МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Предположим, что $x < 3$.

Тогда $x^2 - 6x + 10 - 2|x-3| = x^2 + 6x + 10 + 2x - 6 =$
$= x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \geq 0$ при любых x.

При $x = 2$ $2x^2 - 4x + |x||x-2| = 0$, то есть при $x = 2$ дробь не определена, т.е. $x \neq 2$.

Тогда если $x<3$, то ~~это~~ числитель >0, ~~то~~ значит знаменатель должен быть <0.

$\begin{cases} 2x^2 - 4x + |x||x-2| < 0 \\ x < 3 \end{cases}$ ~~⇔~~ $\begin{cases} (|x||x-2|)(\pm 2 + 1) < 0 \\ x < 3 \end{cases}$

знак зависит от того, какой знак у $x(x-2)$

если $x(x-2) \geq 0$, то $+$, иначе $-$

$|x||x-2| \geq 0$ по определению $||$, равенство достигается при $x=0$ и $x=2$, но при $x=0$ и $x=2$ знаменатель $=0$, т.е. дробь не определена. Тогда $|x||x-2|>0$.

Значит, чтобы дробь была <0, $x(x-2)$ должно быть <0.

Т.е. $x \in$ ~~$(0;2)$~~ $(0;2)$ ← в этом промежутке $x<3$ (~~при всех этих значениях $x<3$~~)

~~$(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$~~ и $x<3$.

Предположим, что $x \geq 3$.
Тогда

$$x^2 - 6x + 10 - 2x + 6 = x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2 \geq 0$$

при всех x.

При $x = 4$, $2x^2 - 4x + |x||x-2| \neq 0$, т.е.

При $x = 4$ дробь ≤ 0.

При $x > 4$: $2x^2 - 4x + |x||x-2| =$

$= 2x^2 - 4x + x(x-2) = 2x^2 - 4x + x^2 - 2x =$

$= 3x(x-2)$. Это больше 0 при всех $x > 4$.

Тогда дробь > 0.

Таким образом, дробь < 0 при ~~$x \in (0;2)$ и $x = 4$~~.

~~Ответ: $x \in (0;2)$, $x = 4$.~~

$x = 4$ или ~~$x \leq 3$ и $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$~~ $x \in (0;2)$

~~$x = 4$ или $x \in (-\infty; 0) \cup (2; 3)$~~

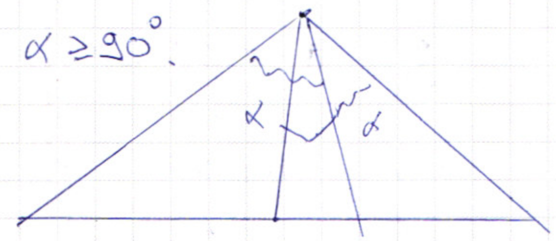
Ответ: $x = 4$ или $x \in$ ~~$(-\infty; 0) \cup (2; 3)$~~ $(0; 2)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

Предположим, что в каком-то Δ перпендикулярны медиана и биссектриса, проведённые из одной вершины:



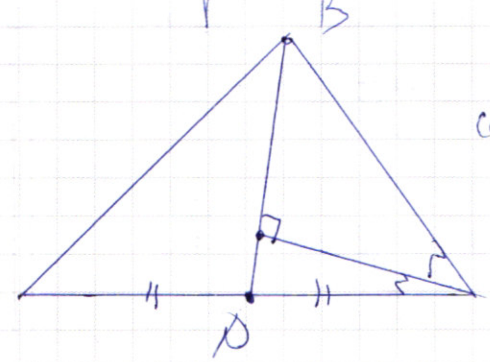
Тогда $\alpha \geq 90^\circ$.

Но тогда $\angle B = 2\alpha \geq$

$\cancel{(\alpha+90)} = 2(..+90^\circ) \geq 180^\circ$

противоречие.

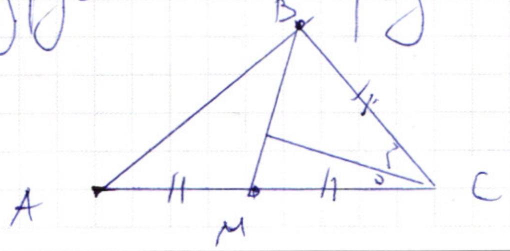
Возьмём Δ, в котором медиана перпендикулярна биссектрисе.



В ~~нем~~ Δ BCD высота совпала с биссектрисой, тогда Δ равнобедренный и $CD = BC = \frac{1}{2}AC$.

То есть в ΔABC одна сторона в 2 раза больше другой.

Пусть в ΔABC одна сторона больше другой в 2 раза. Тогда $AC = 2a$ $BC = a$.



Тогда Δ MBC равнобедренный, и биссектриса из угла C перпендикулярна BM.

Предположим, что в Δ 2 пары перпендикулярных медиан и биссектрис. Тогда в нём есть стороны a и $2a$. Третья сторона вдвое больше/меньше одной из них. То есть она может быть равна

1) $\frac{a}{2}$; 2) $2a$; 3) a; 4) $4a$.

Но: 1) $a+\frac{a}{2} < 2a$ 3) $a+a=2a$

4) $a+2a<4a$. То есть случаи 1; 3; 4 невозможны по неравенству Δ.

В 2ом случае существует всего 1 такой треугольник (с периметром 600) (со сторонами 120; 240; 240)
он будет посчитан дважды.

Пусть стороны Δ a; $2a$; b.

Тогда $a+2a>b$ $b+a>2a$

$a+2a+b=600$

Тогда $3a>b>a$.

$3a+b=600$.

~~$3a \vdots 3$ $b \vdots 3$~~ $3a+b=600$ и $3a>b$.

Значит $b<300$; $3a+b=600$ и $b>0$, значит $b>100$. Также $3a \vdots 3$ и $600 \vdots 3$, тогда $b \vdots 3$. То есть подходят все числа от 100 до 300, $\vdots 3$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Их ровно $\left\lfloor \frac{300-100}{3} \right\rfloor = 66.$

При этом Δ со сторонами 120; 240; 240 посчитан дважды ($b=120$ и $b=240$)

Тогда всего таких Δ $66-1=65.$

Ответ: 65

№6.

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4 & (1) \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0. & (2) \end{cases}$$

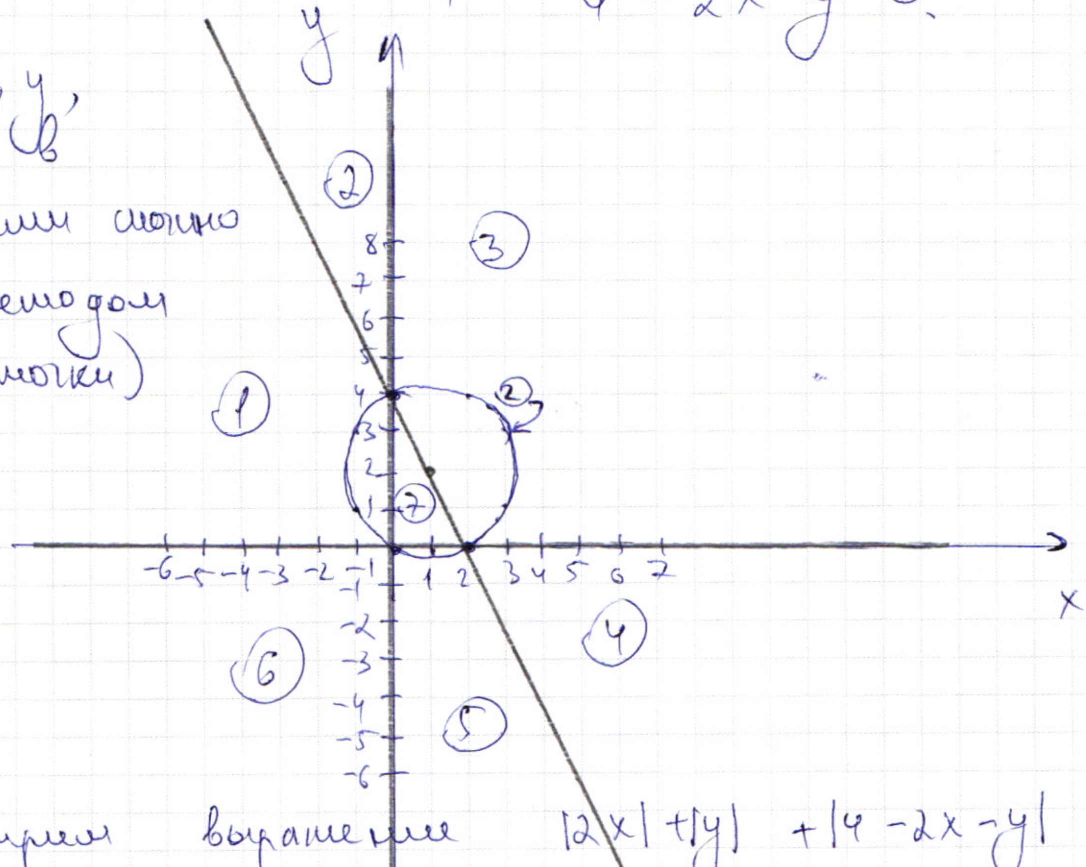
(2) $x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0.$

$(x - 1)^2 + (y-2)^2 \leq 5.$ – ~~окружность~~ круг с центром в $(1; 2)$ и радиусом $\sqrt{5}$

(1) $|2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4.$

Построим прямые $2x = 0$; $y = 0$ и $4 - 2x - y = 0.$

(знак $2x$, y, $4-2x-y$ в каждой части можно найти методом пробной точки)



Рассмотрим выражение $|2x| + |y| + |4 - 2x - y|$ в каждой из 7-ми частей, кроме (2); (4); (6), поскольку там нет общих точек с кругом, а значит и точек удовлетворяющих системе неравенств.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $2x<0$; $y>0$. $4-2x-y>0$.

Тогда:

$|2x|+|y|+|4-2x-y| = -2x+y+4-2x-y =$
$= 4-2x$. $2x<0$, поэтому это больше 4. То есть часть 1 уд. неравенству 1.

3) $2x>0$; $y>0$. $4-2x-y<0$.

Тогда:

$|2x|+|y|+|4-2x-y| = +2x+y-4+2x+y =$
$= 4x+2y-4$. Это больше 4, поскольку ($4x+2y-4>4 \Leftrightarrow 4x+2y>8 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x+y>4 \Leftrightarrow 4-2x-y<0$, а это верно)

5) $2x>0$; $y<0$; $4-2x-y>0$.

Тогда:

$|2x|+|y|+|4-2x-y| =$
$= \cancel{2x}-y+4-\cancel{2x}-y = 4-2y>4$ ~~при~~ (поскольку $y<0$)

7) $2x>0$; $y>0$; $4-2x-y>0$.

Тогда:

$|2x|+|y|+|4-2x-y| = 2x+y+4-2x-y =$
$=4$. Это не >4. Поэтому 7 не уд. неравенству 1.

Тогда площадь фигуры, состоящей из точек, удовлетворяющих системе неравенств это площадь круга − площадь (7) =

$= \pi(\sqrt{5})^2 - \frac{2 \cdot 4}{2} = 5\pi - 4.$

Ответ: $5\pi - 4$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} & (1) \\ x+y^2=5 & (2) \end{cases}$$

(1) $x-2y=\sqrt{xy}$. Возведём в квадрат.

$xy \geq 0$ (т.к. $\sqrt{xy}$ определён)

Поэтому $x-2y \geq 0$

значит $(\sqrt{xy})^2=|xy|=xy$

$x^2-4xy+4y^2-xy=0$.

$x^2-5xy+4y^2=0$.

$D=25y^2-4\cdot4y^2=9y^2$.

$x_1=\frac{5y+3y}{2}=4y$.

$x_2=\frac{5y-3y}{2}=y$.

$x_1y=4y^2\geq0$, $x_2y=y^2\geq0$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=4y \\ x=y \end{array}\right. \\ x+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4y \\ x+y^2=5 \end{cases} (3) \\ \begin{cases} x=y \\ x+y^2=5 \end{cases} \end{array}\right.$$

(3) $4y+y^2=5$

$y^2+4y-5=0$.

$D=16+4\cdot5=36$.

$y_1 = \frac{-4+6}{2} = 1.$

$y_2 = \frac{-4-6}{2} = -5.$

4) $y^2 + y - 5 = 0.$

$D = 1 + 4 \cdot 5 = 21.$

$y_1 = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$

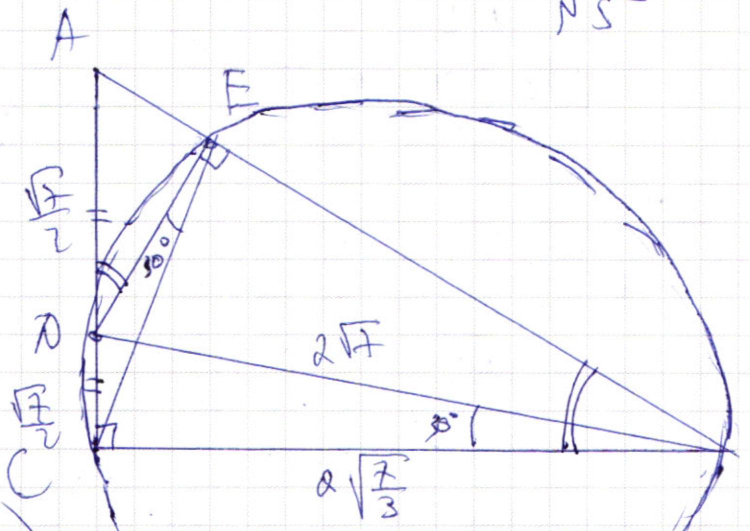
$y_2 = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}.$

Тогда: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -20 \\ y = -5 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{1+\sqrt{21}}{2} \\ y = -\frac{1+\sqrt{21}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{1-\sqrt{21}}{2} \\ y = -\frac{1-\sqrt{21}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $(4;1)$; $(-20;-5)$; $\left(-\frac{1+\sqrt{21}}{2}; -\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$; $\left(-\frac{1-\sqrt{21}}{2}; -\frac{1-\sqrt{21}}{2}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



1) CDEB — впис, поскольку противолежащие углы $= 90^\circ$.

2) Тогда $\angle DEC = \angle DBC = 30^\circ$,

3) Тогда $BD = \dfrac{BC}{\cos 30^\circ} = \dfrac{\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{7}$

4) $CD = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$ (т.к. катет лежащий против угла 30° равен $\frac{1}{2}$ гипотенузы)

5) $AD = AC - CD = \sqrt{7} - \dfrac{\sqrt{7}}{2} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

6) $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{\sqrt{7}} = \dfrac{1}{2}$.

7) $AC \perp BC$ и $DE \perp AB$, поэтому $\angle ADE = \angle ABC$.

8) Тогда $\triangle EAD \sim \triangle CAB$ по двум углам.

9) $S_{ADE} = \dfrac{S_{ABC}}{\left(\frac{AB}{AD}\right)^2} = \dfrac{AC \cdot BC \cdot AD^2}{2\, AB^2} =$

$$= \frac{\sqrt{7} \cdot 2\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(\sqrt{7})^2}{2}}{2 \cdot \left(\sqrt{AC^2+BC^2}\right)^2} = \frac{\frac{49}{\sqrt{3}}}{2 \cdot (AC^2+BC^2)} =$$

$$= \frac{\frac{49}{\sqrt{3}}}{2 \cdot \left((\sqrt{7})^2 + \left(2\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2\right)} = \frac{49}{2\sqrt{3}\left(7 + 4 \cdot \frac{7}{3}\right)} =$$

$$= \frac{49}{2\sqrt{3}\left(7 + \frac{28}{3}\right)} = \frac{49}{2\sqrt{3}\left(\frac{21+28}{3}\right)} =$$

$$= \frac{49}{2\sqrt{3} \cdot \frac{49}{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{2}$; $S_{AED} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7

Пусть $x = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$

$$f(x_x) = f(p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}) = f(p_1) + f(p_1^{\alpha_1 - 1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}) =$$

$$= p_1 \cdot \alpha_1 + \ldots + p_k \cdot \alpha_k.$$

То есть число равно сумме своих (простых) делителей.

$$f(p) = f(1) + f(p) \Leftrightarrow f(1) = 0,$$

$$f\left(\frac{x}{y_1 y_2}\right) = \cancel{f\left(\frac{x}{y_1} \cdot \frac{1}{y_2}\right)} = \cancel{\Rightarrow} \; f\left(x \cdot \frac{1}{y_1 y_2}\right) =$$

$$= f(x) + f\left(\frac{1}{y_1} \cdot \frac{1}{y_2}\right) = f(x) + f\left(\frac{y_1}{y_1 y_2}\right) + f\left(\frac{y_2}{y_1 y_2}\right) =$$

$$= f(x) + f(y_1) + f(y_2) + 2f\left(\frac{1}{y_1 y_2}\right)$$

Тогда:

$$f(y_1) + f(y_2) + 2f\left(\frac{1}{y_1 y_2}\right) = f\left(\frac{1}{y_1 y_2}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{y_1 y_2}\right) = -f(y_1) - f(y_2) < 0.$$

$$f\left(\frac{x}{y_1 y_2}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y_1 y_2}\right) = f(x) - f(y_1) - f(y_2)$$

Число равно сумме своих простых делителей, т.е.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
f(x)	0	2	3	4	5	5	7	6	6	7	11	7	13	9	8	8	17	8
				2+2		2+3		2+2+2	3+3	2+5		2+2+3		2+7	3+5	2+2+2+2		2+3+3

Пусть y – сост. число, т.е. $y = 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 16; 18$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, т.е. $f(x) < \underbrace{f(y_1) + f(y_2)}_{=f(y)}$

$y_1 y_2$

y	4 ($2 \cdot 2$)	6 ($2 \cdot 3$)	8 ($2 \cdot 2 \cdot 2$)	9 ($3 \cdot 3$)	10 ($2 \cdot 5$)	12 ($2 \cdot 2 \cdot 3$)	14 ($2 \cdot 7$)	15 ($3 \cdot 5$)	16 ($2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$)	18 ($2 \cdot 3 \cdot 3$)	Σ
кол-во вар. для x	3	4	6	6	8	8	14	11	11	11.	~~88~~ 82

(из пред. таблицы берем такие x, что $f(x) < f(y)$)

Пусть $y = 1$

Тогда $f\left(\frac{x}{1}\right) = f(x)$ = сумма пр. дел. ≥ 0.

Пусть y – простое. $(y = p)$

$$f\left(\frac{x}{p}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{p}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{p}\right) = f\left(\frac{2}{2p}\right) = f(2) + f\left(\frac{p}{2p}\right) + \cancel{f}\, f\left(\frac{2}{2p}\right) =$$

$$= 2 + f(p) + f(2) + 2f\left(\frac{1}{2p}\right) = 4 + f(p) + 2f\left(\frac{1}{2p}\right)$$

$$2 + f\left(\frac{1}{2p}\right) = 4 + f(p) + 2f\left(\frac{1}{2p}\right)$$

$$2 + f(p) + f\left(\frac{1}{2p}\right) = 0.$$

$$f\left(\frac{1}{2p}\right) = -2 - f(p)$$

$$f\left(\frac{x}{p}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{p}\right) = f(x) + f(2) + f\left(\frac{1}{2p}\right) =$$

$$= f(x) + \cancel{2} \cancel{-2} - f(p) = f(x) - f(p)$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y = p$	2	3	5	7	11	13	17	$\sum$
кол-во вар. для x	1	2	4	6	10	12	16	51

(из таблицы берём такие x, что $f(x) < f(p)$)

Всего вариантов для пар x, y:

$82 + 51 = 133$.

Ответ: 133.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

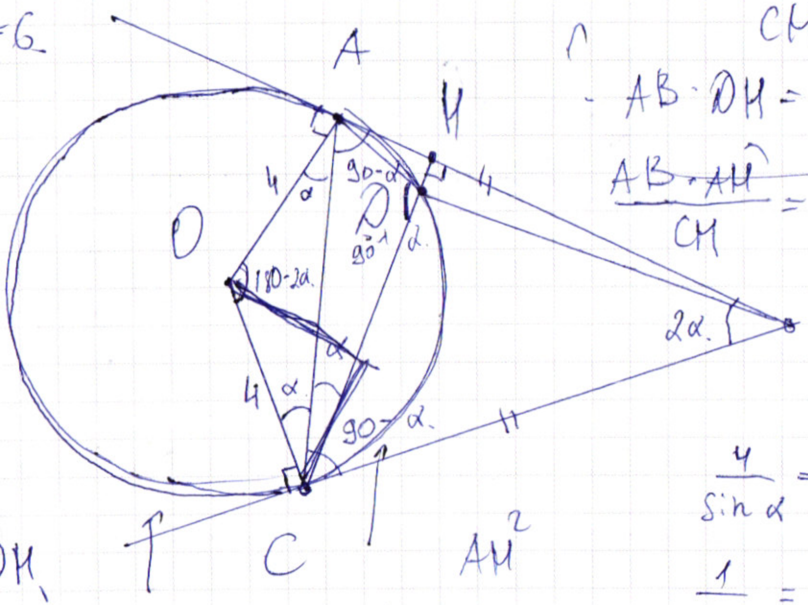
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(7) $R=4$

$S_\Delta ABD = 6$

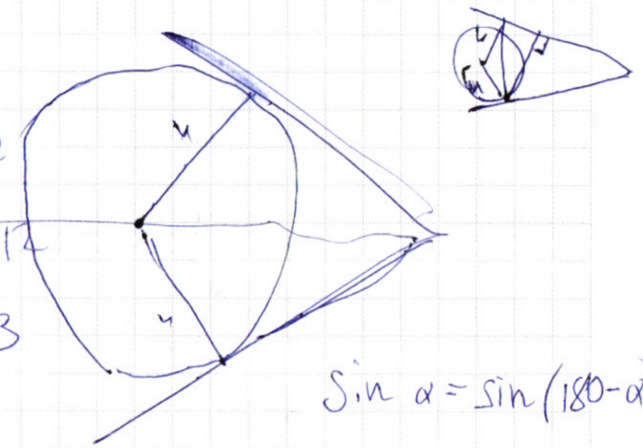
$DH \cdot AB = 12$



$DH = \frac{AH^2}{CH}$

$AB \cdot DH = 12$

$\frac{AB \cdot AH^2}{CH} = 12$



$\sin\alpha = \sin(180-\alpha)$

$\frac{AB}{CM} = ?$

$AH^2 = CH \cdot DH$

AH^2

$180-2\alpha$

$AB = BC$ $360-180+2\alpha = 180+2\alpha$

$\frac{4}{\sin\alpha} = 2\cdot 4$

$\frac{1}{\sin\alpha} = 2$

$\sin\alpha = \frac{1}{2}$

$\alpha = 30°$

$2\alpha = 60°$

$\frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt3}{2}} = \frac{2}{\sqrt3}$

BD

$= \frac{BC}{CH} = \frac{1}{\sin CB}$

$BC \cdot DH = 12$

$\frac{AC}{\cos\alpha} = 8$

$AC = 8\cos\alpha$ $\sin(90+\alpha) = \sin(180-90-\alpha) = \cos\alpha$

$f: R \to R$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(xy) = f(x) + f(y) = f(x) + y$

$f(y) = y$

$15xy \geq 18$

$f\left(\frac{y}{x}\right) < 0$

$f\left(\frac{x}{y}\cdot y\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right) + y$

$f\left(\frac{y}{x}\right) f$

черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\sqrt{xy}=2y \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=2y$$

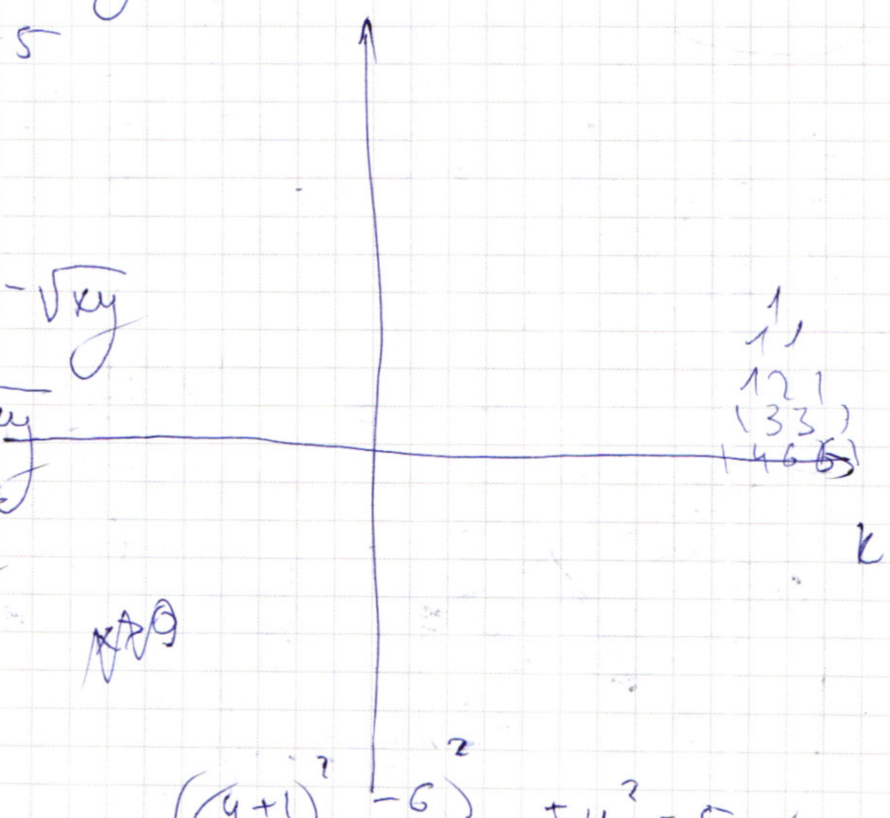
$$\cancel{x(\sqrt{5}+y)(\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{x}=\sqrt{5-y^2}$$

$x=k^2.$

$y^4+5y^3-6y^2-15y+25=0.$

$$\begin{cases} k^2-2y=k\sqrt{y} \\ k^2+y^2=5 \end{cases}$$



$x-2y-\sqrt{xy}=0.$

$\cancel{x}+y^2-\cancel{x}+2y=5-\sqrt{xy}$

$y^2+2y+1=6-\sqrt{xy}$

$(y+1)^2=6-\sqrt{xy}$

$|x|=\left(\frac{(y+1)^2-6}{\sqrt{y}}\right)^2=$ $\cancel{x}\geq 0$

$=\frac{((y+1)^2-6)^2}{y}$

$\frac{((y+1)^2-6)^2}{y}+y^2=5.$

$((y+1)^2-6)^2+y^3=5y$

$(y+1)^4-12(y+1)^2+36+y^3=5y$

$y^4+4y^3+6y^2+4y+1-12y^2-24y-12+36+y^3-5y=0.$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy}, \\ x + y^2 = 5 \end{cases}$$

$xy > 0.$

$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy$

$x^2 - 5xy + 4y^2 = 0.$

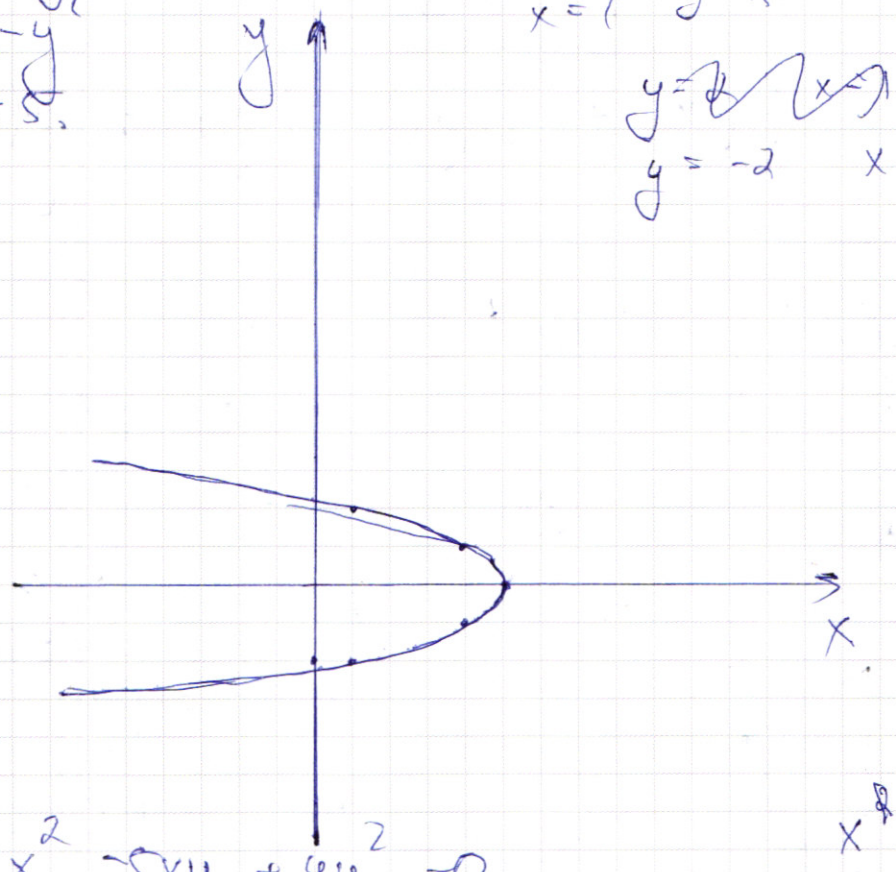
$x = 1 \quad y = 1,$

$x = 5 - y^2$

$= -y^2 + 5,$

$\cancel{y = 2 \quad x = 1}$

$y = -2 \quad x = -1$



$x^2 - 5xy + 4y^2 = 0.$

$x^2 - 2,5y$

$\cancel{(5 - y^2)^2}$

$\cancel{x - \sqrt{\tfrac{5}{2}}}$

$xy > 0.$

$x^2 - 5xy + 4y^2 = 0.$

$D = 25y^2 - 4 \cdot 4y^2 = 9y^2$

$x_1 = \dfrac{5y + 3y}{2} = 4y.$

$4y + y^2 = 5.$

$x_2 = y.$

$y^2 + y - 5 = 0.$

$y + y^2 = 5.$

$D = 1 + 4 \cdot 5 = 11 \quad y_1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

7. $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{1}{y_1 y_2}\right) = f\left(y_1 \cdot \frac{1}{y_1 y_2}\right) + f\left(y_2 \cdot \frac{1}{y_1 y_2}\right) =$

$= f(y_1) + f(y_2) + 2f\left(\frac{1}{y_1 y_2}\right)$

$f(y_1) + f(y_2) = \underbrace{-f\left(\frac{1}{y_1 y_2}\right)}$ $\cancel{+f(x)} < 0.$

$f\left(\frac{x}{y_1 y_2}\right) = f(x) + f(y_1) + f(y_2) + \underbrace{2f\left(\frac{1}{y_1 y_2}\right)}$

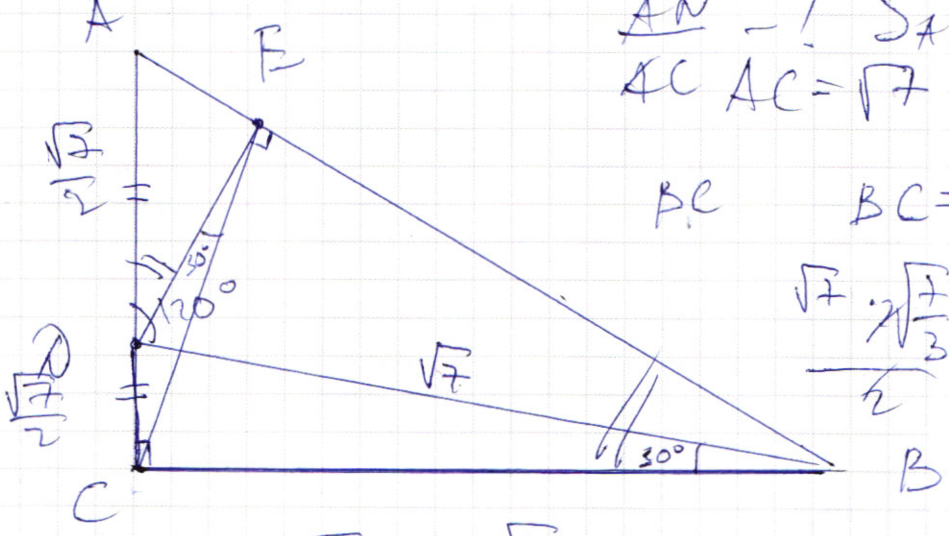
$= -2$

$f\left(\frac{1}{p}\right) = \underbrace{f\left(\frac{2}{p}\right)} + \underbrace{f\left(\frac{1}{2p}\right)}_{\wedge\, 0.}$

$7 + \frac{28}{3} =$

$=$

A



$\frac{AD}{AC} = 2.$ $\frac{\sqrt{7}}{2}$

$\frac{AD}{AC}$ – ? S_{AED}. $AC = \sqrt{7}$

k^2

BC $\quad BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$.

$\frac{\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{\frac{7}{3}}}{2} = \frac{7}{\sqrt{3}}$

$\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{2}} \cdot 2\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \sqrt{7}$ $\quad tg \cdot = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{7}}{2\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad S_{AED} = \frac{S_{ABC}}{\cancel{AB}\left(\frac{AB}{AD}\right)^2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$x, y.$

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4-2x-y| > 4. \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 5 \end{cases}$$

+ 1

$\cancel{2x} - y + 4 - \cancel{2x} - y > 4.$

$4 - 2y > 4.$

$\cancel{2} - 2y > \cancel{2}$

$y < 0.$

+ 2 $\quad 2x - y$

$-2x + \cancel{y} + 4 - 2x - \cancel{y} > 4.$

$-4x > 0$

$x < 0.$

$-\cancel{2x} + y - 4 + \cancel{2x} + y > 4.$

$2y > 8.$

$y > 4.$

7: $\quad 2x + \cancel{y} + \cancel{4} - 2x - y > \cancel{4}.$

$0 > 0.$

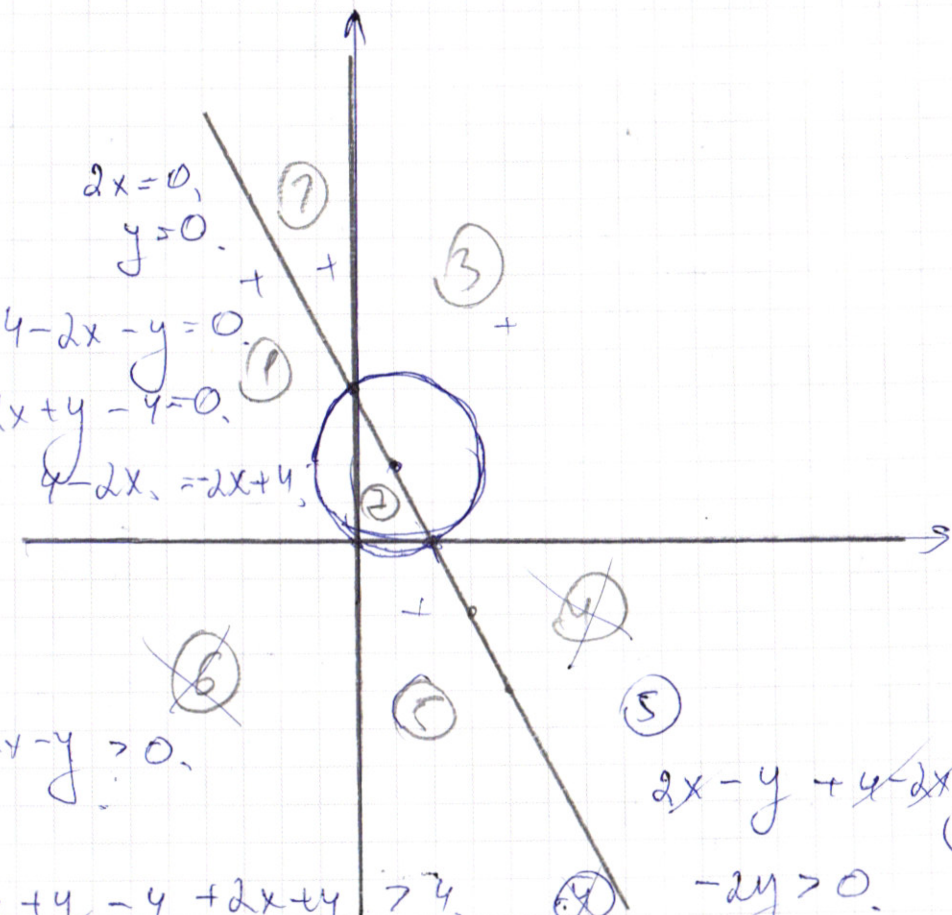
$2x = 0,$

$y = 0.$

$4 - 2x - y = 0.$

$2x + y - 4 = 0.$

$y = 4 - 2x, = -2x + 4.$



$4 - 2x - y > 0.$

3 $\quad 2x + y - 4 + 2x + y > 4.$

$2x + y > 4.$

$4 - 2x - y < 0.$

5 $\quad 2x - y + \cancel{4} - \cancel{2x} - y$

$-2y > 0.$

$y < 0.$

$\pi R^2 - \frac{2 \cdot 4}{2} = \pi(\sqrt{5})^2 - 4 =$

$= 5\pi - 4.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x - 2y = \sqrt{xy}$

$x + y^2 = 5$

$x = -y^2 + 5$

$x - 2y = \sqrt{xy}$

$-x - y^2 \quad 5$

$x - 2y - x - y^2 = \sqrt{xy} - 5$

$y^2 - 2y = 5 - \sqrt{xy}$

$y(y-2) = 5 - \sqrt{xy}$

$y(y-2) = 5 - \sqrt{y(5-y^2)}$

$y^2 - 2y - 5 = \sqrt{5y - y^3}$

$y^4 + 4y^2 + 25 - 4y^3 - 20y^2 + 20y = 5y - y^3$

$y^4 - 15y^2 - 3y^3 + 15y + 25 = 0$

$f\left(\frac{x}{p}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{p}\right)$

$f\left(\frac{1}{p}\right) = f\left(\frac{2}{2p}\right) =$

$= f(2) + f\left(\frac{1}{2p}\right) =$

$= f(2) + \ldots$

$2 + f\left(\frac{1}{2p}\right) =$

$= 2 + f\left(\frac{p}{2p}\right) + f\left(\frac{2}{2p}\right) =$

$2 + f\left(\frac{1}{2p}\right) = 2 + f\left(\frac{1}{2p}\right) = 24 - f(2) + f(p)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

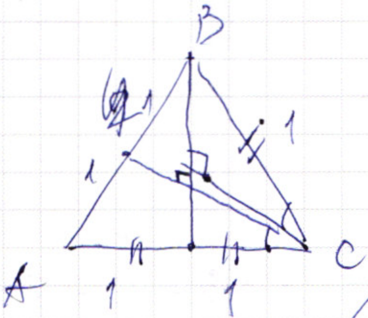
Страница №__

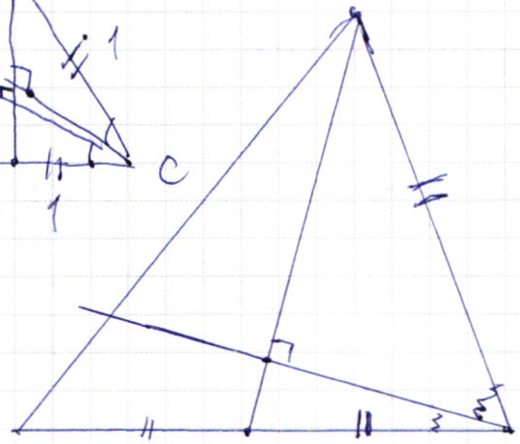
(Нумеровать только чистовики)

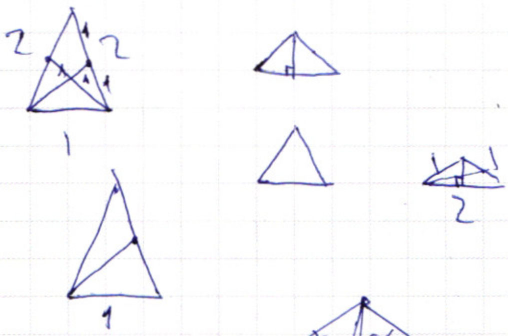
$P = 600$ $\qquad a;\ b;\ c$

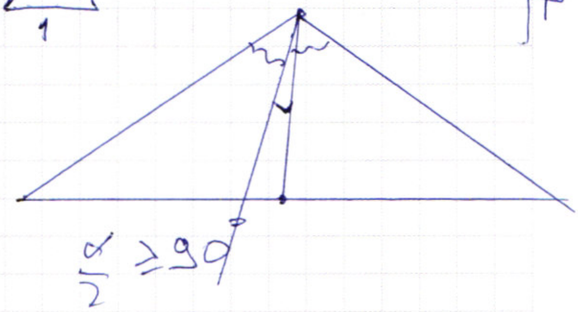
$100 - 60 + 10 - 2\cdot 7$

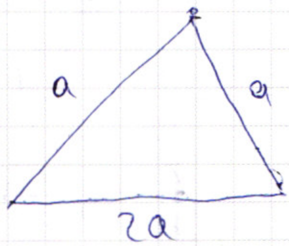
$200 -$

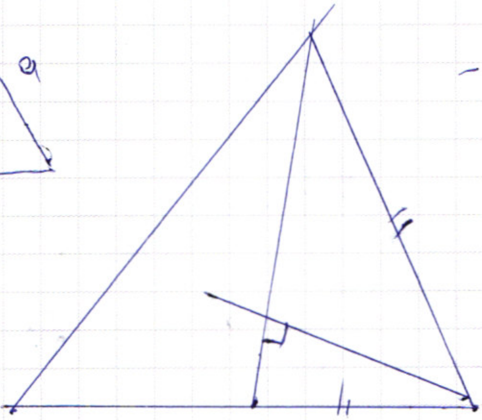






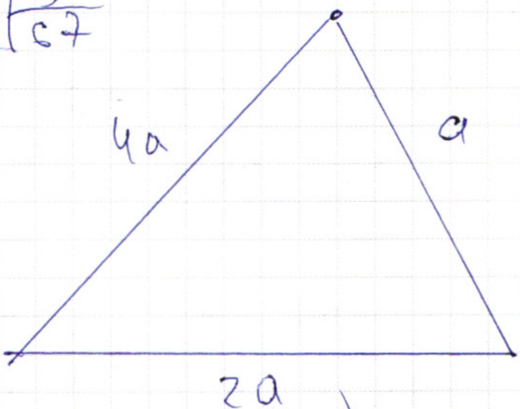


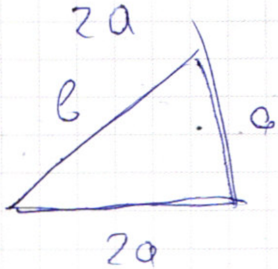




$-\frac{201}{18}\Big|\frac{3}{67}$

21





$a + 2a + b = 600$

$3a + b = 600.$

$b:3 \qquad b<0.$

пусть $\quad b > 300$

$3a + b = 600$

$100 < b < 300$

$= \underline{66}$

$1 .. 200.$

$a + b \geq 2a \qquad 3a > b$

$3a \geq b \geq a.$

$\left[\frac{200}{3}\right] = \frac{201}{3} - 1 =$

$102 \quad 105 \quad 108 \quad 111 \quad \ldots \quad 297$

$1 < b < 2001$

$1 .. 201 \quad \frac{201}{3} = 67$

$66.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\le 0.$$

$x^2-6x+10-2x+6=$
$=x^2-8x+16=(x-4)^2.$

0 2 3

$x\ne 0.$

1) $x<0.$

$9-6\cdot3+10=1$

$P=600.$ $2a$ $2a$ a

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x^2-2x}\le 0.$$

$2+4+$

$5a=600$

$a=\frac{600}{5}=120$

$$\frac{x^2-4x+4}{3x^2-6x}\le 0.\qquad \frac{(x-2)^2}{3x(x-2)}\le 0.$$

$3\cdot9-6\cdot3>0$

$2\cdot16-16+4\cdot2=16+8$

$\underbrace{3x}_{<0}\underbrace{(x-2)}_{<0}>0.$

2) $0<x\le 2.$

$2x^2-4x+|x||x-2|\le 0.$

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x-x(x-2)}\le 0.$$

$2x(x-2)+|x||x-2|\le 0.$

$\underbrace{|x||x-2|}(\underbrace{\pm2+1})\le 0.$

0 2

$x\cancel{(-4x+4)}$ $(x-2)^2$

$\cancel{|x||x-2|}$

$x(x-2)<0.$

$2x^2-4x-x^2+2x\le 0.$

$x^2-2x\le 0$

$x\in(0;2)$

0 2

$x\in(0;2)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(y_1)+f(y_2) = -f\left(\frac{1}{y_1y_2}\right)$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) + f\left(\frac{1}{2}\right) \qquad f(1)=0$

$f\left(\frac{1}{y_1y_2}\right) = f(y_1)+f(y_2)+2f\left(\frac{1}{y_1y_2}\right)$

$f(4) = f(2)+f(2) = 4.$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	2	3	4	5	5	7	6	6	7	11	7	13	9

15	16	17	18
8	8	17	8

$f\left(\frac{x}{y_1y_2}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y_1y_2}\right) + f\left(\frac{1}{y_1y_2}\right) + f(y_1)+f(y_2)$

$f(a_1a_2a_3) = f(a_1)+f(a_2a_3) = f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)$

$f(6) = f(2)+f(3) = 5$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = f($ $\qquad \frac{x}{y} = \cancel{\frac{x-1}{y}} + \frac{1}{y} \qquad x\cdot\frac{1}{y}$

$f(\cancel{ky}) - f\left(\frac{1}{ky}\right) \quad < \quad f\left(\frac{1}{y}\right) = f(k) + f\left(\frac{1}{ky}\right)$

чем > зн, тем меньше f

$\underbrace{f\left(\frac{1}{18}\right)} = f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right)$

$f\left(\frac{1}{18}\right) < f\left(\frac{1}{2}\right) \qquad f\left(\frac{1}{18}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{6}\right) =$

$< f\left(\frac{1}{3}\right) \qquad = f\left(6\cdot\frac{1}{18}\right) + f\left(3\cdot\frac{1}{18}\right) =$

$< f\left(\frac{1}{3}\right)$

$f\left(\frac{1}{18}\right) = f(6) + f\left(\frac{1}{18}\right) + f(3) + f\left(\frac{1}{18}\right)$

$f\left(\frac{1}{18}\right) < 0.$

$3+4+6+6+8+8+14+11\cdot 3 = 9+10+16+14+33 = 30+19+33 = 63+19 = 76+9 = 82$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

$2x-4y=\sqrt{xy}+5$

$y^2+2y=5-\sqrt{xy}$

$x=5-y$

$(y^2+2y-5)=-\sqrt{(5-y^2)y}$

$y(5-y^2)>0$

$\begin{cases} y<0 \\ 5-y^2\le 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y>0 \\ 5-y^2\ge 0 \end{cases}$

$\Leftarrow$ $y<-\sqrt{5}$

$0<y\le\sqrt{5}$

$f\left(\frac{1}{y}\right)=$

$f\left(2\cdot\frac{1}{2y}\right)=2+f\left(\frac{1}{2y}\right)$

$x+y\ge 2\sqrt{xy}$

$f\left(\frac{1}{y}\right)>f\left(\frac{1}{ky}\right)=f\left(\frac{1}{k}\right)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{1}{y}\right)=f\left(\frac{1}{ky}\right)=f(k)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{1}{18}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)$

$\shortparallel$

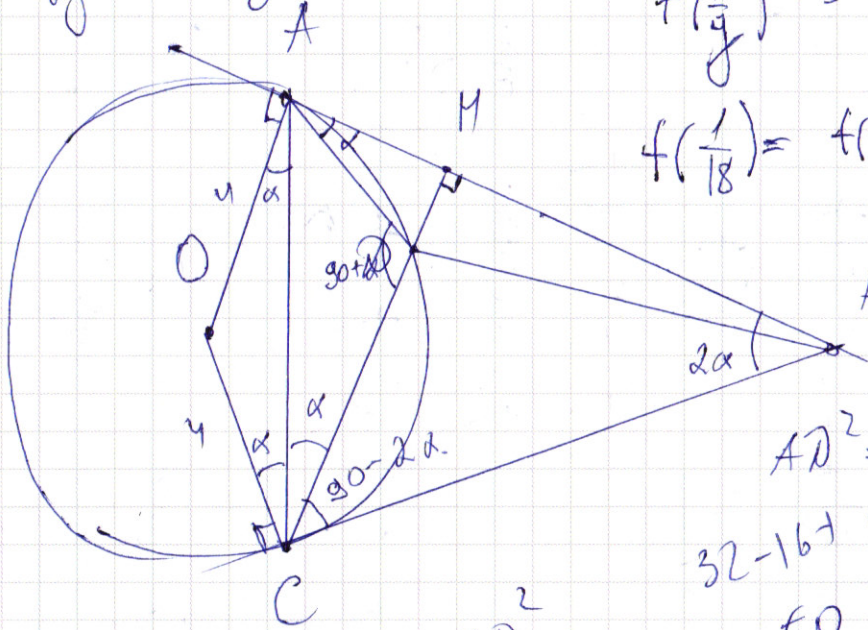
$f($

$180-90-\alpha-\alpha=$

$=90-2\alpha$

$\sin\alpha\cdot AB\cdot AD=12$

$\frac{AD}{\sin\alpha}=8$



$AD^2=8DH$

$32-16+4\cdot 2f$

$f0$

$AB\cdot AD^2=8\cdot 12$

$DH\cdot AB=12$

$\frac{AD^2}{DH}=8$

$AD=8\cdot\sin\alpha\cdot\frac{DH}{AD}$

$BC\cdot AD^2=8\cdot 12$

$\frac{AD}{DH}=\frac{1}{\sin\alpha}$

$AD=\frac{DH}{\sin\alpha}$

1. $\frac{1-6+10-2\cdot 2}{2-4+1}=\frac{1}{-1}=-1$

$2x^2-4x+x(x-2)=3(x-2)$

$1+2+4+6+10+12+16=$

$=10+10+28+3=20+28+3=48+3=51$

$=43+8-5=33+18=$

$=26+18+7$

$\boxtimes$ черновик $\square$ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)