МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 15

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\left(\frac{(x-5)^2+4}{|x-5|}-4\right)(|x-4|+|x-6|-2) \leqslant 0.$$

2. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2-25y^2}=50, \\ 5y+\sqrt{x^2-25y^2}=1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Биссектрисы внутреннего и внешнего угла A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках M и N соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника AMN, касается стороны AB в точке A. Найдите радиус окружности, угол ACB и площадь треугольника ABN, если известно, что $AB=3$, $BM=1$.

4. [5 баллов] Вписанная окружность остроугольного треугольника ABC касается сторон AC и AB в точках E и D. Точка Y – основание перпендикуляра, опущенного из точки E на AB, а X – вторая точка пересечения EY со вписанной окружностью треугольника ABC. Найдите радиус этой окружности, если площадь треугольника AXD равна 12, а $5AD=6EY$.

5. [5 баллов] На доске выписано $10n$ последовательных натуральных чисел ($n \in \mathbb{N}$). Из них выбираются три попарно различных числа, среди которых ровно одно кратно 2 и ровно одно кратно 5. Известно, что можно составить ровно 5 112 таких троек. Чему равно n?

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} 2y+3x \geqslant |2y-3x|, \\ y \leqslant -2x+16, \\ x^2-12y+y^2+16 \geqslant 0 \end{cases}$$

7. [5 баллов] Найдите количество шестизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые две последовательные степени числа десять равна 1234.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\left(\frac{(x-5)^2+4}{|x-5|}-4\right)(|x-4|+|x-6|-2)\leq 0$$

ОДЗ: $x\neq 5$

$$\frac{|x-5|^2-4|x-5|+4}{|x-5|}(|x-4|+|x-6|-2)\leq 0$$

$$\frac{(|x-5|-2)^2}{|x-5|}(|x-4|+|x-6|-2)\leq 0$$

Если $x\neq 5$, то $\frac{(|x-5|-2)^2}{|x-5|}\geq 0$, т.к. и числитель и знаменатель дроби ≥ 0 или >0 соответственно, значит:

$|x-4|+|x-6|-2\leq 0$ или $\frac{(|x-5|-2)^2}{|x-5|}=0$

$|x-4|+|x-6|\leq 2$

1) Пусть $x\in(-\infty;4)$, тогда оба модуля раскроются со знаком $-$,

$-x+4-x+6\leq 2$

$x\geq 4 \Rightarrow x\in\varnothing$ (т.к. $x\in(-\infty;4)$)

2) Пусть $x\in[4;6]$, тогда 1 модуль раскроется со знаком $+$, а второй $-$

$x-4-x+6\leq 2$

$2\leq 2$ т.к $x\in[4;6]$, то неравенство решено при $x\in[4;6]$

$|x-5|-2=0 \quad x\neq 5$

$x=7; x=3 \;; x\neq 5$

3) Пусть $x\in(6;+\infty)$, тогда оба модуля раскроются со знаком $+$,

$x-4+x-6\leq 2$

$x\leq 6 \quad x\in\varnothing$ (т.к. $x\in(6;+\infty)$)

Тогда неравенство верно при $x\in[4;6]$, $x=3$, $x=7$ и $x\neq 5 \Rightarrow$ $x\in\{3\}\cup[4;5)\cup(5;6]\cup\{7\}$

Ответ: $\{3\}\cup[4;5)\cup(5;6]\cup\{7\}$

№1 $x\neq 5$

$$\left(\frac{(x-5)^2+4}{|x-5|}-4\right)\left(|x-4|+|x-6|-2\right)\le 0$$

$\Updownarrow$

$$\frac{(|x-5|-2)^2}{|x-5|}$$ $|x-4|+|x-6|\le 2$

4   6

$x=7$

$x=3$

$x+5y=a$ $x-5y=b$

$$\frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}=50$$

$\frac{a}{\sin\alpha}=2R$

$$\frac{a-b}{2}+\sqrt{ab}=1$$

$\frac{a}{2}=R\cdot\sin\alpha$

$\sqrt{a}+\sqrt{b}=10$

$\Uparrow$

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=100$

$$\begin{cases} a+2\sqrt{ab}+b=100 \Rightarrow \\ a+2\sqrt{ab}-b=2 \end{cases}$$

$a+2\sqrt{ab}+b-2b=2$

$98=2b$

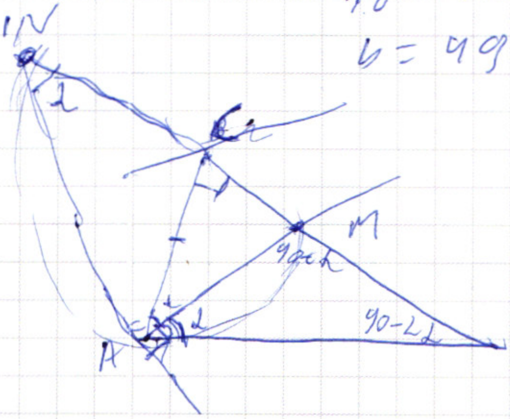
$b=49$

$a+14\sqrt{a}+49=100$

$(\sqrt{a}+7)^2=100$

$\sqrt{a}=3$ $a=9$

$\sqrt{a}=-17$ [illegible]



$AB=3$ $AB^2=BM\cdot BN$

$BM=1$ $9=BN$

$NM=d=8$

$<90°$

$\frac{1}{2}AC\cdot NB=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot AC$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$a = x-5y$; $b = x+5y$, тогда наша система будет иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} + \sqrt{ab} = 50, \mid \cdot 2 \\ \frac{b-a}{2} + \sqrt{ab} = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+2\sqrt{ab}+b = 100, \\ b+2\sqrt{ab}-a = 2; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+2\sqrt{ab}+b = 100, \\ a+2\sqrt{ab}+b-2a = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+2\sqrt{ab}+b=100, \\ 100-2a=2; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+2\sqrt{ab}+b=100, \\ a=49; \end{cases} \quad \begin{cases} 49+14\sqrt{b}+b=100; \\ a=49, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sqrt{b}=3 \\ \sqrt{b}=-17 \end{array}\right. \\ a=49 \end{cases} \text{ т.к. } \sqrt{b} \geq 0, \text{ то } \begin{cases} \sqrt{b}=3 \\ a=49; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=9 \\ a=49; \end{cases}$$

делаем обратную замену

$$\begin{cases} x+5y = 9 \\ x-5y = 49; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=29, \\ y=-4, \end{cases}$$

заметим ~~проверим~~ $x^2-25y^2 = 29^2-25\cdot(-4)^2 = 841-25\cdot 16 =$
$= 841 - 400 = 441 \geq 0$, а данное выражение должно быть ≥ 0 (иначе под корнем отрицательное число) $\Rightarrow (29; -4)$ — решение

Ответ: $(29; -4)$

$10^n \cdot k + 10^n \cdot k + 10^{n+1} a$ a

1117

117

1254

1

999

99

$2y + 3x \geq |2y - 3x|$

$y \leq -2x + 16$

$x^2 - 12y + y^2 + 16 \geq 0$ $y \leq -2x + 16$

$x^2 + (y-6)^2 ~~+20~~ \geq 0$

$x^2 + (y-6)^2 \geq 20$

$2y - 3x = 0$

$2y = 3x$

$(1; 0)$ ~~$2 - 3 \cdot 0 \geq 0$~~

$0 - 3 \leq 0$

$2y + 3x \geq 2y - 3x$

$6x \geq 0$

$x \geq 0$

$2y + 3x \geq -2y + 3x$

$4y \geq 0$

$y \geq 0$

+

−

$y = -2x + 16$

4

−

+

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

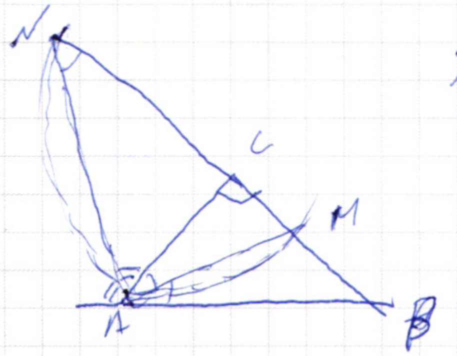
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3



Дано $AB = 3$, $BM = 1$

Решение 1) Бис. смеж $\angle$ $\perp$

$\Downarrow$

$\angle NAM = 90°$

$\Downarrow$

NM – диам. окр. опис около $\triangle ANM$.

2) По св. кас. и секущ.

$AB^2 = BM \cdot BN$

$BN = 9$

$NM = BN - BM = 8$

$R_{ANM} = \frac{NM}{2} = 4$

3) $\angle ANM = \angle MAB$ ($\angle$ между кас. и сек.)

$\angle AMB = \angle MAN + \angle ANM = 90° + \angle ANM$

$\angle ACM + \angle CAM = 90° + \angle ACM + \angle ANM$

$\Downarrow$

$\angle ACM = 90°$

4) Пусть $\angle MAB = \alpha$, тогда

по св. бис. $\frac{MB}{AB} = \frac{CM}{AC} = tg\,\alpha$

$\frac{MB}{AB} = \frac{1}{3}$

т.к. $\alpha \in (0°; 90°)$ (иначе $\Sigma\angle$ в $\triangle ANC \geq 180°$), то $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \;|: \sin^2\alpha \Rightarrow 1 + \frac{1}{tg^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow$

$\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\frac{1}{tg^2\alpha}} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{tg^2\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ (т.к. $\alpha \in (0; 90°)$

ч.2) $\sin\alpha = \frac{AM}{NM}$

$AM = \frac{8}{\sqrt{10}}$

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$\alpha \in (0°; 90°)$

$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$S_{ANB} = S_{AMN} + S_{AMB} =$

$= \frac{1}{2}\sin\angle NMA (NM + MB) AM$ (т.к. sin смежных углов равны.)

$\angle NMA = 90° - \alpha$

$\sin\angle NMA =$

$= \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$S_{ANB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot 9 \cdot \frac{8}{\sqrt{10}} =$

$= \frac{54}{5}$

Ответ: $4;\ 90°;\ \frac{54}{5}$

☐ черновик ☑ чистовик

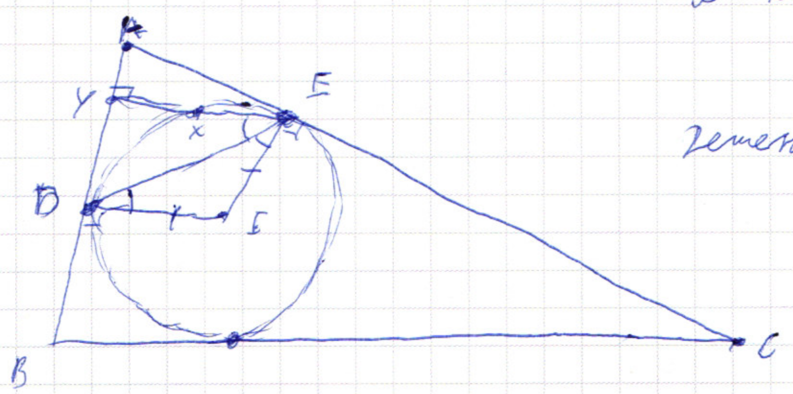
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №3

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Дано $S_{AXD}=12$

$5AD=6EY$

Решение $12=S_{AXD}=\frac{1}{2}YX\cdot AD=$

$=\frac{1}{2}\cdot YX\cdot\frac{6}{5}\cdot EY=$

$=\frac{3}{5}\cdot YX\cdot EY=$

$=\frac{3}{5}YD^2$ (по св. кас. и сек.)

$\frac{3}{5}YD^2=12$

$YD=2\sqrt{5}$

$\angle YED=\angle EDI$ ($YE\parallel DI$)

(I – центр вписанной окр.)

$\angle EDI=\angle DEI$ ($IE=ID$ как радиусы)

Пусть $\angle DEI=\alpha$.

Тогда $\angle DIE=180^\circ-2\alpha$, значит $\smile DE=180^\circ-2\alpha$

По т. синусов: $\frac{DE}{\sin\frac{\smile DE}{2}}=2r$

$\frac{DE}{\sin(90^\circ-\alpha)}=2r$

$\sin\angle DEY=\sin\alpha=\frac{YD}{DE}$

$DE=\frac{YD}{\sin\alpha}$

$\Downarrow$

$\frac{YD}{\sin\alpha\sin(90^\circ-\alpha)}=2r$

$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$

$\frac{YD}{\sin\alpha\cos\alpha}=2r$

$\frac{2YD}{\sin2\alpha}=2r$

$\frac{YD}{\sin2\alpha}=r$

$\sin2\alpha=\sin\angle YEI=$

$=\cos(90^\circ-\angle YEI)=$

$=\cos\angle AEY=\frac{YE}{AE}=$

$=\frac{YE}{AD}=\frac{5}{6}$

$\frac{2\sqrt{5}}{\frac{5}{6}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}=r$

Ответ: $\frac{12\sqrt{5}}{5}$

$-2x + 16 = x^2 - 12y + y^2 + 16$

$x^2 + 2x - 12y + y^2 = 0$

$D = 4 - 4y^2 + 48y = 0$

$y =$

0 ... 6 1 7

$\cancel{x^2 - 12y + y^2 + y + 2x}$

$\cancel{x^2 - 2x} - 11y + y^2 = 0$

$D =$

$-x^2 + 12y - y^2 + y + 2x$

$x^2 - 2x - 13y + y^2 = 0$

4; 8

32

$16 - 96 + 64 + 16 = 0$

100 612 10117

100 617 1

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

Из $10n$ чисел ровно $n \vdots 10$, $5n \vdots 2$, $2n \vdots 5$ и $10n-2n-5n+n = 4n \not\vdots 2$ и 5.

1) Пусть в тройке есть число $\vdots 10$. Тогда вариантов его выбрать n штук, а остальные 2 числа $(4n)$ и $\frac{(4n-1)}{2}$ соответственно. Значит всего вариантов $\frac{n \cdot 4n \cdot (4n-1)}{2}$.

2) Пусть в тройке нет числа $\vdots 10$. Тогда есть $5n \cdot 2n$ выбрать число $\vdots 2$ и 5 соответственно, а оставшееся $4n$ способами. Всего $40n^3$ вариантов.

Всего вариантов $(1)+2))$ $\frac{4n^2(4n-1)}{2} + 40n^3 =$

$= 2n^2(4n-1) + 40n^3 = 2n^2(4n-1+20n) = 2n^2(24n-1)$

и это число должно $= 5112$.

$2n^2(24n-1) = 5112$

$n = 6$

Ответ: 6

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

~~13~~. ~~5~~ $2^3 \cdot 3^2 \cdot 71$

72

$n=8$

$$\begin{array}{l|l} 5112 & 71 \\ \hline 426 & 61 \\ \hline 852 & \\ 71 & \\ \hline 261 & \end{array}$$

$128 \cdot 71 =$

6.

$n^2(4n-1) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 71$

~~41~~

8

$$\begin{array}{l|l} 5112 & 4 \\ \hline 40 & 1278 \\ \hline 11 & \\ 8 & \\ \hline 31 & \\ 28 & \\ \hline 32 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 5112 & 8 \\ \hline 48 & 639 \\ \hline 31 & \\ 24 & \\ \hline 72 & \\ 72 & \end{array}$$

$24 \cdot 6 = 144$

$$\begin{array}{l|l} 639 & 9 \\ \hline 63 & 71 \\ \hline 09 & \end{array}$$

$n=2$

2:

$n=6$

72.

$143 \cdot 72$

$$\begin{array}{r} 143 \\ \times 72 \\ \hline 288 \end{array}$$

- [x] черновик
- [ ] чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

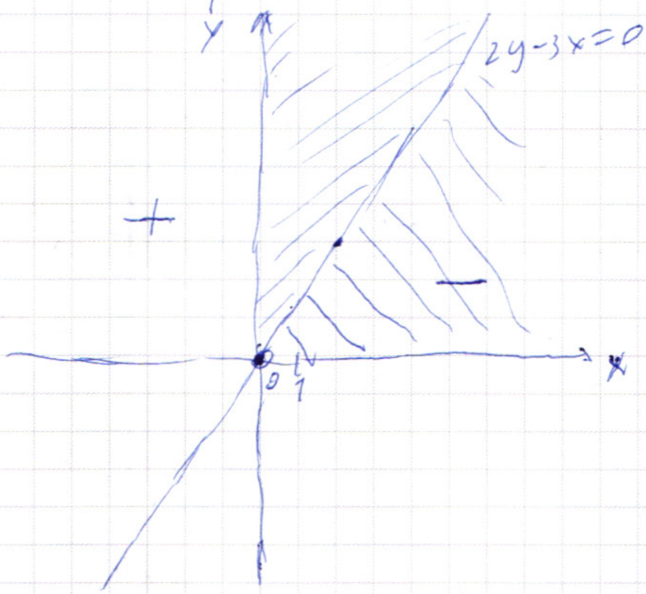
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6 (1)

Будем строить фигуру постепенно (по 1 уравнению)

$2y+3x \ge |2y-3x|$



~~1) |2y-3x| ≥ 0~~

1) $2y-3x \ge 0$

$2y+3x \ge 2y-3x$

$6x \ge 0$

$x \ge 0$ (множество решений отмечено ///)

2) $2y-3x < 0$

$2y+3x \ge 3x-2y$

$4y \ge 0$

$y \ge 0$ (множество решений отмечено \\\\).

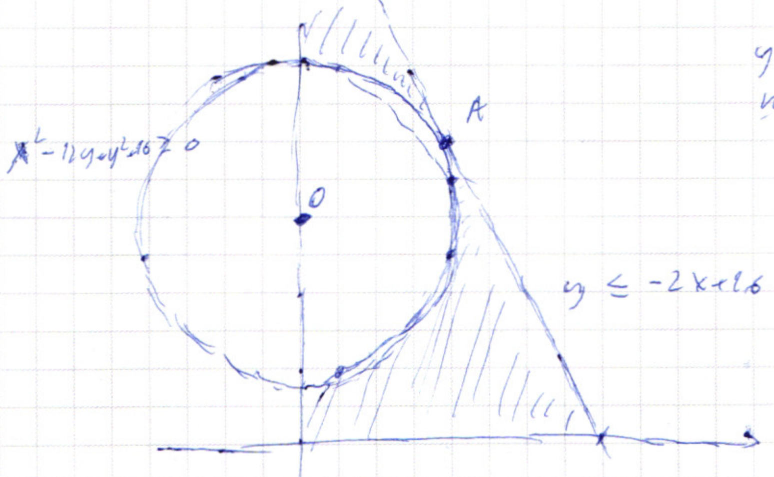
Объединяя получаем:

$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

$x^2-12y+y^2+16 \ge 0$

$x^2+(y-6)^2 \ge 20$ и все точки вне её

окр. с центром $(0;6)$ и $r=\sqrt{20}$



$y \le -2x+16$ – множество под прямой $y=-2x+16$.

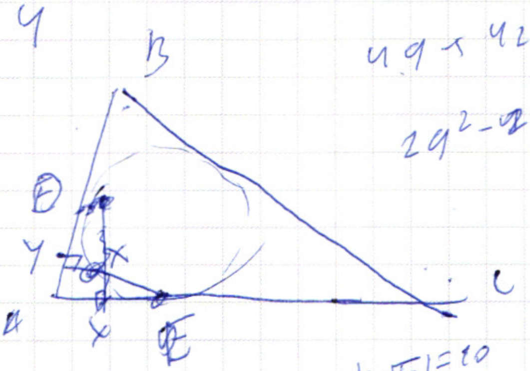
Докажем, что прямая $y=-2x+16$ и окр касаются,

1) точка $(4;8)$ им принадлежит (назовём точкой A)

2) $OA: y=2x+6$

Продолжение на следующей стр. →

24



$49 + 42 + 9$

$29^2 - 25 \cdot 64$

$5112 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 71$

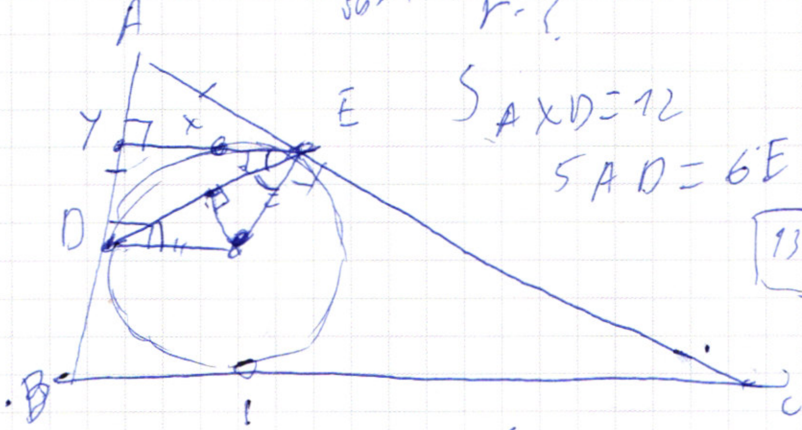
29
29
261
58
841

841 -

$\sqrt{51} = 10$

$56 = 17$

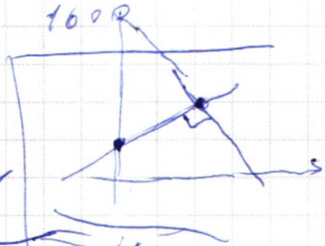
$r - ?$



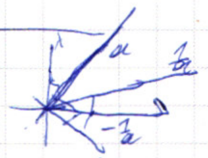
$S_{AXD} = 12$

$5AD = 6EY$

53
24



$\boxed{13n - 1 = 142}$



$n = 11$

$12 = S_{AXD} = \frac{1}{2} \cdot YX \cdot AD = \frac{1}{2} YX \cdot \frac{6}{5} \cdot EY$

$\frac{3}{5} YX \cdot EX$

$\frac{3}{5} DY^2$

$\frac{142 \cdot 121 \cdot 3}{2} =$

$DY = 2\sqrt{5}$

$11 \cdot 13$

$13 \cdot 4$

$n = 11$

$5112 \,|\, 8 = 639$; 48, 31, 24, 72

$\sin\alpha = \frac{YD}{DE} =$

$DE = \frac{YD}{\sin\alpha}$

$\frac{r}{h_1}$

$\frac{DE}{\sin(90 - \alpha)} = r$

$639 \,|\, 27$; 54, 2

$639 \,|\, 9 = 71$

$\frac{YD}{\sin\alpha \cdot \sin(90-\alpha)} = r$

$13n - 1$

$n = 4$

$5112 = 2 \cdot 2556$

$4 \cdot 1278$

$\frac{3n^2(3n-1)}{2} =$

$\underbrace{\quad}_{10n}$

$n \vdots 10$

$3n \vdots 5 \vdots 2$

$2n \vdots 5$

$3n \vdots 2$

$\frac{5n \cdot n \cdot 3n}{?} = 15n^3$

$\frac{n \cdot 3n(3n-1)}{2}$

$\boxed{\checkmark}$ черновик $\square$ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6 (2)

OA: $y = \frac{1}{2}x + 6$

у второй нашей прямой уравнение $y = -2x + 16$. прямые ⊥ тогда ~~когда~~ когда коэф. при x дают −1 в произведение. Как раз $\frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$.

Значит $y = -2x + 16$ - кас. окр.

Посчитаем S. S треугольника под прямой $y = -2x + 16$ равна $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 16 = 64$.

Площадь круга равна $\pi r^2 = \pi \cdot 20$.

Половина ~~S~~ S круга $= 10\pi$.

Вычитаем из $64 - 10\pi$ и получаем ответ

(Площадь ~~круга~~ треугольника под прямой $y = -2x + 16$ это S множества удовлетворяющих уравнению $y \le 16 - 2x, y \ge 0, x \ge 0$. И находится через $\frac{1}{2} \cdot$ произведение катетов (8, 16 соответственно)

Ответ $64 - 10\pi$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ ~~7~~(1)

~~Будет~~ Если наибольшая из степеней 10 на которую мы делим число это $6 \geq$ ~~...~~ то сумма остатков > 1234 т.к. в сумме одно из слагаемых будет хотя бы шестизначным.

Если макс. степень $10 \leq 3$, то макс. сумма остатков $999+99=1098<1234$.

Значит макс степень 10 = 5 или 4.

1) Если 5, то 5 цифра числа = 0 (иначе сумма больше 1234). Значит мы сложили 2 одинаковых числа (4 последние цифры), значит эти числа $= \frac{1234}{2} = 617$, значит последние 5 цифр равны 00617. и вариантов выбрать первую 9.

2) Если 4, то 4 цифра = ~~...~~ (иначе сумма остатков > 1234) если 1, то последние 3 цифры совпадают значит они равны $\left(\frac{\cancel{1}234}{2} = 117\right)$ 117. Всего вариантов выбрать первые 2 цифры (остальные мы знаем) $9 \cdot 10 = 90$. (Продолжение на следующей стр.) →

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7(2)

Если 4 цифра 0, то последние 3 цифры совпадают и равны $\left(\frac{1234}{2} = 617\right)$ 617.

Вариантов выбрать первые 2 цифры $9 \cdot 10 = 90$.

НО: 1 случай является подмножеством случаев 2 когда 4 цифра $= 0$.

Всего вариантов $90 + 90 = 180$

Ответ 180.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)