МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED=45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6, \\ x^2-2x-3y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 19$, $3 \leqslant y \leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\dfrac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \le 0$

Рассмотрим случаи: (раскроем модули)

1. $|x|=-x$, $|x-1|=1-x$, $|x-3|=3-x$
2. $|x|=x$, $|x-1|=1-x$, $|x-3|=3-x$
3. $|x|=x$, $|x-1|=x-1$, $|x-3|=3-x$
4. $|x|=x$, $|x-1|=x-1$, $|x-3|=x-3$

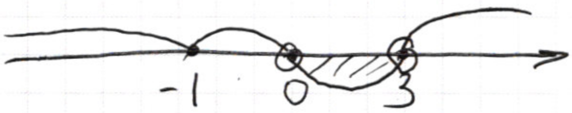
0, 1, 3, x

Рассмотрим 1. промежуток $(-\infty;0)$:

$$\frac{x^2-2x+5-4+4x}{4x^2-12x+(-x)\cdot(3-x)} = \frac{x^2+1+2x}{4x^2-12x-3x+x^2} = \frac{x^2+1+2x}{5x^2-15x} \le 0$$

$x\ne -1$
$x\ne 3$
$x\ne 0$

$$\frac{(x+1)^2}{5x(x-3)} \le 0$$



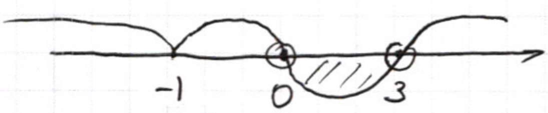
подходит только $(0;3)$, но этот промежуток не входит в 1. $(-\infty;0)$.

Рассмотрим 2. промежуток $[0;1)$:

$$\frac{x^2-2x+5-4+4x}{4x^2-12x+3x-x^2} = \frac{x^2+1+2x}{3x^2-9x} \le 0$$

$x\ne -1$
$x\ne 3$
$x\ne 0$

$$\frac{(x+1)^2}{3x(x-3)} \le 0$$



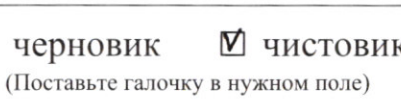
Подходит от $(0;3)$, но в промежуток 2. входит только $(0;1)$.

Рассмотрим 3. промежуток $[1;3)$

$$\frac{x^2-2x+5-4x+4}{4x^2-12x+3x-x^2} = \frac{x^2+9-6x}{3x^2-9x} \le 0 \qquad \frac{(x-3)^2}{3x(x-3)} \le 0$$

$x\ne 0$
$x\ne 3$.

$$\frac{x-3}{3x} \le 0$$



подходит от $(0;3)$, входит в промежуток 3. только $[1;3)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Рассмотрим промежуток 4. $[3; +\infty)$

$$\frac{x^2-2x+5-4x+4}{4x^2-12x+x^2-3x} = \frac{x^2-6x+9}{5x^2-15x} = \frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} \le 0 \qquad x \ne 3 \quad x \ne 0$$

$$\frac{x-3}{5x} \le 0$$

$(0;3)$ ~~входит~~ подходит, но не входит в промежуток 4.

Значит, ответ $(0;3)$ (следует, из промежутка 2., 3.)

Ответ: $(0;3)$

3. $\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} & ① \\ 2y+x^2=9. & ② \end{cases}$

* x и y должны быть одного знака ~~как раз~~ (чтобы $\sqrt{xy} \geq 0$) или кто-то равен 0.

$|y| \geq |2x|$ ($\sqrt{xy}$ – только неотриц. число).

возведем уравнение ① в квадрат:

$y^2+4x^2-4xy=xy$

$y^2+4x^2-5xy=0$

Решим уравнение относительно y: $y_{1,2}=\frac{5x \pm \sqrt{25x^2-16x^2}}{2} = \frac{5x \pm 3x}{2} =$

$y_1=4x \qquad y_2=x$ ----> y_2 не удовл. *, значит, не подходит.

Тогда подставим $y=4x$ в ②:

$8x+x^2=9 \qquad 8x+x^2-9=0 \qquad x_{1,2}=\frac{-4 \pm \sqrt{16+9}}{1} = -4 \pm 5$ — -9; 1

1) $x=1$, $y=4x=4$

2) $x=-9$, $y=4x=-36$.

Проверим получившиеся корни, подставив в систему.

$\begin{cases} 4-2=\sqrt{4}=2 \\ 8+1=9 \end{cases}$ уд. проверке

$\begin{cases} -36+18=\sqrt{-9\cdot-36} = \\ 18=9\cdot2=18 \\ -72+81=9 \end{cases}$ уд. проверке

Ответ: $(1;4)$; $(-9;-36)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

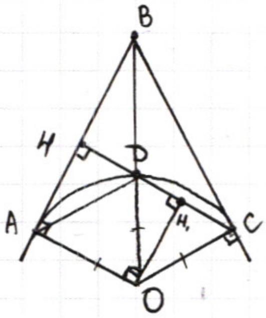
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



Дано: $CO = AO = 6$ - радиус

$S_{\triangle DBA} = 15$

CH - высота

AB и BC - касательные

Найти: $AB : CH$

Решение: Опустим перпендикуляр из точки O на CH (OH_1)

Тогда выпуклый четырёхугольник AHH_1O - параллелограмм ($\angle AOH_1$ - тоже 90°, тогда $AH \parallel OH_1$; $HH_1 \parallel AO$)

Тогда $AO = 6 = HH_1$.

Рассмотрим четырехугольник $ADCO$. Он тоже параллелограм (Перпендикуляр OH, перпендикуляр и к AO и к DC)

Тогда $HH_1 = 6 = CD$, тогда $HD = CH_1$

Рассмотрим $\triangle DOC$ - р/б (2 радиуса). CH_1 - высота из вершины к основанию, значит, и медиана тоже. Тогда ~~$HB = OH_1 = DH_1 = 3$~~ ~~(в сумме ...)~~ $DH_1 = H_1C = 3$ $(6/2)$.

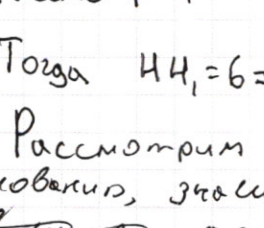
$S_{\triangle} ABD = 15$, $DH \cdot AB = 30$ $\quad 3 \cdot AB = 30 \quad AB = 10.$

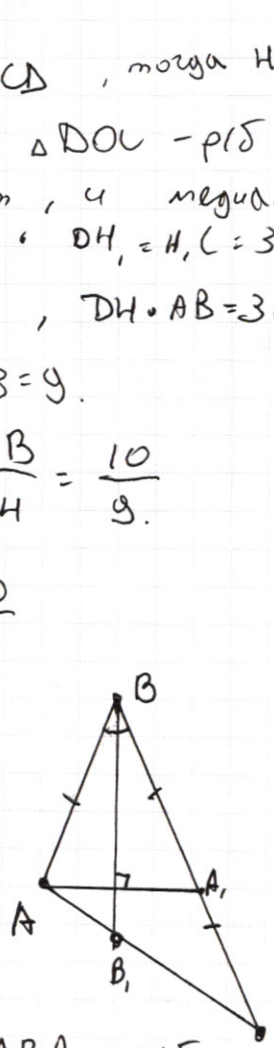
$CH = 3 + 3 + 3 = 9.$

Тогда $\dfrac{AB}{CH} = \dfrac{10}{9}.$

Ответ: $\dfrac{10}{9}$

3.





Дано: $AB + BC + AC = 300$

BB_1 - биссектриса

AA_1 - медиана

Решение: 1) по свойству биссектрисы

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AB}{BC}$$

2) Рассмотрим $\triangle ABA_1$ - р/б, т.к. высота совпадает с биссектрисой

Тогда $AB = BA_1$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Тогда $\frac{AB_1}{AC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$. 3) Пусть $AB = y$ $\Rightarrow$ $BC = 2y$
$AB_1 = x$ $\quad AC = 3x$

Тогда: $AB + BC + AC = 300 = 3x + 3y$

Тогда $3x + 3y = 300$; $x + y = 100$

Тогда $y = 100 - x$.

Чтобы такой треугольник существовал нужно:

$$\begin{cases} AB + BC > AC \\ AC + BC > AB \\ AB + AC > BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y > 3x \\ 3x + 3y > y \\ y + 3x > 2y \end{cases}$$

$3x + 3y > y$ · всегда будет (x и $y > 0$ всегда)

Тогда должны соблюдаться условия: $\begin{cases} y > x \\ 3x > y \end{cases}$

Подставим в них $y = 100 - x$:

$$\begin{cases} 100 - x > x \\ \cancel{3x > 200 - 2x} \quad 3x > 100 - x \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x < 50 \\ x > 25 \end{cases}$$

Тогда кол-во треугольников будет равно кол-ву натуральных x в диапазоне $(25; 50)$

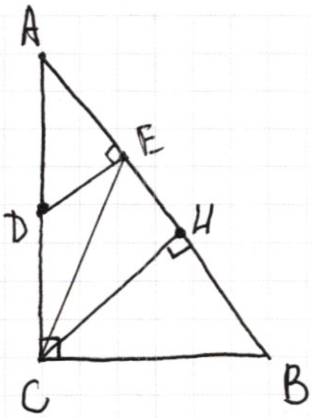
$\downarrow$

24

Ответ: 24

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5)



Дано: $\triangle ABC$ – п/у

$DE \perp AB$

$D \in AC$

$E \in AB$

$BC = \sqrt{29}$

$AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$

$\angle CED = 45^\circ$

Найти: $S_{\triangle AED}$; $AD : AC$

$tg\angle A = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{29}\cdot 2}{5\sqrt{29}} = \frac{2}{5}$; Тогда $\frac{ED}{AE} = \frac{2}{5}$

$S_{\triangle ACB} = \frac{AC\cdot BC}{2} = \frac{5\sqrt{29}\cdot\sqrt{29}}{4} = \frac{5\cdot 29}{4}$

$AB = AC^2 + BC^2 = \sqrt{\frac{25\cdot 29}{4} + 29} = \sqrt{\frac{(25+4)29}{4}} = \frac{29}{2}$.

Рассмотрим $\triangle ADE$ и $\triangle ACB$. Они подобны (по двум углам; общему и прямому)

$$\frac{AB}{AD} = \frac{CB}{DE} = \frac{AC}{AE} = k$$

Тогда $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = k^2$

~~Рассмотрим △~~

Проведем высоту CH из вершины прямого угла.

$\angle ADE = 180 - 90^\circ - \angle A = \angle B$

~~Тогда $\triangle ADE \sim \triangle ACB$:~~

$\frac{CH\cdot AB}{\cancel{2}} = S_{\triangle ACB} = \frac{5\cdot 29}{\cancel{4}}$.

$CH\cdot AB = \frac{5\cdot 29}{2} \rightarrow AB = \frac{29}{2} \rightarrow CH = 5$

Т.к. $\angle CED = 45^\circ$, то $\angle CEH = 45^\circ$ ($\angle DEH = 90^\circ$).

Тогда $EH = HC = 5$, тогда $EC = \sqrt{2\cdot 25} = 5\sqrt{2}$

по теореме косинусов:

$\angle AEC = 90+45 = 135^\circ$

$\cos 135^\circ = -\cos 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 25 \\ 29 \end{array} \\ \hline + \begin{array}{r} 225 \\ 50 \end{array} \\ \hline 725 \end{array}$$

$-200 = 525$

Тогда:

$AC^2 = CE^2 + AE^2 - 2\cos 135^\circ \cdot AE \cdot CE$

$\frac{25 \cdot 29}{4} = 25 \cdot \cancel{4}2 + AE^2 + \sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot AE$

$\frac{25 \cdot 29}{4} - 100 = AE^2 + 10\,AE.$

$AE^2 + 10\,AE - \frac{325}{4} = 0 \quad | \cdot 4$

$4AE^2 + 40\,AE - 325 = 0.$

$AE_{12} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 325 \cdot 4}}{4} = \frac{-20 \pm 10\sqrt{13}}{4}$

$AE > 0 \quad AE = \frac{-20 + 10\sqrt{13}}{4}.$

$tg \angle A = \frac{2}{5}$ тогда $\frac{DE}{AE} = \frac{2}{5}$

$DE = \frac{-40 + 40\sqrt{13}}{20}$

$AD = \sqrt{DE^2 + AE^2}$

$\frac{25 \cdot 29}{4} = 25 \cdot 2 + AE^2 + 5 \cdot 2 \cdot AE$

$\frac{25 \cdot 29 - 200}{4} = AE^2 + 10\,AE$

$AE^2 + 10AE - \frac{525}{4} = 0$

$AE_{12} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + \frac{525}{4}}}{1} = -5 \pm \sqrt{\frac{625}{4}} = -5 \pm \frac{25}{2} = 0$

$AE > 0.$ $\quad AE = \frac{-10 + 25}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{AC}{AE} = k = \frac{5\sqrt{29}}{15} = \frac{\sqrt{29}}{3}.$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = k^2 = \frac{29}{9}.$$

$$S_{\triangle ADE} = \frac{S_{\triangle ABC} \cdot 9}{29} = \frac{5 \cdot \cancel{29} \cdot 9}{4 \cdot \cancel{29}} = \frac{45}{4}$$

$$\frac{AB}{AD} = k = \frac{\sqrt{29}}{3} \qquad AB = \frac{29}{2}$$

$$AD = \frac{29 \cdot 3}{2 \cdot \sqrt{29}} = \frac{3\sqrt{29}}{2}$$

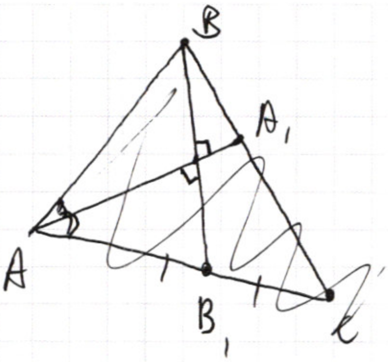
$$\frac{AD}{AC} = \frac{3\sqrt{29}}{2} \cdot \frac{2}{5\sqrt{29}} = \frac{3}{5}$$

Ответ: $S_{\triangle ADE} = \frac{45}{4}$; $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 7
(Нумеровать только чистовики)

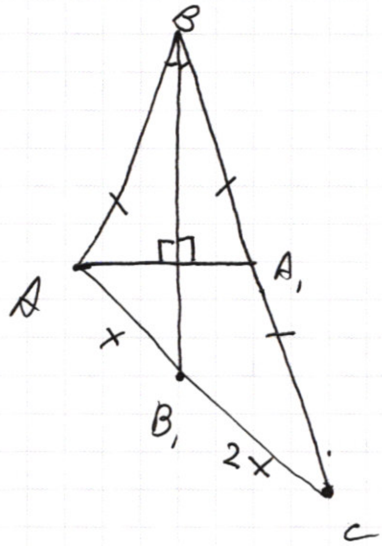
27



$AB+BC+AC=30$

BB_1 ~~AA~~$_1$ – биссектриса

~~BB~~ AA_1 – медиана



По свойству бисс.:

$AB_1 : AC = AB : BC = \frac{1}{2}$

$ab = a+b$

$\frac{\cancel{a}\, a}{b} < 0$

Тогда стороны: y; $2y$; $3x$.

$y+2y+3x=300$

$3y+3x=300$

$y+x=100.$

$$\begin{cases} y=100-x \\ \text{~~Т.б. это } x \text{: от 1 до 99~~} \\ 3x+y>2y \end{cases}$$

$3y>3x.$

$$\begin{cases} y>x \\ 3x>y \end{cases}$$

Значит $x<50.$

$3x>100-x$

$100-x>x$

$100>2x$

$x<50$

$4x>100.$

$x>25.$

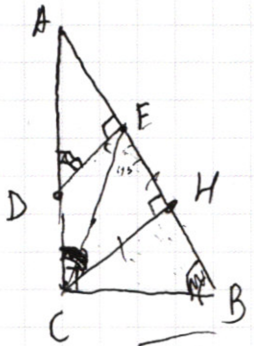
$(25;50).$

$50-25=25$

Ответ: 25.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5)



AC и BC нао ...

$$\begin{array}{r} 4\\ 25\\ \times 29\\ \hline 225\\ +50\\ \hline 725\\ +58\\ \hline 783 \end{array}$$

Найти: $\frac{AD}{AC}$

$S_{\triangle AED}$

$AC = \sqrt{29}$

$BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$

$CE = \sqrt{2HC^2}$

$DC = DE^2 + ...$

$\angle CED =$

$\cancel{tg\angle C}$ $tg\angle B = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{29}\cdot 2}{5\sqrt{29}} = \frac{2}{5} = \frac{\sin\angle B}{\cos\angle B}$

$S = \frac{AC\cdot BC}{2} = \frac{5\cdot 29}{4}$ $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{29 + \frac{25\cdot 29}{2}} = \sqrt{\frac{58 + 25\cdot 29}{2}} = \sqrt{\frac{783}{2}}$

$\cancel{CH = }$

$=$ $\frac{5\cdot 29}{2} = \cancel{\frac{1}{2}} CH\cdot AB$

$CH = \sqrt{(CH + AE)\cdot HB}$ $\sqrt{\frac{5\cdot 29}{2}} \cdot \sqrt{\frac{5\cdot 29}{2}} \cdot \frac{B}{\sqrt{783}}$ $\frac{AC}{...} = \frac{CH}{AE}$ $\frac{BL}{AC} = \frac{\cancel{AE}\,CH}{AE}$

$\frac{AC\cdot CB}{2} = \frac{CH\cdot AH + HB\cdot CH}{2} = \frac{5\cdot 29}{4}$ $\sqrt{\frac{5\cdot 29}{2\cdot 783}} = CH$ $\frac{5}{2} =$

$CH\cdot AH + HB\cdot CH = \frac{5\cdot 29}{2}$ $-5 \pm \sqrt{...}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AH} = \frac{DE}{CH}$. Через подоби

$325\cdot 4 = 1200 + 100$ 1300 AC $\frac{425}{4}$.

$S_{ADE} = \frac{5\cdot 29^2\cdot 783\cdot 5}{4\cdot 89}$ $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = K$. $\frac{BC}{AC} = \frac{CH}{AE}$.

$\frac{5}{2} = \sqrt{5\cdot 29}$

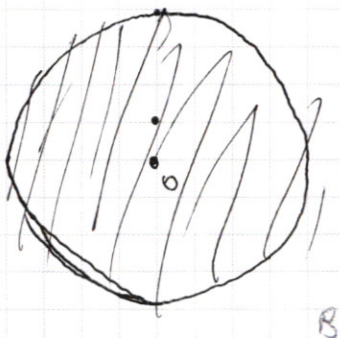
$= \frac{25\cdot 29\cdot 783}{4}$ $\frac{2DE}{5\sqrt{29}} = \frac{AE}{\sqrt{29}}$. $\frac{4\cdot 5\cdot ADE}{5\cdot 29}$ $\frac{2\sqrt{89}\cdot\sqrt{5\cdot 29}}{\sqrt{783}\cdot 5\sqrt{89}} =$

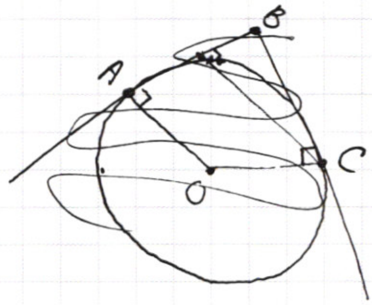
$\cancel{AE}$ $\frac{5\cdot 29^2}{4AE^2} = S_{ADE}$ $\left(\frac{AE}{\sqrt{29}}\right)^2 = \frac{5\cdot 29}{4\cdot 5}$ S_{ADE}

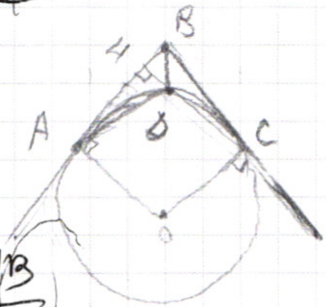
$\frac{AE^2\cdot 5\cdot 89}{29\cdot 4}$ $\frac{29\cdot 29\cdot 5}{4AE^2} = S_{ADE}$ $= \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{783\cdot 5}}$

$\frac{AE^2\cdot 5}{4} = \frac{29\cdot 5}{783\cdot 5\cdot 4} = \frac{29}{783\cdot 4}$

4.







$x \cdot \frac{1}{y} = x + \frac{1}{y}$

$\frac{DH \cdot AB}{2} = 15$

~~AB = 6H~~

~~BH~~

$AH^2 = \sqrt{CD \cdot DH}$

$AH = \sqrt{36 - CH_1^2}$

$\sqrt{36 -}$

$AB : CH$

~~SABD~~ $S_{\triangle ABD} = 15$

$AO = OC = 6$

$\frac{DH \cdot AB}{2} = 15$

$\frac{DH}{6} = \frac{HB}{AB}$

$AB = AH + AB$

$CH = AO$ (как квадрат). $= 6$.

$AH = CO = 6$.

~~HB = AB - 1~~

$\frac{6 + HB}{6} = AB$.

$\frac{DH}{AO} = \frac{BH}{AH}$

$DH \cdot AB = 30$

$DH \cdot 6 + DH \cdot HB = 30$. $BH = \frac{DH \cdot AH}{6}$.

$CH = CH_1 + H_1H = 36 - AH^2 + 6 = 42 - AH^2$

$\frac{DH \cdot (6 + HB)}{2}$

$AB = AH + HB$

$DH \cdot (6 + HB) = 30$.

$\frac{AH + HB}{42 - AH^2}$

$\frac{6 + HB}{6}$

$\begin{cases} DH = \frac{30}{AH + BH} \\ DH = \frac{6BH}{AH}. \end{cases}$

$\frac{AO \cdot OC \cdot AC}{4R} = S_{AOC} =$

$AB^2 = BD \cdot DO$

$\frac{6BH}{AH} \cdot AH + \frac{6BH^2}{AH} = 30$.

$\frac{HD}{6} = \frac{BH}{HB + 6}$

$6BH + \frac{6BH^2}{AH} = 30$.

$BH^2 + BH \cdot AH - 5AH = 0$.

$BH = \frac{-AH \pm \sqrt{AH^2 + 20AH^2}}{2} =$

$= \frac{-AH \pm \sqrt{21AH^2}}{2}$

$\frac{(HB + 6) \cdot HD}{6} = BH$

$\frac{BH \cdot AH + BH^2}{AH} - 5AH = 0$

$\frac{11}{6}$.

30.

$6BH = HD(6 + BH)$ 30.

$\frac{AH\sqrt{42} + AH}{42 - AH^2} =$ $AH(\sqrt{42}$

$BH = \frac{30}{6} = 5$.

$(\sqrt{42} - AH)(\sqrt{42} + AH)$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} & (2) \\ 2y+x^2=9. & (1) \end{cases}$

$y^2+4x^2-4xy=xy$

$y^2+4x^2-5xy=0.$

из (1): $y=\frac{9-x^2}{2}=\frac{(3-x)(3+x)}{2}$

из (2): $y-2x\geqslant 0$ $\quad xy\geqslant 0.$

$y\geqslant 2x$

1) если $\begin{cases} y\geqslant 0 \\ x\geqslant 0. \end{cases}$

2) если $\begin{cases} y\leqslant 0 \\ x\leqslant 0 \end{cases}$

в (2) $\frac{9-x^2}{2}-2x=\sqrt{\frac{9-x^2}{2}\cdot x}$

$\frac{9-x^2-4x}{2}=\sqrt{\frac{9x-x^3}{2}}$ возведём в квадрат обе части.

$\frac{(9-x^2-4x)^2}{4}=\frac{x(9-x^2)}{2}$

$\cancel{x_{1,2}=-2\pm\sqrt{47}}$

$\left(\frac{9-x^2-4x}{2}\right)^2-\frac{2x(3-x)(3+x)}{4}=0.$

$\left(\frac{9-x^2-4x}{2}\right)^2=\left(\frac{(3-x)(3+x)-4x}{2}\right)^2=$

$=\frac{(3-x)(3+x)(3+x)(3+x)}{4}-\frac{2\cdot 2x\cdot(3-x)(3+x)}{2}+(2x)^2=$

$=\cancel{9+x^2-6x}$

$y=\frac{5x\pm\sqrt{25x^2-16x^2}}{2}=\frac{5x\pm 3x}{2}$ $\begin{matrix} 4x \\ x \end{matrix}$

1) $8x+x^2-9=0$

$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+9}}{1}=-4\pm 5$ $\begin{matrix} -9 \\ 1 \end{matrix}$

2) $2x+x^2-9=0.$

$x_{1,2}=-1\pm$

$y=0$; $x\geqslant 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6) $\begin{cases} 3|x| + |2y| + |6-3x-2y| > 6 \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \le 0 \end{cases}$

$|3x| + |2y| + |6-3x-2y| > 6$

1) $x \ge 0$; $y \ge 0$ 2) $x \ge 0$; $y < 0$ 3)

4) $CO = AO = 6$

$\frac{(CH + AO)}{2} \cdot OH_1 =$

$AH = OH_1 = \sqrt{36 - CH_1}$

$HD \cdot AB = 30$

$\frac{DH}{6} = \frac{HB}{AH} = \frac{BD}{BD+6}$

$CH = CH_1 + 6 = 6 + HD =$
$= 6 +$

$\cancel{DH \cdot AB}$

$\frac{HD \cdot AH + \cancel{AO} 6 \cdot DH}{2}$

$AB = BH +$

$HD = CH_1$!

$DH \cdot \cancel{B}AB$

$\frac{DH \cdot AB}{2}$

$BH = \frac{DH \cdot AH}{6} = \frac{3\sqrt{33}}{6}$: $\frac{OH_1 \cdot DH_1}{2}$

$\frac{10}{9}$

$\cancel{DH}\ \frac{6HB}{AH} = CH'$ $\frac{\sqrt{33}}{2}$. $\cancel{HD}$ $CH_1 \cdot \sqrt{36 - CH_1} = 30$.

$\cancel{CH_1^2 \cdot (36 - CH_1) = 900}$

$DH = 3$

$AB = 10$.

$\frac{6HB}{AH} \cdot (AH + HB) = 30$.

$36 CH_1^2 - CH_1^3 - 900 = 0$

$\frac{3\sqrt{33}}{9} = \frac{\sqrt{33}}{3}$

$6HB + \frac{6HB^2}{AH} = 30$

$6HB + CH_1 \cdot HB = 30$

$6HB = CH_1 \cdot \sqrt{36 - CH_1}$

$\frac{12HB + 6HB^2 - 60 = 0}{2}$

$AH = \sqrt{33}$

$HB =$

$2HB + HB^2 - 10 = 0$

$HB_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+10}$

$CH = 3$.

$CH_1 = 3$.

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)