



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy}, \\ 2y + x^2 = 9. \end{cases}$$

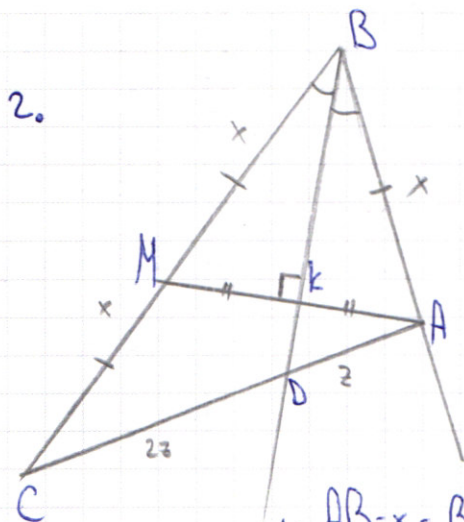
4. [5 баллов] Окружность с центром  $O$  касается прямых  $AB$  и  $BC$  в точках  $A$  и  $C$  соответственно. Высота  $CH$  треугольника  $ABC$  пересекает эту окружность в точках  $C$  и  $D$ . Найдите отношение  $AB : CH$ , если площадь треугольника  $ABD$  равна 15, а радиус окружности равен 6.
5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на катете  $AC$  и гипотенузе  $AB$  отмечены точки  $D$  и  $E$  соответственно, такие что  $DE \perp AB$ . Найдите отношение  $AD : AC$  и площадь треугольника  $AED$ , если известно, что  $AC = \sqrt{29}$ ,  $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$ , а  $\angle CED = 45^\circ$ .
6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами  $(x; y)$ , удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6, \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = p$  для любого простого числа  $p$ . Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $3 \leq x \leq 19$ ,  $3 \leq y \leq 19$  и  $f(x/y) < 0$ .



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

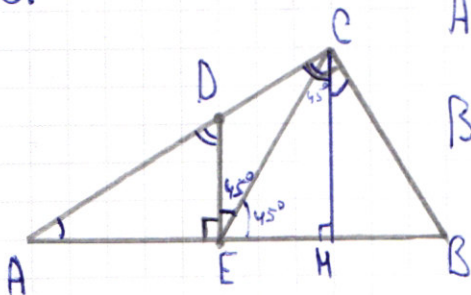


Пусть  $x$  — катет такой прямоуголь-  
ного  $\triangle MBK$  — медиана  $BM$  — биссектриса и  
перпендикулярны в точке  $K$ .  
Так как в  $\triangle MBK$   $KB$  — биссектриса и  
высота то  $\triangle MBK$  — равнобедренный  
и  $AB = x = BM = \frac{BC}{2}$  тогда  $BC = 2x$   $AB = x$ . И

мед. биссектриса делит сторону  $AC$  в отношении  $\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC}$  тогда если  
 $AD = z$ ,  $CD = 2z$  и оба периметры равны  $3x + 3z = 300$  тогда  
 $x + z = 100$ . При этом мы знаем что для того чтобы треуголь-  
ник существовал надо чтобы каждая сторона была меньше  
суммы двух других:  $3z < 3x \Rightarrow z < x$  и  $2x < 3z + x \Rightarrow x < 3z$   
тогда  $z < 100 - z \Rightarrow z < 50$  и  $3z > 100 - z \Rightarrow z > 25$

и  $z \in (25; 50)$  а  $x$  соотв.  $\in (50; 75)$  при этом каждому  $z$   
соответствует только один  $x$  и наоборот (каждому  $x$  один  $z$ )  
тогда такие пары удовлетвор. условию 24 и треугольни-  
ков тоже 24. Ответ: 24.

5.



$$AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$$

$$BC = \sqrt{29}$$

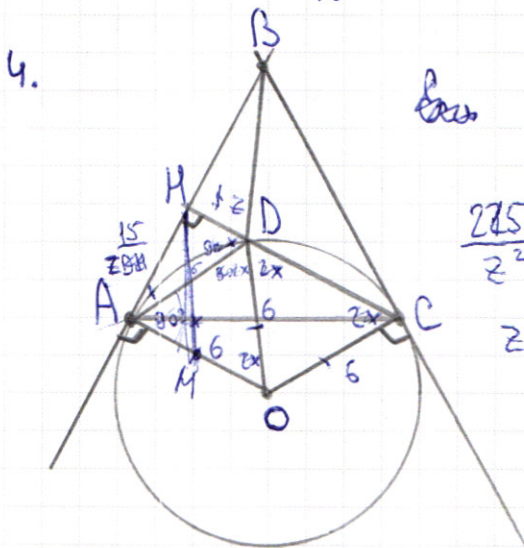
$\angle CED = 45^\circ$  Для катета можно  
найти длину гипотенузы  $AB$   
$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{\frac{25 \cdot 29}{4} + 29} = \sqrt{\frac{29^2}{4}} = \frac{29}{2}$$

Также мы знаем что  $S = \frac{ah}{2}$  и вна-

мен. треугольнике  $S = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{AB \cdot h}{2}$  откуда  $h = \frac{AC \cdot BC}{AB} =$   
 $= \frac{5 \cdot 29}{2 \cdot 29} = 5 = CH.$

$DE \perp AB$  и при этом  $\angle CED = 45^\circ$ , тогда  $\angle CEH = 45^\circ$ , следовательно  $\triangle CHE$  - равнобедренный и прямоугольный и  $CH = HE = 5$ . Из  $\triangle CHB$  по теореме Пифагора  $HB = \sqrt{29 - 25} = 2$  тогда  $AE = AB - EH - HB = \frac{29}{2} - 5 - 2 = \frac{15}{2}$ . Можно заметить что  $\triangle AHC \sim \triangle AED$  (по 3 углам  $\angle CAH$  - общий и  $CH \parallel DE$  т.к. оба  $\perp$  к  $AB$ ) и поэтому получаем что  $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AH} = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{15}{2} + 5} = \frac{3 \cdot 29}{2 \cdot 29} = \frac{3}{5}$ . Теперь по этому же  $k = \frac{3}{5}$  можно найти  $DE = \frac{5 \cdot 3}{5} = 3$ , откуда площадь  $\triangle AED$  равна  $S_{AED} = \frac{DE \cdot AE}{2} = \frac{3 \cdot \frac{15}{2}}{2 \cdot 2} = \frac{45}{4}$ .

Ответ:  $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$   $S_{AED} = \frac{45}{4}$ .



4.  $S_{ABD} = \frac{DH \cdot AB}{2} = 15$   $DH \cdot AB = 30$

из  $\triangle AMH$   
 $\frac{225}{z^2} + 36 + 12z + z^2 = 36$   
 $z^4 + 12z^3 + 225 = 0$

Мы видим что из  $H$  проводим касательную и секущую тогда  $AH^2 = CH \cdot HD$   
 $\frac{AB}{CH} = \frac{2AH}{CH} = \frac{2DH}{AH} = \frac{2DH}{15}$   
 осталось найти  $DH$

1. Чтобы условие  $\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x||x-3|} \leq 0$  выполнялось, надо чтобы или знаменатель  $> 0$  и числитель меньше, или наоборот числитель  $< 0$ , а знаменатель больше, или (т.к. неравенство нестрогое) знаменатель равен 0. (при этом числ.  $\neq 0$  и  $x \neq \{0, 3\}$ )

Рассмотрим эти случаи:  
 1)  $\begin{cases} x^2 - 2x + 5 < 4|x-1| \\ 4x^2 - 12x + |x||x-3| > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 9 < 0 \\ -x^2 + 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x-3)^2 < 0 \\ (x+1)^2 < 0 \end{cases} \emptyset$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2) \begin{cases} x^2 - 2x + 5 > |4x - 4| \\ -4x^2 + 12x > |x| |x - 3| \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 > 0 \\ (x+1)^2 > 0 \end{cases} \quad x \neq 3 \text{ и } -1$$

$$4x(3-x) > |x| |x-3|$$

$$x > 3$$

$$\underbrace{-4x(x-3)}_{>0} > \underbrace{|x| |x-3|}_{>0}$$

противоречие.

$$x < 3$$

$$4x(3-x) > |x| (3-x)$$

$$4x > |x|$$

$$x > 0 \\ 4 > 1$$

$$x < 0 \\ 4 < -1$$

$$\begin{cases} 4x > x & 4 > 1 & x \in (0; 3) \\ 4x < -x & -4 < -1 & x < 0 \end{cases}$$

ответ:  $x \in (0; 3) \cup \{-1\}$

$$\begin{cases} -4x < x \\ -4 < 1 \end{cases}$$

и при  $x^2 - 2x + 5 - 4|x-1| = 0$   
 $|x^2 - 2x + 5 = 4|x-1|$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 5 = 4x - 4 \\ x^2 - 2x + 5 = 4 - 4x \end{cases}$$

$$(x-3)^2 = 0 \quad x = 3$$

$$(x+1)^2 = 0 \quad x = -1$$



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

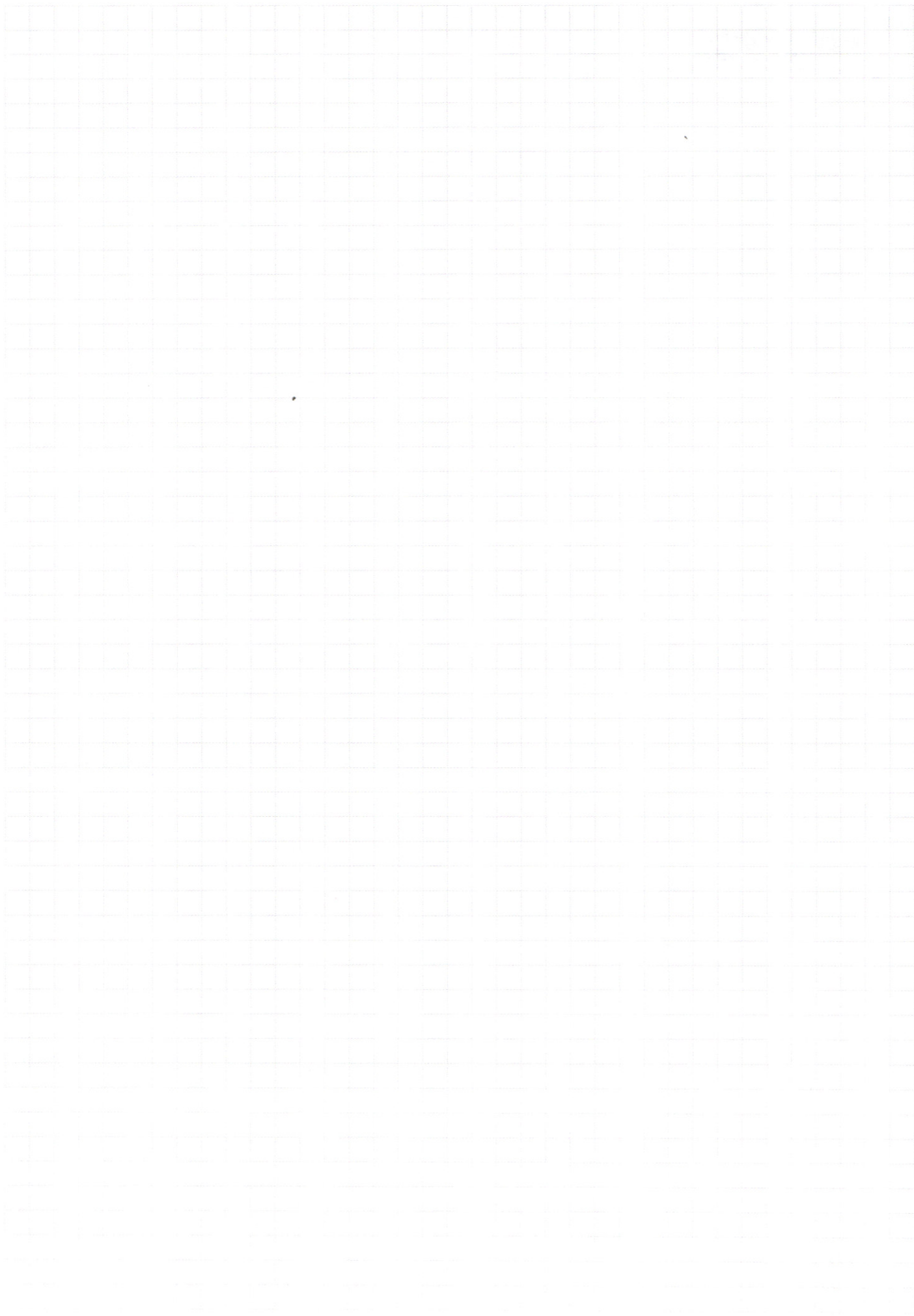
(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)





черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$25 - 10 + 5 - 16 = 4$   
 $4x^2 + 5 - 4 = 1$   ~~$25 - 10 + 5 - 16 = 4$~~   
 $16x^2 + 4 + 2 = 6$

$x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1| \leq 0$   
 $4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3| \leq 0$

$100 - 60 + 10 = 50$   
 $100 + 60 + 10 = 0$

1)  $\begin{cases} x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1| < 0 \\ 4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3| > 0 \end{cases}$

2)  $\begin{cases} x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1| \geq 0 \\ 4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3| < 0 \end{cases}$

$x \neq 3$   
 $|x| \cdot |x - 3| < 4x(3 - x)$  при  $x > 3$   $|x| \cdot |x - 3| < -4x(x - 3)$   
 $|x| < 4x$

$4x^2 - 12x > -|x| \cdot |x - 3|$   
 $4x - 4 \geq x^2 - 2x + 5$   
 $4x - 4 \leq -x^2 + 2x + 5$

$x^2 - 6x + 9 < 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 < 0$   
 $x^2 + 2x + 1 < 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 < 0$

$x = \{-1, 3\}$   
 $\emptyset$

$-4x^2 + 12x < |x| \cdot |x - 3|$   
 $|x| \cdot |x - 3| > -4x^2 + 12x$   
 $|x| \cdot |x - 3| \leq 4x^2 - 12x$

$x \neq 3$   
 $|x|(x - 3) > 4x(3 - x)$   
 $|x|(x - 3) \leq 4x(x - 3)$   
 $|x| > -4x$   
 $|x| < 4x$

$x > 0$   
 $49y^4 - 50y^3 - 279y^2 + 1296 = 0$   
 $50y^3 - 225y^2 + 36 - 8y^2 - 5\sqrt{9 - 2y}y = 0$   
 $7y^2 - 36 - 8y - 2y^2 = 0$

$AB = BC$   
 $S = \frac{AB \cdot DH}{2} = 15$   
 $AB \cdot DH = 30$   
 $AB = 10$   
 $\frac{AB}{CH} = \frac{10}{9}$   
 $\angle DAD + \angle ADC = 180^\circ$   
 $\frac{AH}{CH} = \frac{DH^2}{AB} = \frac{2DH^2}{AB}$   
 $\frac{15}{9} = \frac{15}{10}$   
 $\frac{15}{9} = \frac{15}{10}$

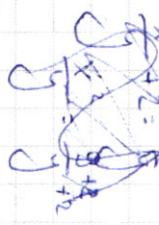
$$AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$$

$$BC = \sqrt{29}$$

$$\frac{90x - 10x^3}{4} = \frac{84x^2 + 2x^2}{4}$$

$$5xy = y^2 + 4x^2$$

$$y^2 + 4x^2 - 4xy = xy$$



$$y = \frac{9-x^2}{2}$$

$$9-x^2-4x = 2\sqrt{\frac{9-x^2}{2}}$$

$$x^4 + 16x^2 + 81 - 18x^2 - 92x + 4x^3 = 18x - 2x^3$$

$$x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 90x + 81 = 0$$

$$16 - 48 - 8 + 160 - 81 = 16 - 250 + 81$$

$$16 - 48 - 8 + 160 - 81 = 320$$

$$4 \cdot 21 = 84$$

$$18 - 82 = -64$$

$$\frac{8 + 2809}{99} = 28.57$$

$$18 - 82 = -64$$

$$0 = 522 + 18 \cdot 21 + 18 \cdot 21$$

$$0 = 18 \cdot 21 + 18 \cdot 21 + 522$$

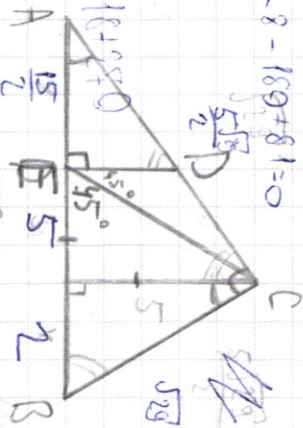
$$98 = 18 \cdot 21 + 18 \cdot 21 + \frac{18 \cdot 21}{522}$$

$$y = \frac{9-x^2}{2}$$

$$AB = \frac{29}{2}$$

$$\frac{25 \cdot 29}{4} - 25 = 25 \cdot \frac{25}{4}$$

$$\frac{29}{2} - 5 - \frac{25}{2} =$$



$$\frac{36 + 225}{25} = \frac{y^2 + 29 \cdot y}{y}$$

$$29 = x^2 + 10x + 21 = 0$$

$$29 = 25 + x^2$$

$$x = \frac{29}{2}$$

$$2 + 5 = 7$$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$$

$$\frac{15}{25} = \frac{AD}{29}$$

$$\frac{9\sqrt{29}}{25}$$

$$AD = \frac{9\sqrt{29}}{25}$$

$$DE = \frac{9 \cdot 29 - 225}{4} = \frac{522 - 225}{4} = \frac{297}{4} = \sqrt{\frac{36}{4}} = 3$$