МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC = \sqrt{29}$, $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45°$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y| > 6, \\ x^2-2x-3y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 19$, $3 \leqslant y \leqslant 19$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

~~Пусть x...~~. sgn(n) – знак n $\left|\begin{array}{l} n=0 \to sgn(n)=0 \\ n>0 \to sgn(n)=1 \\ n<0 \to sgn(n)=-1 \end{array}\right.$

$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} = f(x)$ $\quad f(x)\le 0 \Leftrightarrow sgn(f(x))\le 0$

Рассмотрим знаменатель:

$4x^2-12x+|x|\cdot|x-3| = 4x(x-3)+|x|\cdot|x-3| = 4x(x-3)\pm$

$\pm(x-3)\cdot x$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2-12x+|x||x-3| = 5x(x-3) \\ 4x^2-12x+|x||x-3| = 3x(x-3) \end{array}\right.$ | Из этого получаем ОДЗ: $x\ne 0, x\ne 3$

Поскольку положительный коэф-т на знак выражения не влияет, знак знаменателя совпадает со знаком многочлена $x(x-3)$

$\Rightarrow sgn(f(x)) = sgn\left(\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{x(x-3)}\right)$

Решим нер-во методом интервалов с рассмотром случаев.

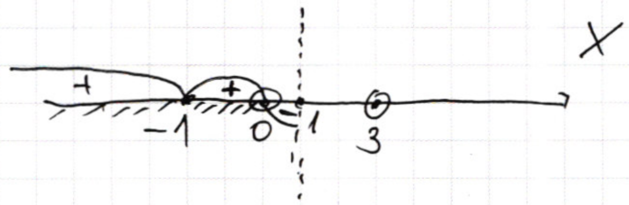
1) $x\ge 1$

$sgn(f(x)) = sgn\left(\frac{x^2-2x+5-4x+4}{x(x-3)}\right) = sgn\left(\frac{(x-3)^2}{x(x-3)}\right)$

$x\ne 3 \Rightarrow sgn(f(x)) = sgn\left(\frac{x-3}{x}\right) \Rightarrow sgn(f(x))\ge 0$ при $x>3$

2) $\operatorname{sgn}(f(x)) = \operatorname{sgn}\left(\dfrac{x^2-2x+5+4x-4}{x(x-3)}\right) =$

$= \operatorname{sgn}\left(\dfrac{(x+1)^2}{x(x-3)}\right)$



$\Rightarrow \operatorname{sgn}(f(x)) \geq 0$ при $x < 0$

$\operatorname{sgn}(f(x)) \geq 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$

$\operatorname{sgn}(f(x)) = 0$ при $x = -1$

$x \neq 0$ и $x \neq 3 \Rightarrow \operatorname{sgn} f(x) \leq 0$ при $x \in \{-1\} \cup (0; 3)$

Ответ: $x \in \{-1\} \cup (0; 3)$

№3

$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \cancel{y^2 - 5xy}$ $xy \geq 0$

$\Rightarrow \begin{cases} y^2 - 5xy + 4x^2 = 0 \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$ $4x^2 - 5xy + y^2 = 0$

Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно x

$D = 25y^2 - 16y^2 = 9y^2$

$x = \dfrac{5y \pm 3y}{8}$

1) $x = \dfrac{5y + 3y}{8} = y$ $y - 2x = \sqrt{xy}$

$-y = |y| \Rightarrow y \leq 0$

$x \leq 0$

$x^2 + 2y = 9$

$x^2 + 2x - 9 = 0$ $D_1 = 4 + 36 = 40$

$x = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{10}}{2} = -1 \pm \sqrt{10} \leq 0$

$\Rightarrow x = -1 - \sqrt{10} = y$

2) $x = \frac{5y-3y}{8} = \frac{y}{4} \Leftrightarrow y = 4x$

$y - 2x = \sqrt{xy} = \cancel{\frac{|x|}{2}}\ 2|x|$

$2x = 2|x| \Rightarrow x \geq 0$

$2y + x^2 = 9$

$y = 4x \Rightarrow \cancel{x^2 + 2\cdot 4x - 9 = 0} \Rightarrow x^2 + 8x - 9 = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -9 \end{array}\right. \quad x \geq 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 4$

Подставим корни.

$(-1-\sqrt{10}, -1-\sqrt{10})$

$y - 2x = \cancel{4-2x}\ -1-\sqrt{10} - 2(-1-\sqrt{10}) = \sqrt{(-1-\sqrt{10})(-1-\sqrt{10})} = \sqrt{xy}$

$1+\sqrt{10} = 1+\sqrt{10}$

$2y + x^2 = -2-2\sqrt{10} + 1 + 10 + 2\sqrt{10} = 11 - 2 = 9$

$(1; 4)$

$2 = 4 - 2 = \sqrt{1\cdot 4} = 2 \qquad (y - 2x = \sqrt{xy})$

$2y + x^2 = 8 + 1 = 9 \qquad (2y + x^2 = 9)$

Корни подходят.

$\Rightarrow$ Ответ: $\{(-1-\sqrt{10}; -1-\sqrt{10}); (1; 4)\}$

№ 7

Навед: $f(ab) = f(a) + f(b)$

$a = 1 \Rightarrow f(b) = f(1) + f(b) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(2) = 2$, $f(3) = 3$ (2, 3 простые), $f(4) = f(2\cdot 2) = f(2) + f(2) = 4$

$f(5) = 5$, $f(6) = f(2\cdot 3) = 5$, $f(7) = 4$, $f(8) = f(2\cdot 4) = 6$

$f(9) = f(3\cdot 3) = 6$, $f(10) = f(2\cdot 5) = 7$, $f(11) = 11$

$f(12) = f(2\cdot 6) = 7$, $f(13) = 13$, $f(14) = f(2\cdot 7) = 9$, $f(15) =$

$= f(3\cdot 5) = 8$, $f(16) = f(2\cdot 8) = 8$, $f(17) = 17$, $f(18) = f(2\cdot 9) = 8$, $f(19) = 19$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(x) = f\left(\frac{x}{y}\cdot y\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$

$\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow f(x) > f(y)$

Если $n \in \mathbb{N}$ и $3 \le n \le 19$

То $f(n)$ принимает значения

3 (1 раз), 4 (1 раз), 5 (2 раза), 6 (2 раза), 7 (3 раза), 8 (3 раза) и 9, 11, 13, 17, 19 по разу.

Т.е. N, количество пар, – количество упорядоченных пар (a, b) (для $a > b$), что $a, b \in$ $\in \{3, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 11, 13, 17, 19\}$.

(пары (5,3) и (5,3) должны обе быть посчитаны).

~~Всего 11 различных значений~~

В наборе 16 чисел больших 3, 15 чисел больших 4, 13 чисел больше 5, ..., 0 чисел больших 19.

Если n_i чисел больше числа i, то i участвует в n_i парах в качестве наименьшего числа. $\Rightarrow N = n_3 + n_4 + 2n_5 + \ldots + n_{19} =$
$= 16 + 15 + 2\cdot 13 + 2\cdot 11 + 3\cdot 8 + 3\cdot 5 +$
$+ 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 128$. Ответ: 128 пар

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№2

Пусть перпендикулярные медиана и биссектриса проведены из одного угла. Тогда ~~обе~~ одна половинка угла больше $90°$, $\Rightarrow$ весь угол больше $180°$, что невозможно.

$\Rightarrow$ Перпендикулярные бис. и мед. проведены из разных углов. Пусть они пересекаются в точке X, M – основание медианы, C, A и B вершины Δ (BM – медиана, AM – бис.)

~~AM – бис~~ AX – бис. $\angle BAM$ и AX – высота ($AX \perp BM$) $\Rightarrow$ ΔABM равнобед.

$\Rightarrow$ $AB = AM = \frac{AC}{2}$

$\Rightarrow$ стороны Δ равны a, $2a$ и b.

По нер-ву Δ: $a+2a=3a > b$ и $a+b>2a$

$\Leftrightarrow$ $b>a$ $\Rightarrow$ $3a>b>a$.

Пусть $a \leq 50$. $3a \leq 150 \Rightarrow b = 300-3a \geq$
$\geq 180 \Rightarrow b \geq 3a$ противоречие.

Пусть $a \geq 75$. $3a \geq 225 \Rightarrow b = 300-3a \leq 75$
$\Rightarrow a \geq b$ противоречие.

Пусть $a \in [51; 74]$

$3a < 225 \Rightarrow b > 75 \Rightarrow b > a$

$3a \geq 51 \cdot 3 > 150 \Rightarrow b = 300-3a < 150$
$\Rightarrow 3a > b$

~~2a+b~~ $2a+b>a$

$\Rightarrow$ Из отрезков a, $2a$, b можно составить Δ.
(3 нер-ва выполнены) $\Rightarrow$ всего их $74-50=24$ Ответ: 24

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 5
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

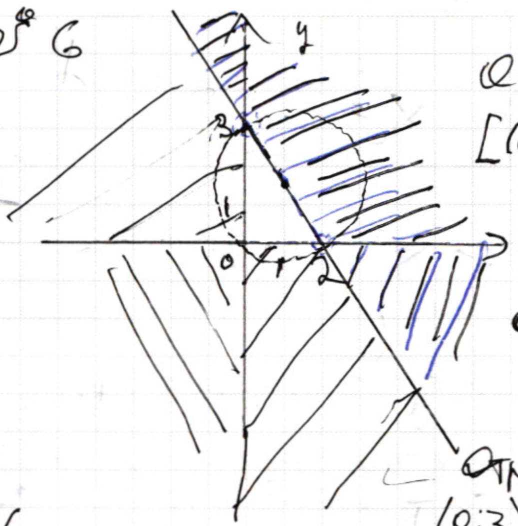
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

$|3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6$

Нанесём график прямой $3x+2y=6$



Отрезок $[(0;3);(2;0)]$ не включён!

Отрезок $[0;2]$ не включён

Отрезок $[(0,0);(0;3)]$ не включён

Пусть $3x+2y\geq 6$

1) $x\geq 0,\ y\geq 0$

$3x+2y-6+3x+2y>6$

$3x+2y>6$

2) $x<0,\ y\geq 0$

$-3x+2y-6+3x+2y>6$

$y>3$

3) $x\geq 0,\ y<0$

$3x-2y-6+3x+2y>6 \Rightarrow x>2$

Случай $x<0,\ y<0$ не реализуется

Пусть $3x+2y<6$

1) $x,y\geq 0$ $\quad 3x+2y+6-3x-2y\geq 6$

$6>6$ противоречие

2) $x;y<0$ $\quad -3x-2y+6-3x-2y>6$

$-3x-2y>0$ $\quad 3x+2y<0$

что верно, т.к. $x,y<0$

3) $x\geq 0,\ y<0$ $\quad 3x-2y+6-3x-2y>6$

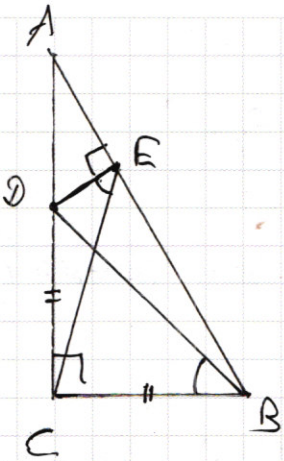
$-4y>0$ $\quad y<0$

4) $x<0,\ y\geq 0$ $\quad -3x+2y+6-3x-2y>6$

$-6x>0$ $\quad x<0$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№5

$\angle DEB = \angle DCB = 90°$

$\Rightarrow$ ~~че~~ $DCBE$ – впис.

$\Rightarrow \angle DEC = \angle DBC = 45°$

$\angle C = 90°$

$\Rightarrow \triangle DCB$ – равноб. $(DC = CB)$

$\Rightarrow AD = AC - BC = 2{,}5\sqrt{29} - \sqrt{29} = 1{,}5\sqrt{29}$

$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{1{,}5\sqrt{29}}{2{,}5\sqrt{29}} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

По теореме Пифагора $AB = \sqrt{CB^2 + AC^2} = \sqrt{29} \cdot \sqrt{7{,}25}$

$\triangle AED \sim \triangle ACB$ по 2 углам ($\angle A$ общий, $\angle AED = \angle ACB = 90°$).

Квадрат коэффициента подобия равен отношению площадей.

$\Rightarrow \frac{S_{AED}}{S_{ACB}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 \Rightarrow S_{AED} = \frac{AD^2}{AB^2} \cdot S_{ACB}$

$S_{ACB} = AC \cdot CB / 2 = \frac{2{,}5}{2} \cdot 29 = 1{,}25 \cdot 29$

$S_{AED} = \frac{2{,}25 \cdot 29}{7{,}25 \cdot 29} \cdot 1{,}25 \cdot 29 = \frac{9}{29} \cdot 1{,}25 \cdot 29 = 9 \cdot 1{,}25 =$
$= 11{,}25$

Ответ: $\frac{AD}{AC} = 0{,}6$; $S_{AED} = 11{,}25$

$\Rightarrow$ 1-му неравенству удовлетворяет вся плоскость, за исключением Δ с вершинами в точках $(0,0)$; $(0;3)$ и $(2;0)$ - катеты равны a и b

$x^2-2x-3y+y^2\leq 0$

$(x^2-2x+1)+(y^2-3y+(1{,}5)^2)\leq 3{,}25=13\cdot 0{,}25=\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$

$(x-1)^2+(y-1{,}5)^2\leq 3{,}25$

~~Окр~~ Круг с центром в точке $(1;1{,}5)$ и радиусом $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Заметим, что точки $(0,0)$, $(0;3)$ и $(2;0)$ лежат на границе этого круга.

$|[(0;3);(2;0)]|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$. $(1;1{,}5)$ -
(по теореме Пифагора)

середина этого отрезка. Медиана = половина гипотенузы, поэтому $(0,0)$ тоже лежит на границе.

$\Rightarrow S=S(\text{круга})-S(\text{треугольника})=$

$=\frac{\pi r^2}{2}-\frac{ab}{2}=\frac{\pi\cdot 13}{8}-\frac{2\cdot 3}{2}=\frac{13}{8}\pi-3$

Ответ: $\frac{13}{8}\pi-\cancel{3}\,13$

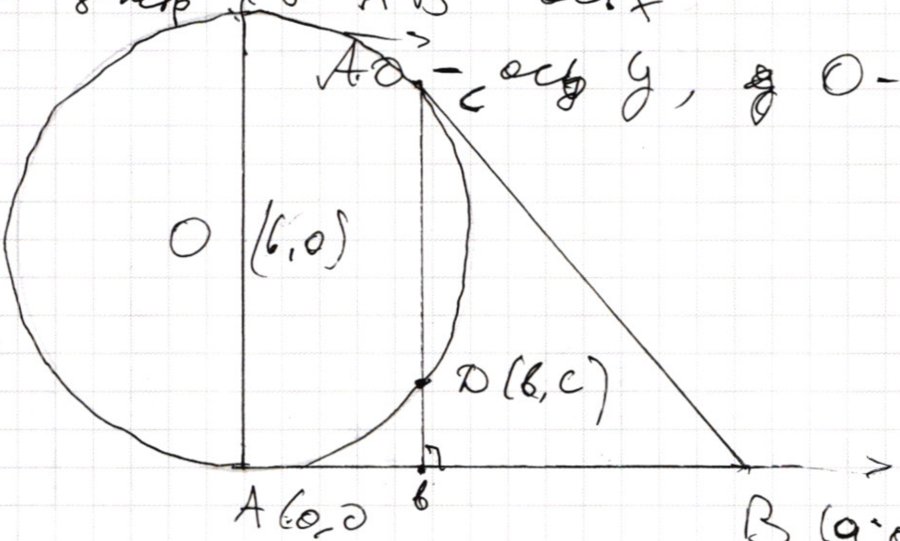
Т.К. вся плоскость помимо Δ удовлетворяет первому неравенству, а Δ целиком лежит внутри круга, удовлетворяющему ~~всё~~ 2-му неравенству

№ 4

Введём Декартову систему координат.

A – центр, $\overrightarrow{AB}$ – ось x

$\overrightarrow{AO}$ – ось y, O – центр окр-сти



$D := (b;c)$ $\quad B := (a;0)$

$\Rightarrow C(b;12-c)$

$OD = 6 \Rightarrow b^2+(6-c)^2=36$

$b^2+c^2-12c=0 \Rightarrow b^2=12c-c^2$

$AB=BC \Rightarrow a^2=(b-a)^2+(12-c)^2$

$b^2-2ab+12^2-24c+c^2=0$

$b^2=12c-c^2$

$144-2ab-12c=0$

$72=ab+6c$

$S_{AOB}=15 \Rightarrow b\cdot a=30$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2,a^2 c^2 + c^2$

$$\begin{cases} ac = 30 \\ (b-a)^2 + (12-c)^2 = a^2 \\ (b-6)^2 + (c-6)^2 = 36 \end{cases}$$

$\cancel{b^2 - 2ab + 144 + 24 \cdot \frac{30}{a} + \frac{900}{a^2} = 0}$

$\cancel{c^2 = 36 - (b-6)^2}$

$b^2 = 36 - (c-6)^2 =$

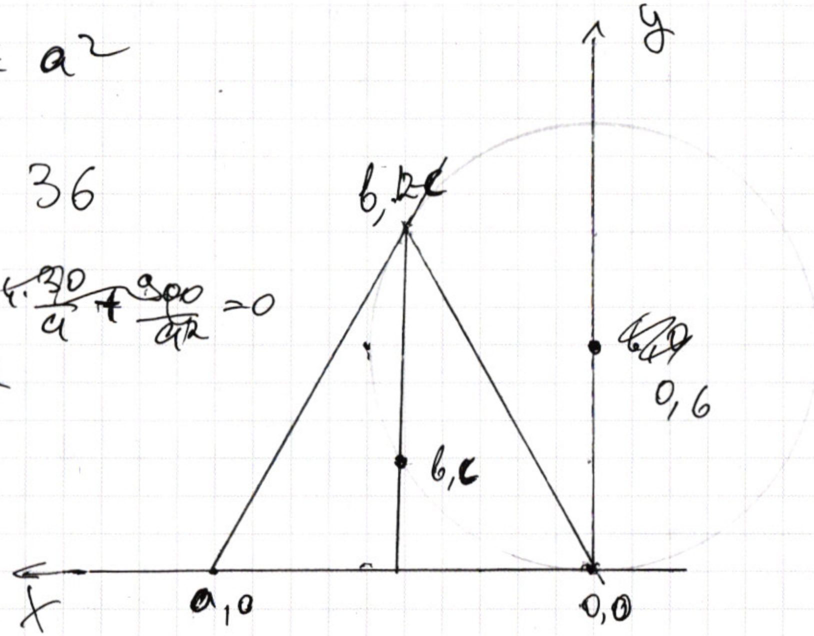
$= -c^2 + 12c$

$b^2 = 12c - c^2$

$-2ab + a^2 + 12^2 = a^2$

$12^2 = 2ab$

$72 = ab$



$ac = 30$

$a(12-c) = 12a - ac = 2S =$

$= 12a - 30$

$S = 6a - 15$

$30 = ac$ $\quad \frac{b}{c} = \frac{72}{30} = \frac{12}{5}$ $\quad b = \frac{12}{5}c$ $\quad 2,4c$

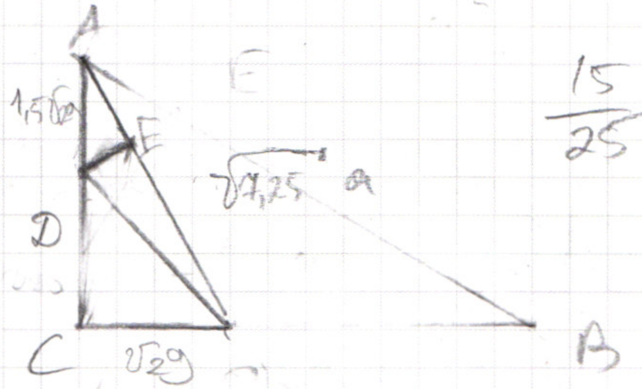
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$2,5\sqrt{29}$

$\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$

$29 \cdot \frac{2,5}{2}$

$a^2 = 6,25a^2$

$\sqrt{7,25}$

$1,25 \cdot 29$

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1,5^2}{7,25} = \frac{25 \cdot 0,09}{0,29 \cdot 25} = \frac{0,9}{2,9} = \frac{9}{29}$

$$\begin{array}{r} \times\, 7\,25 \\ 9 \\ \hline 11\,25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 725 & 25 \\ 50 & \overline{29} \\ \hline 225 & \end{array}$$

$(x^2-2x+1)+(y^2-3y+2,25)=$

$=(x-1)^2+(y-1,5)^2= 3,25 = 13\cdot 0,25 = \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$

$6x+4y \geq 12$

$3x+2y \geq 6$

☑ черновик ☐ чистовик

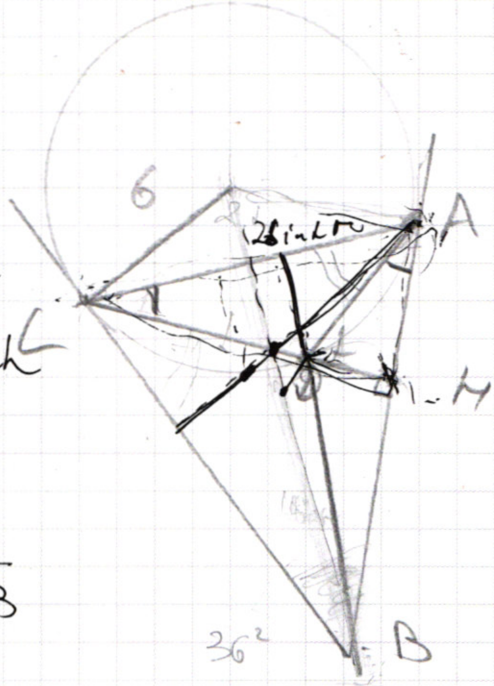
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$(6^2+AB^2)\sin 2\alpha = 12\,AB$

$\frac{AB}{CH} = ? \frac{CH}{DH}$



$2r^2 - 2\cos 2\alpha\, r^2 =$

$= r^2 \cdot 2 \cdot \sin 2\alpha$

$\sqrt{2}\, r \sin 2\alpha$

$\sin 2\alpha$

$tg\, \alpha = \frac{6}{AB}$

$\frac{a}{\sin\alpha} = 2r$

$a = 2r \cdot \sin\alpha$

$DH \cdot AB = 30$

$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{DH}{CH}$

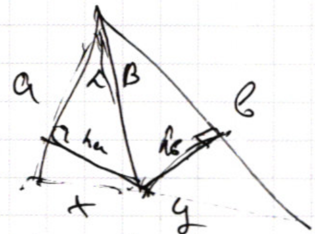
$AB^2 \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2}$

$\sin 2\alpha (36+AB^2) = 12\,AB$

$1)\ \sin 2\alpha = \frac{36+AB^2}{12\,AB}$

$AB \cdot \sin^2\alpha\, r$

$\frac{S_{ABD}}{DH} = \frac{S_{ABC}}{CH}$



$\frac{S_\alpha}{S_\beta} = \frac{h_a}{h_b} = \frac{S_a/a}{S_b/b} = \frac{S_a}{S_b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{x}{y} \cdot \frac{a}{b}$

$CH \cdot \frac{AB}{2} = \frac{6\,AB^3}{36+AB^2}$

$\frac{6\,AB^3}{36+AB^2}$

$\sqrt{\frac{6^2/AB^2}{6^2+AB^2/AB^2}} = \frac{6}{\sqrt{6^2+AB^2}}$

$\frac{12\,AB}{36+AB^2} \cdot AB^2$

$S_{ABC} =$

$\frac{\sin\alpha}{\sin x} = \frac{CH}{DH} \cdot \frac{AC}{AD} = \frac{2\sin\alpha r}{15}$

$\frac{AB}{\sqrt{6^2+AB^2}}$

$\frac{12\,AB}{6^2+AB^2}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

3	3
4	4
5	5
5	6
7	7
6	8
6	9
7	10
11	11
7	12
13	13
9	14
8	15
8	16
17	17
8	18
19	19

$$\begin{cases} y - 2x = 2xy \\ 2y - x^2 = 9 \end{cases}$$

$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy$

$y^2 - 5xy + 4x^2 = 0$

$y^2 + 2y + 5x^2 = 5xy = 9$

$\frac{1}{2}\sin 2\alpha = \frac{AM \cdot MC}{AC^2} = \frac{AM \cdot CM}{4 \cdot 2 \sin^2 \cdot 4}$

$y^2 - 5xy - 8y = -36$

$y^2 - y(5x + 8) + 36 = 0$

$D = 25x^2 + 64 + 80x - 144 =$

$= 25x^2 + 80x - 80$

$D_1 = 6400 + 4 \cdot 80 \cdot 25 =$

$= 80(80 + 100) = 180 \cdot 80 =$

$= 20 \cdot 20 \cdot 9 \cdot 4 = 20^2 6^2$

$x = \frac{-80 \pm 120}{150} = -1{,}6 \pm 12{,}4$

$-3 \qquad 0{,}8$

$f(a)$

$\parallel$

$f\left(\frac{a}{b} \cdot b\right) = f(b) + f\left(\frac{a}{b}\right)$

$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$

$\frac{x^2}{2} - \frac{9}{2} = y$

$f(b) = f(1) + f(b)$

$f(1) = 0$

$\frac{3 \cdot 2}{2} + 2 \cdot 2 \cdot 3$

$2 \to 2 \quad 3 \to 3$

$4 \to 2 \quad 5 \to 5$

$6 \to 5 \quad 4 - 7$

$8 \to 4 \quad 9 \to 6$

5, 5, 6, 6, 7, 7, 7

5, 5   6, 6

$\frac{2 \cdot 1}{2} \quad 2 \cdot 2 = 4$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x \in [0; 1)$

$325 \div 25 = 13$

$$\frac{x^2+2x+1}{3x(x-3)} = \frac{(x+1)^2}{3x(x-3)} < 0$$

$x < 0$

$$\frac{(x+1)^2}{x(x-3)} \geq 0$$

$x \in [1; 3)$

$$\frac{(x-3)^2}{4x^2-12x-x^2+3x} = \frac{(x-3)^2}{3(x^2-3x)}$$

$$\frac{(x-3)^2}{3x(x-3)} = \frac{x-3}{3x} < 0$$

$$\frac{x^2-2x-5-4x-4}{4x^2-12x+x^2-3x} =$$

$$\frac{x^2-6x+9}{5(x^2-3x)} = \frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} = \frac{x-3}{5x} \geq 0$$

$31+50+22+25 = 53+75 = 128$

$31+26+22+24+15+10$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)