$

$\Rightarrow AN = 2NC$

$$\begin{cases} 3x+y=600 \\ x < y < 3x \end{cases}$$

$x=y$: $4x = 600 \Rightarrow x = 150$

$3x=y$: $\cancel{6y} \Rightarrow 2y = 600 \Rightarrow y = 300$ или $x=100$

~~$4y = 600$~~ $y = 150$

$x \in (100; 150)$

$x=101$: $y = 297$

101 ... 105 => 5

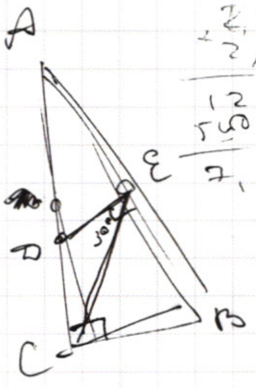
110 ... 115 => 10

120 ... 125 = 10

130 ... 135 = 10

140 ... 145 = 40

$600 : 4 = 150$



$BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}} = 2\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{7}$

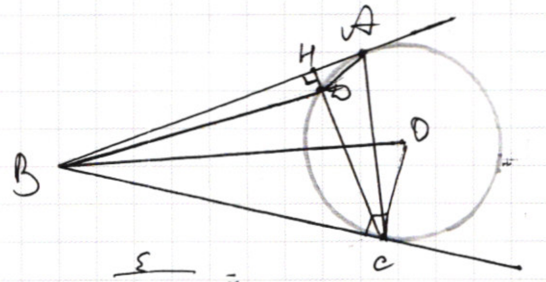
$\sqrt{\frac{4\cdot 7}{3}} = \sqrt{\frac{28}{3}} = \sqrt{9\frac{1}{3}}$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$AB : CH - ?$

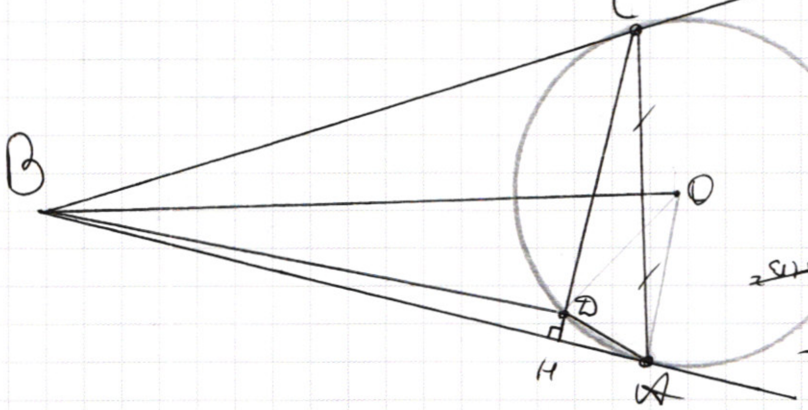


$S_{ABD} = 6$

$R = 4$

$\omega(O, R)$,

$AB = AC \Rightarrow$ д-ик равноб.



$AB : CH - ?$

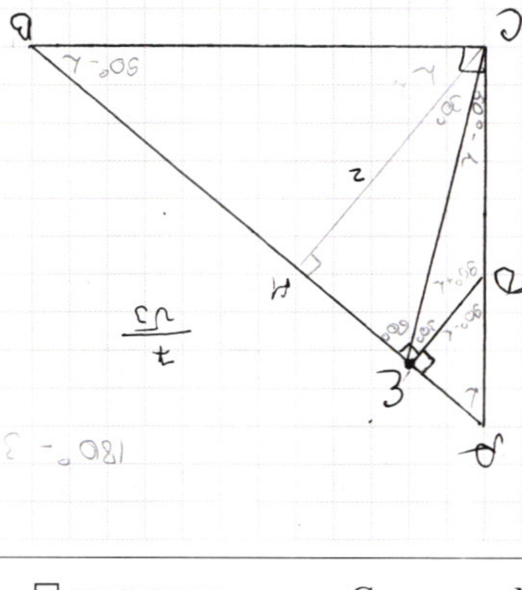
$S_{ABD} = 6$

$BC^2 - HB^2 = AC^2 - (AB - HB)^2$

$\frac{1}{2} AB \cdot DH = 6$

$\frac{1}{2} AB \cdot AD \sin \angle BAD = 6$

$DH = \frac{12}{AB}$



180° − 60° − 30° − α

180° − 30° − 30° − α = 60° − α

$\begin{array}{r} 16 \\ \times 6 \\ \hline 96 \end{array}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2-2x-4y+y^2\le 0$

$(x^2-2x+1)-1(+y^2-4y+4)-4\le 0$

$(x-1)^2+(y-2)^2\le 5$

$|2x|+|y|+|4-2x-y|>4$

$x<0,\quad y\le 0$

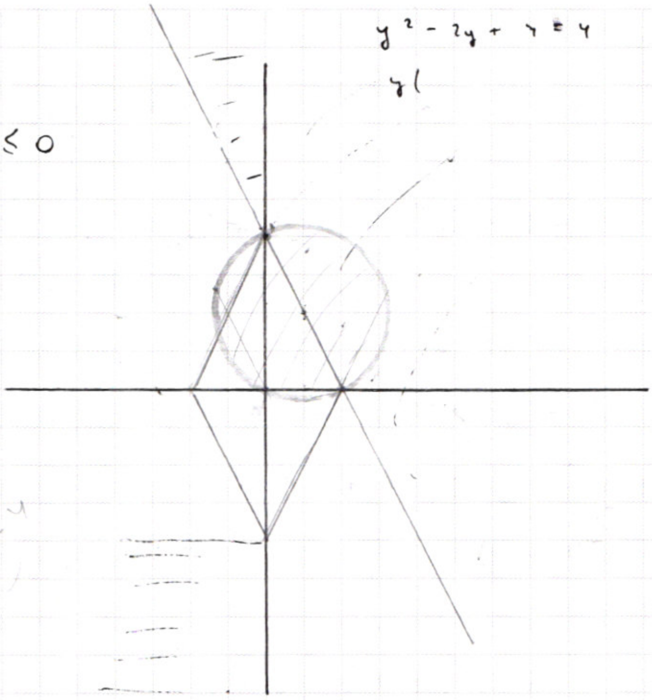
$-2x-y+4-2x-y>4$

$-2y-4x>0$

$y<-2x$

$x>0,\quad y>0$

$4-2$



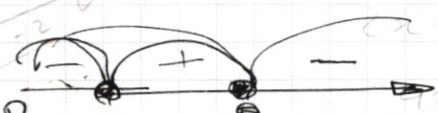
$y^2-2y+y=4$

$y($

$x=0,\ y=4$

$4-4>4$

$4-2|x|\le 0$



$x=3,\ y=2$

$\cancel{4-2-2>4-4}$

$4-2-2>4-2-2$

$4-$

$(|4-2x-y|)^2>(4-|2x|-|y|)^2$

$\cancel{\ldots}-16x-8y+4xy>\cancel{\ldots}16|x|+8|y|+4|xy|$

$-16x-8y+4xy>-16|x|-8|y|+4|xy|$

$4-|2x|-|y|<|4-2x-y| \iff \begin{cases}4-|2x|-|y|<4-2x-y\\ 4-|2x|-|y|>y-2x-4\end{cases}$

$y=2x+4$

x 0
y 4

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x = 4$
$y = 0$

$|4 - 8| >$ $\quad$ $4 - 8 > 4 - 8$

$-4 + 2x + y = 0$ $\quad$ $-4 > -4$

$y =$

$x = 4, \; y = -3$ $\quad$ $x = 0, \; y = 2$

$4 - 8 + 3 > 4 - 8 + 3$ $\quad$ $2 + |4 - 2|$

$4 > 4$

$x = -1, \; y = 3$ $\quad$ $1 + |4 - 1| >$

$4 - 2 - 3 > -(4 + 2 - 3)$

$4 - 2 - 3 > -4 - 2 + 3$ $\quad$ $x = 0$, $y = -5$

$1 > -1$

$5 + |4 + 5$

$2 + 3 + |4 + 2 - 3| > 4$

$2 + 3 + 3 > 4$ $\quad$ $y = -3, \; x = 2$

$y = -3, \; x = -3$

$6 - 3 + |4 + 6 + 3| > 4$

$4 + 3 + |4 - 4 + 3| > 4$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)