



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy}, \\ 2y + x^2 = 9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром  $O$  касается прямых  $AB$  и  $BC$  в точках  $A$  и  $C$  соответственно. Высота  $CH$  треугольника  $ABC$  пересекает эту окружность в точках  $C$  и  $D$ . Найдите отношение  $AB : CH$ , если площадь треугольника  $ABD$  равна 15, а радиус окружности равен 6.
5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на катете  $AC$  и гипотенузе  $AB$  отмечены точки  $D$  и  $E$  соответственно, такие что  $DE \perp AB$ . Найдите отношение  $AD : AC$  и площадь треугольника  $AED$ , если известно, что  $AC = \sqrt{29}$ ,  $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$ , а  $\angle CED = 45^\circ$ .
6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами  $(x; y)$ , удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6, \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = p$  для любого простого числа  $p$ . Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $3 \leq x \leq 19$ ,  $3 \leq y \leq 19$  и  $f(x/y) < 0$ .



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3|} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(|x-1|-2)^2}{4(x^2-3x) + |x^2-3x|} \leq 0$$

Числитель всегда  $\geq 0$

Разбор случаев:

$$1. \begin{cases} (|x-1|-2)^2 = 0 \\ 4(x^2-3x) + |x^2-3x| \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x-1| = 2 \\ 4(x^2-3x) + |x^2-3x| \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=3 \\ x=-1 \end{cases} \\ 4(x^2-3x) + |x^2-3x| \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

$$2. 4(x^2-3x) + |x^2-3x| < 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \text{Значит } 4(x^2-3x) < 0 \Rightarrow \\ x^2-3x < 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2-3x) - (x^2-3x) < 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2-3x) < 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x < 0$$

параболой ветвями вверх

$$\Leftrightarrow x(x-3) < 0$$

$$\Leftrightarrow x \in (0; 3)$$

Ответ:  $x \in \{-1\} \cup (0; 3)$ .

N3

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 2x \geq 0 \\ y^2 - 4xy + 4x^2 = xy \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 2x \geq 0 \\ 2y = 9 - x^2 \\ (y - 4x)(y - x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2x \geq 0 \\ 2y = 9 - x^2 \\ \begin{cases} y = 4x \\ y = x \end{cases} \end{cases}$$

Разбор случаев:

$$1) \begin{cases} y = 4x \\ 4x - 2x \geq 0 \\ 8x = 9 - x^2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y = x \\ x - 2x \geq 0 \\ 2x = 9 - x^2 \quad D = 4 + 36 = 40 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x \\ x \geq 0 \\ (x - 1)(x + 8) = 0 \end{cases}$$

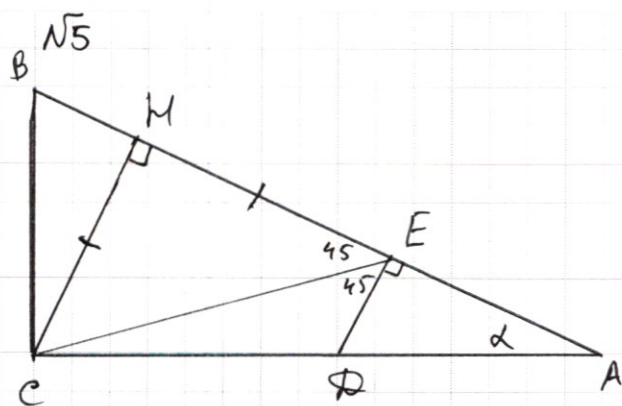
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x \leq 0 \\ x = \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{2} = -1 \pm \sqrt{10} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x \\ x \geq 0 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = -8 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{10} \\ y = -1 - \sqrt{10} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

Ответ:  $x = 1, y = 4$ ;  $x = -1 - \sqrt{10}, y = -1 - \sqrt{10}$



$$\angle CAB = \alpha$$

Опустим высоту из C на AB. (H - основание высоты)

т.к.  $ED \perp AB$ ,  $HC \parallel ED$

$$\angle CED = \cancel{90} 90 - \angle HED = 40 \Rightarrow \angle HED = 45 \Rightarrow \angle HCE = 45 \Rightarrow$$

$$CH = HE$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AH} \quad \text{из т. Паллеса}$$

$$\frac{AE}{AH} = \frac{AH - CH}{AH} = 1 - \frac{CH}{AH} = 1 - \tan \alpha = 1 - \frac{BC}{AC} = 1 - \frac{\frac{\sqrt{29}}{2}}{\frac{5\sqrt{29}}{2}} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$$

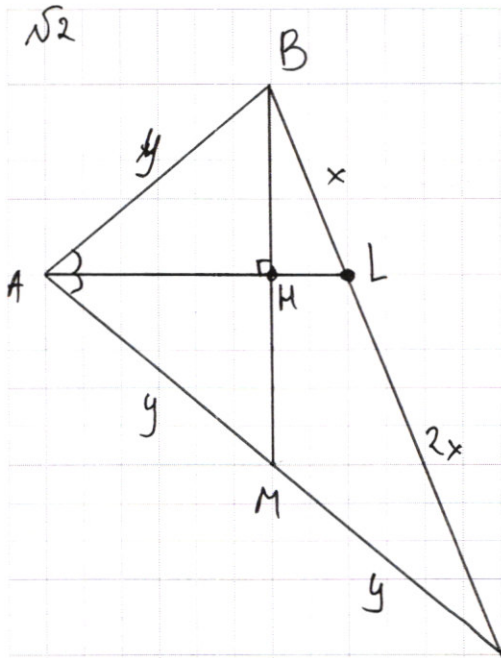
$$\frac{S_{AED}}{S_{AHC}} = \left(\frac{AE}{AH}\right)^2 \quad \text{т.к. } \triangle AED \sim \triangle AHC$$

$$S_{AED} = S_{AHC} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = S_{ACB} \cdot \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 \cdot \frac{9}{25} \quad (\text{т.к. } \triangle AHC \sim \triangle ACB)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{29} \cdot \frac{5}{2} \cdot \sqrt{29}}{2} \cdot \frac{\left(\frac{5\sqrt{29}}{2}\right)^2}{\frac{5^2}{2^2} \cdot 29 + 29} \cdot \frac{9}{25} = \frac{5 \cdot 29 \cdot 25 \cdot 29 \cdot 4 \cdot 9}{4 \cdot 4 \cdot 841 \cdot 28} = \frac{45}{4} = 11,25$$

$$\text{Ответ: } \frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}, \quad S_{AED} = 11,25.$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



В  $\triangle ABM$   $AH$  - биссектриса и  
высота  $\Rightarrow AB = AM = MC = y$

т.к.  $AL$  - биссектриса

$$\frac{AB}{BL} = \frac{AC}{CL}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CL}{LB} = \frac{2y}{y} = 2$$

Пусть  $BL = x \Rightarrow CL = 2x$

$$3y + 3x = 300$$

$$x + y = 100$$

Кер-ва треугольника:

$$\begin{cases} 3x < 2y + y \\ 2y < 3x + y \\ y < 3x + 2y \\ x + y = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 100 - x \\ 100 - x < 3x \\ x + y = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 50 \\ x > 25 \\ x + y = 100 \end{cases}$$

если они выполнены, то можно  
собрать треугольник  $ABC$ . Тогда если  
 $L$  делит  $BC$  в отношении  $1:2$  от т.  $B$ , то  
 $AL$  будет биссектрисой (т.к.  $\frac{y}{x} = \frac{2y}{2x}$ ), если  
взять  $M$  - середину  $AC$ , то  $AB = AM \Rightarrow$   
 $BM \perp AL \Rightarrow$  если выполняются система,  
где натуральных  $x, y$ , то условие  
верно

Таких  $x$  всего  $50 - 25 + 1 = 24$  и по каждому  $x$  однозначно  
определяется  $y \Rightarrow$  всего таких треугольников 24

Ответ: 24.

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

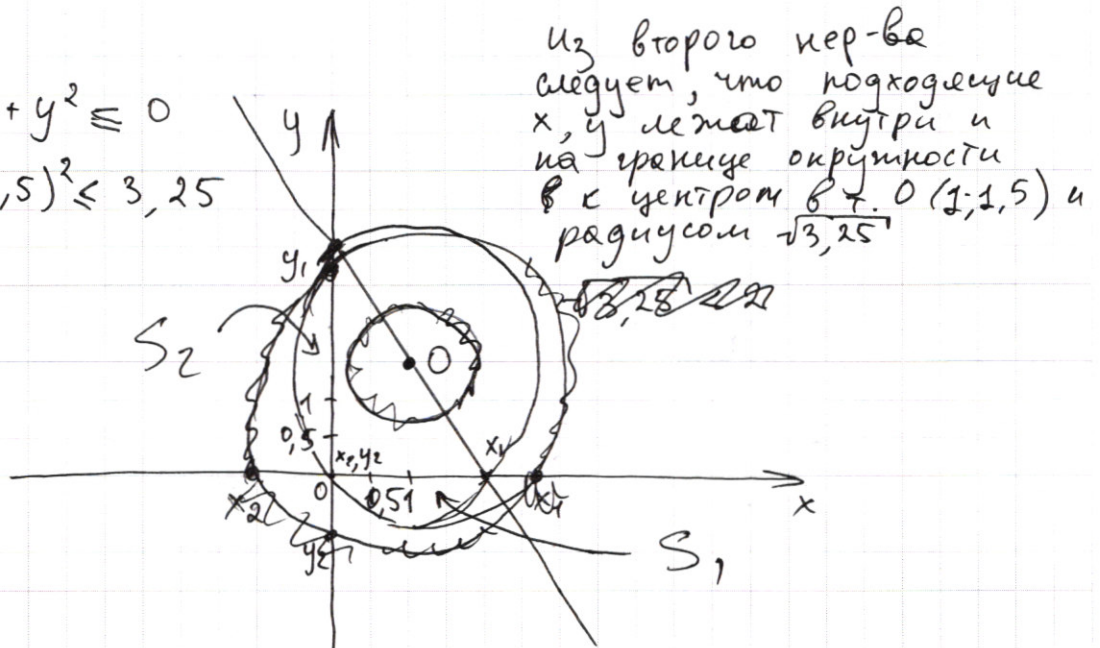
$$|3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| \geq |3x + 2y + 6 - 3x - 2y| = |6| = 6 \Rightarrow$$

~~нам~~ ~~не~~ ~~подходит~~

$$\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ 6 - 3x - 2y < 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0$$

$$(x - 1)^2 + (y - 1,5)^2 \leq 3,25$$



~~Из графика~~ ~~видно~~ ~~что~~ Если  $x > 0, y > 0 \Rightarrow 6 - 3x - 2y < 0$

$y > -1,5x + 3 \Rightarrow$  нам подходят точки, которые лежат выше прямой  $y = -1,5x + 3$  (прямая изображена на графике).  $\Rightarrow$  площадь этой части  $S_0 = \frac{\pi \cdot \sqrt{3,25}^2}{2} =$

$$= \frac{13}{8} \pi$$

$$(x_1 - 1)^2 + 2,25 = 3,25 \quad x_1 = 2$$

$$(x_2 + 1)^2 + 2,25 = 3,25 \quad x_2 = 0$$

$$(y_2 + 1,25)^2 + 1 = 3,25 \quad y_2 = 0$$

$$(y_1 + 1,25)^2 + 1 = 3,25 \quad y_1 = 3$$

$$S_1 + S_2 = \frac{\pi \cdot \sqrt{3,25}^2}{2} -$$

$$- \frac{3 \cdot 2}{2} = \frac{13}{8} \pi - 3$$

$$S = \frac{13}{4} \pi - 3$$

Ответ:  $\frac{13}{4} \pi - 3$ .



№7

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Rightarrow$  как-то из значений  $f(x)$ ,  $f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

~~это~~

эта функция показывает сумму простых делителей если аргумент натуральный.  $\Rightarrow$

$$f(x) > 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$$

$$f(1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$$

$$f(1) = f\left(\frac{a}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$f(a) = -f\left(\frac{1}{a}\right), \text{ где } a \text{ любое положительное, рац. а.}$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow$$

$$f(y) > f(x)$$

$$f(3) = 3, f(4) = 4, f(5) = 5, f(6) = 5, f(7) = 7,$$

$$f(8) = 6, f(9) = 6, f(10) = 7, f(11) = 11, f(12) = 7,$$

$$f(13) = 13, f(14) = 9, f(15) = 8, f(16) = 8, f(17) = 17,$$

$$f(18) = 11, f(19) = 19$$

$$3 \times 1, 4 \times 1, 5 \times 2, 6 \times 2, 7 \times 3, 8 \times 2, 9 \times 1, 11 \times 2, 13 \times 1,$$

$$17 \times 1, 19 \times 1$$

у нас есть 11 групп с разными значениями

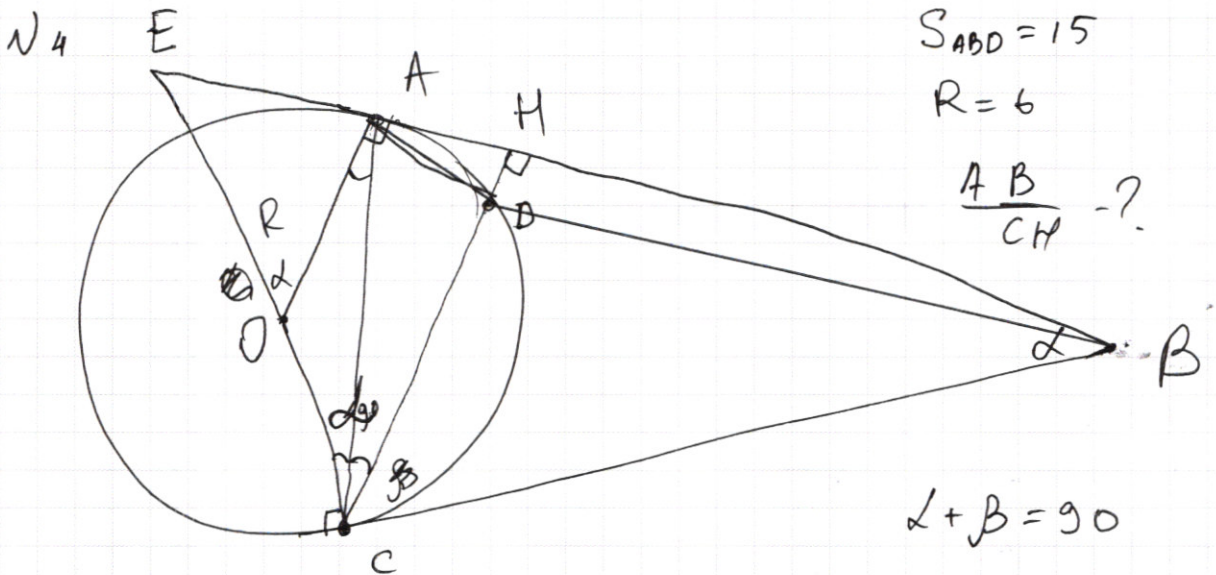
$\Rightarrow$  Выберем 2 значения из 2 разных групп

и  $f(y)$  будет больше значение, чем  $f(x) \Rightarrow$

~~верно~~ кол-во пар ~~≠~~

① если <sup>первое</sup> значение в группе  $\geq$  число  $\Rightarrow$

$$6 \cdot 11$$



$$HA^2 = HD \cdot HC$$

$$S_{ABD} = \frac{AB \cdot HD}{2} = \frac{AB \cdot HA^2}{2HC}$$

$$\frac{AB}{CH} = \frac{2S_{ABD}}{HA^2} = \frac{30}{HA^2}$$

$$\triangle OAE \sim \triangle BMC$$

$$\frac{EA}{EO} = \frac{MC}{BC} = \frac{HC}{AB}$$

по т. Понсе

$$\frac{AH}{OC} = \frac{EA}{EO} = \frac{HC}{AB}$$

$$AH = \frac{HC \cdot OC}{AB} = \frac{HC \cdot R}{AB} = \sin \alpha R$$

$$\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{R} = \frac{1}{OB} \quad \text{— по т. Синусов (OB — диаметр опис. окр.)}$$

N7 (продолжение)

②. если первое зн. из группы где 2 зн.

8.9

③. где 3 зн.  $\Rightarrow 3 \cdot 14 \cdot 4 = 180$  Всего  $66 + 72 + 42 = 180$

Ответ: 180

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

Доп. прот.

$$|6 - 3x - 2y| < 6 - |3x| - |2y|$$

$$\begin{cases} 6 - 3|x| - |2y| > 0 \\ (6 - 3x - 2y)^2 < (6 - (|3x| + |2y|))^2 = 36 - 12(|3x| + |2y|) + 9x^2 + 12|xy| + 4y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 - 3|x| - |2y| > 0 \\ |3x| + |2y| < 6 \end{cases}$$

$$6 - |3x| - |2y| > 0$$

$$|3x| + |2y| < 6$$

$$-6 < 3x + 2y < 6$$

$$|3x + 2y| < 6$$

$$-6 < 3x < 6$$

$$-2 < x < 2$$

$$-6 < 3x + 2y < 6$$

$$-6 < 2y < 6$$

$$-3 < y < 3$$

$$|3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| \leq 6$$

~~$$|6 - 3x - 2y| < 6 - |3x| - |2y|$$~~

Если,  $-2 < x < 2$ ,  $-3 < y < 3$

$$|3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6 \quad \text{Доп. прот.}$$

$$|3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| \geq |3x + 2y + 6 - 3x - 2y| = 6 \Rightarrow$$

Если все  $3x \geq 0$ ,  $2y \geq 0$ ,  $6 - 3x - 2y \geq 0 \Rightarrow$  не подходит

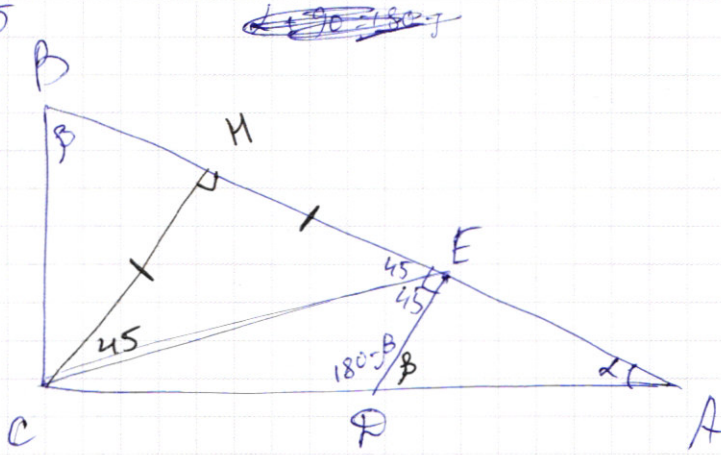
$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$6 \geq 3x + 2y$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



$$\frac{AD}{AC} = ?$$

$$S_{AED} = ?$$

$$BC = \sqrt{29} \quad AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$$

$$\angle CEC = 45^\circ, \alpha$$

$$AD \cdot AC = AE \cdot AB \quad \text{т.к. } B E D C - \text{ впис.}$$

$$ACB \sim AED$$

$$\left[ \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{ED}{BC} \quad \text{из подобия} \right]$$

$$AB = \sqrt{29 + \frac{25 \cdot 29}{4}} = \sqrt{29 \cdot \frac{29}{4}} = 14,5$$

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + 16 - 3x - 2y| > 6 \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} |16 - 3x - 2y| > 6 - |3x| - |2y| \\ y^2 + x^2 < 2x + 3y \end{cases}$$

$$(x-1)^2 + (y-1,5)^2 \leq 3,25$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AH} = \frac{ED}{CH} \quad \frac{AH - CH}{AH} = 1 - \frac{CH}{AH} = 1 - \text{tg} \alpha =$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{29}}{\frac{5\sqrt{29}}{2}} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$29 \cdot \frac{29}{4} =$$

$$\frac{S_{AED}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AE}{AH}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} = 0,36$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ \times 29 \\ \hline 261 \\ + 58 \\ \hline 841 \end{array}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AEB}} = \left(\frac{AC}{BA}\right)^2$$

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

$$f(p) = p$$

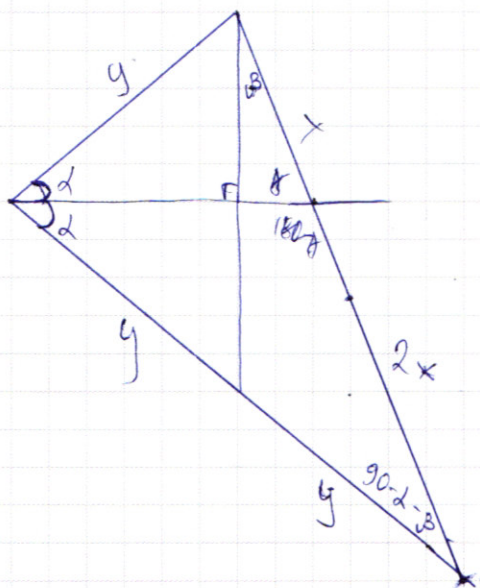
$$3 \leq x < 19, \quad 3 \leq y \leq 4 \quad f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \quad (x_i - 1)^2 +$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$f(x) > 0 \quad f\left(\frac{1}{y}\right) < 0 \quad f\left(\frac{x}{y}\right) > 0$$

если  $y \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{y}$  - не целое!

№2



$$3y + 3x = 300 \quad x + y = 100$$

$$x = 100 - y$$

~~Скорее~~

$$9x^2 = y^2 + 4y^2 - 2y^2 \cos(2\alpha) \cdot 2y^2$$

$$9x^2 = 5y^2 - 4y^2 \cos(2\alpha)$$

$$2y - \text{цел} \quad y - \text{цел.}$$

$$3x - \text{цел}$$

$$9x^2 - 5y^2 - \text{цел.} \Rightarrow 4y^2 \cdot \cos(2\alpha) - \text{цел.} \Rightarrow$$

$$4y^2 - \text{цел}$$

$$y^2 = 4y^2 + 9x^2 - 2 \cos(90^\circ - \alpha - \beta) \cdot 6xy$$

$$3y > 3x$$

$$3y^2 + 9x^2 = 12 \cos(90^\circ - \alpha - \beta) \cdot xy$$

$$y > x$$

$$9(100 - y)^2 = 5y^2 - 4y^2 \cdot \cos(2\alpha)$$

$$3x > 2y - y$$

$$9 \cdot 10000 - 1800y + y^2 = 5y^2 - 4y^2 \cdot \cos(2\alpha) \quad 3x > y$$

$$4y^2 \rightarrow 4y^2 (1 - \cos(2\alpha)) + 1800y - 90000 = 0$$

По и. о. раз. корни

~~2 = 18000~~

$$4(1 - \cos(2\alpha))$$

$$100 - x > x$$

$$(1 - \cos(2\alpha)) 4y - \text{цел}$$

$$a + b > c$$

$$3x > 100 - x$$

$$a - b < c$$

$$c + b > a$$

$$100 > 2x$$

$$50 > x$$

$$100 > 2x$$

$$y + x \geq L$$

$$L > y - x$$

$$4x > 100$$

$$x > 25$$

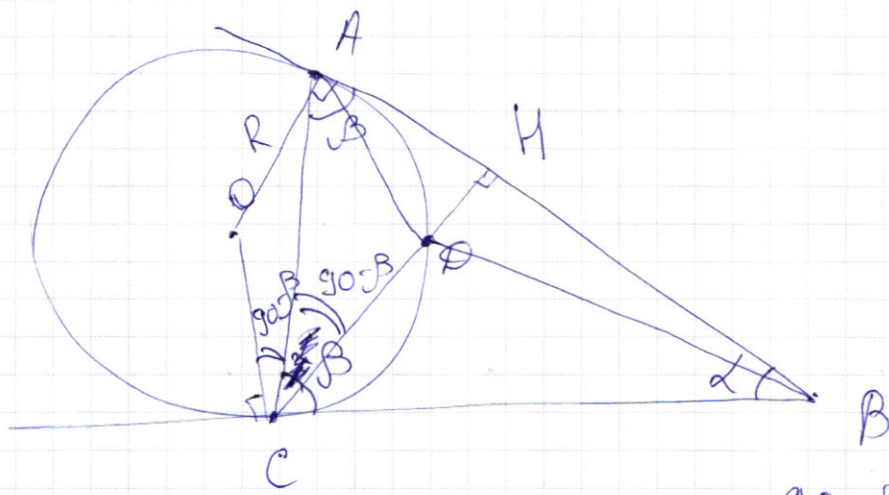
$$2y + x \geq L$$

$$L > 2y - 2x$$

$$L > 200 - 4x \quad \text{даже при } x = 26$$

$$200 - 26 \cdot 4 =$$

N4



$$\frac{AB}{CH} = ?$$

$$S_{ABD} = 15$$

$$R = 6$$

$$S_{ABD} = \frac{AB \cdot HD}{2} = 15$$

$$90 - \beta = \frac{\alpha}{2}$$

$$HA^2 = HD \cdot HC \quad \text{— с.т.н}$$

Из подобия  $\triangle ACH$ ,  $\triangle ABC$ ;

$$S_{ABD} = \frac{AB \cdot HA^2}{2HC} = 15$$

$$\frac{AB}{CH} = 2 \cdot 15 / HA^2 = \frac{30}{HA^2}$$

$$\sin(90 - \beta) = \frac{AH}{AC} = \cos \beta \quad \Rightarrow \quad \frac{AH}{\sqrt{2R \cdot HC}}$$

$$R^2 = AC^2 + R^2 - 2 \cos(90 - \beta) \cdot AC \cdot R$$

$$AC = 2R \sin \beta = 2R \cdot \frac{HC}{AC}$$

$$AC = \sqrt{2R \cdot HC} \quad AC^2 = 2R \cdot HC$$

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2 \cos \beta \cdot CB \cdot AC$$

$$AC^2 = 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\alpha)$$

$$AC^2 = 2AB \cdot AC \cdot \frac{AH}{AC}$$

$$AC^2 = 2 \cdot AB \cdot AH$$

$$AC = 2 \cdot \sin(90 - \beta) \cdot AB =$$

$$= 2 \cos \beta \cdot AB$$

~~AB~~

$$f\left(\frac{1}{p}\right) = 1 + f\left(\frac{1}{p}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{s}\right) = f\left(\frac{1}{p}\right) = f\left(\frac{1}{p}\right) + f$$

66  
x 42  
x 112  
136

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 3

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ y = \frac{9-x^2}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 9 - x^2 - 4x = 2\sqrt{x \cdot \frac{9-x^2}{2}} \\ y = \frac{9-x^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ y = \frac{(x+3)(3-x)}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y - 2x \geq 0 \\ y^2 - 4xy + 4x^2 = xy \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 2x \geq 0 \\ y = \frac{9-x^2}{2} \\ y^2 - 5xy + 4x^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y - 2x \geq 0 \\ y = \frac{9-x^2}{2} \\ (y-4x)(y-x) = 0 \end{cases} \quad \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\begin{cases} y - 2x \geq 0 \\ y = \frac{9-x^2}{2} \\ y = 4x \\ y = x \end{cases}$$

Разбор случаев:

$$1) \begin{cases} y = 4x \\ 4x - 2x \geq 0 \\ 8x = 9 - x^2 \\ x^2 + 8x - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4x \\ x \geq 0 \\ (x-1)(x+8) = 0 \end{cases}$$

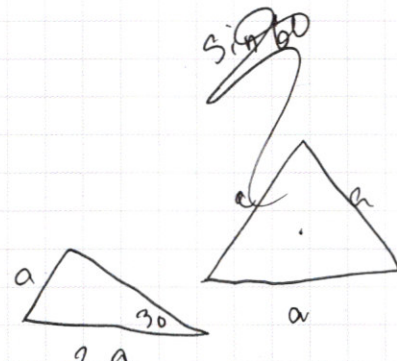
$$\begin{cases} x = 1 \\ x = -8 \\ x \geq 0 \\ y = 4x \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y = x \\ x - 2x \geq 0 \\ 2x = 9 - x^2 \\ x^2 + 2x - 9 = 0 \end{cases} \quad \frac{\sin 30}{a} = \frac{1}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} y = x \\ x < 0 \\ x = \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{2} = -1 \pm \sqrt{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 - \sqrt{10} \\ y = -1 - \sqrt{10} \end{cases} \quad \frac{AC}{\sin(180-2)} = \frac{R}{\sin \frac{1}{2}}$$

Ответ:  $x = 1, y = 4$ ;  $x = -1 - \sqrt{10}, y = -1 - \sqrt{10}$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3|} \leq 0$$

$$\frac{(x-1)^2 + 4 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x(x-3)|} \leq 0$$

$$\frac{(x-1)^2 + 4 - 4|x-1|}{4(x^2 - 3x) + |x^2 - 3x|} \leq 0$$

$$\textcircled{1} \frac{(x-1)^2 + 4 - 4|x-1|}{4(x^2 - 3x) + |x^2 - 3x|} = 0$$

$$\frac{(1x-1|-2|)^2}{4(x^2-3x)+|x^2-3x|} \leq 0$$

Числитель всегда  $\geq 0 \Rightarrow$

Разбор случаев:

$$1) \begin{cases} (1x-1|-2|)^2 = 0 \\ 4(x^2-3x) + |x^2-3x| \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-1|=2 \\ 4(x^2-3x) + |x^2-3x| \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3 \\ x=-1 \\ 4(x^2-3x) + |x^2-3x| \neq 0 \end{cases}$$

$$x = -1$$

Ответ:  $x \in \{-1\} \cup (0; 3)$

$$2) \frac{4(x^2-3x) + |x^2-3x|}{4(x^2-3x) + |x^2-3x|} < 0$$

$$4x^2 + 12x > |x^2 - 3x|$$

$$4(3-4x) > |x^2 - 3x|$$

$4x^2 + 12x$  - парабола ветвями вниз

$$\text{Значит } x^2 - 3x < 0 \Rightarrow$$

$$4(x^2 - 3x) - (x^2 - 3x) < 0$$

$$3(x^2 - 3x) < 0$$

$$x^2 - 3x < 0 \quad \text{- парабола ветвями вверх}$$

$$x(x-3) < 0$$

$$x \in (0; 3) \cup ($$

$$x \in (0; 3)$$

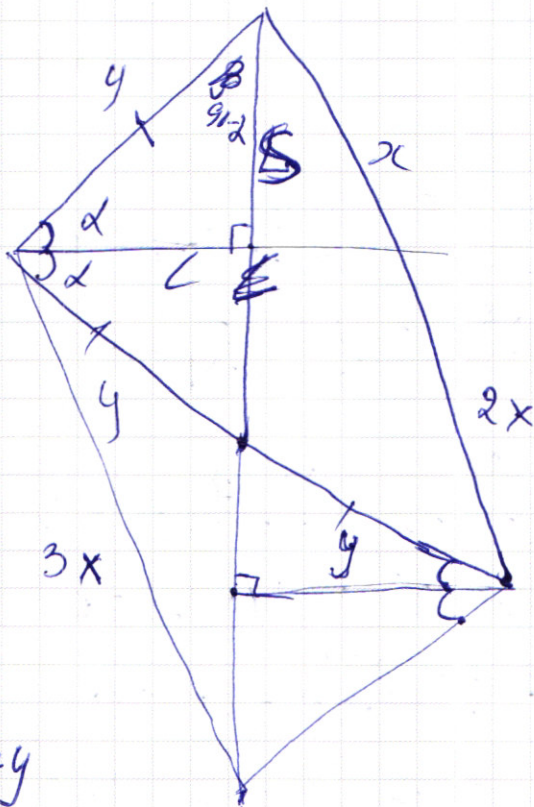
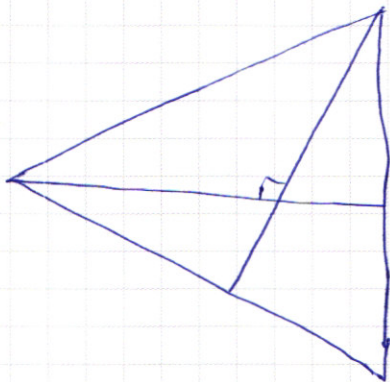


№ 2

$P = 300$

$3x + 3y = 300$

$x + y = 100$



$x^2 = l^2 + y^2 - 2 \cos \alpha \cdot l y$

$4x^2 = l^2 + 4y^2 - 4 \cos \alpha \cdot l y$

$3x^2 = 3y^2 - 2 \cos \alpha \cdot l y$

$l^2 = S^2 + y^2 - 2 \cos(90 - \alpha) \cdot S y$

$S^2 = 2 \sin \alpha \cdot S y$

$S = 2 \sin \alpha \cdot y$

~~8~~

$9x^2 = y^2 + 4S^2 - 2 \cos(90 - \alpha) \cdot 2 S y$

$9x^2 = y^2 + 4S^2 - 4 \sin \alpha \cdot S y$

$9x^2 = y^2 + 4 \cdot 4 \sin^2 \alpha \cdot y - 8 \sin^2 \alpha \cdot y^2 =$   
 $= y^2 + 8 \sin^2 \alpha \cdot y$

