

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy}, \\ 2y + x^2 = 9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{29}$, $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6, \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leq x \leq 19$, $3 \leq y \leq 19$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$N1 \quad \frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot (x-3)} \leq 0$$

1) Пусть $x \geq 3$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4(x-1)}{4x^2 - 12x + x \cdot (x-3)} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{4x^2 - 12x + x^2 - 3x} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{5x^2 - 15x} \leq 0$$

$$\frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} \leq 0 \quad \text{т.к. } x \geq 3, \text{ то } 5x > 0$$

$$x-3 \geq 0$$

при этом $(x-3)^2 \geq 0$, а
дробь ≤ 0 такое возможно
если $\frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} = 0 \quad x \neq 0 \text{ OДЗ}$
 $x \neq 3$

$$\frac{x-3}{5x} = 0$$

$$x=3 \notin \text{OДЗ}$$

в этом случае нет решений

при этом квадрате
 $(x-3)^3$ всегда ≥ 0

знаменатель
и знаменатель

≥ 0 , а по условию

дробь ≤ 0 , значит
такое возможно

только при (1)

~~$$(1) \frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} = 0$$~~

OДЗ

т.к. дробь имеет смысл, то $x \neq 0$
 $x \neq 3$

~~$$\frac{(x-3)}{5x} = 0 \quad x=3 \notin \text{OДЗ}$$~~

~~$$\frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} = 0$$~~

~~$$\frac{x-3}{5x} = 0$$

но $x \neq 3$~~

в этом случае нет реш.

n1 (предположение)

2) Пусть $3 > x \geq 1$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4(x-1)}{4x^2 - 12x + x \cdot (3-x)} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{4x^2 - 12x + 3x - x^2} \leq 0$$

$$\frac{(x-3)^2}{3x^2 - 9x} \leq 0$$

$$\frac{(x-3)^2}{3x(x-3)} \leq 0 \quad \text{по предположению}$$

~~$3 > x \geq 1$~~
значит $(x-3) < 0$

$\leftarrow 3x > 0$

$$3x(x-3) < 0$$

$$(x-3)^2 \geq 0$$

значит при любом $3 > x \geq 1$ это верно (неотриц. ~~число~~ ~~знамен~~ ка отрис.)

3) Пусть $1 > x \geq 0$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4(1-x)}{4x^2 - 12x + x(3-x)} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4 + 4x}{4x^2 - 12x + 3x - x^2} \leq 0$$

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{3x^2 - 9x} \leq 0$$

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{3x(x-3)} \leq 0$$

$$\text{ODЗ } \frac{(x+1)^2}{3x(x-3)} \leq 0$$

$$(x+1)^2 \geq 0$$

$x \neq 0$
при любом $1 > x > 0$ это верно (неотр. ~~число~~ ~~знамен~~ ка отрис.)

$3x \geq 0$ по предполож.
 $x-3 < 0$ по предполож.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4) Пусть $x < 0$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4(1-x)}{4x^2 - 12x + (-x) \cdot (3-x)} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4 + 4x}{4x^2 - 12x - x(3-x)} \leq 0$$

$$\frac{(x+1)^2}{4x^2 - 12x - 3x + x^2} \leq 0$$

OD3
 $x \neq 0$
 $x \neq 3$

$$\frac{(x+1)^2}{5x(x-3)} \leq 0$$

$$(x+1)^2 \geq 0$$

по предположению

$$5x < 0$$

$$x - 3 < 0$$

↙ (неотриц. дробится на ~~отриц.~~ ^{полож.})

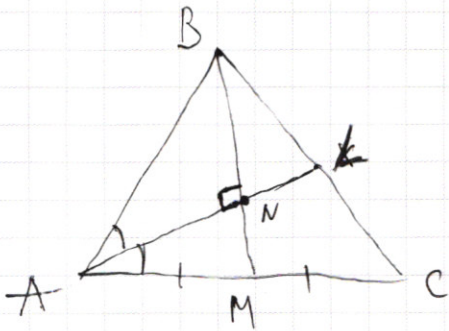
$$\frac{(x+1)^2}{5x(x-3)} \geq 0, \text{ но по условию } \frac{(x+1)^2}{5x(x-3)} \leq 0 \text{ такое}$$

возможно при $\frac{(x+1)^2}{5x(x-3)} = 0$ или $5x(x-3) > 0$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = 0$$

$$x = -1$$

Ответ: $(3; 0) \cup (1)$



Рассмотрим $\triangle ABC$ в котором
 биссектр. \perp медиане. Пусть
 эта биссектриса — AL , а медианой —
 BM

$\triangle ABM$ — р/б, т.к. биссектр. AN (N — т.к.
 BM и AL) совпадает с высотой.

Значит $AC = 2AB$, а периметр $300 = 3AB + BC$
 также должно выполняться Δ ка
 $AC + AB > BC$

$$3AB > BC$$

$$BC + AB > 2AB$$

$$BC > AB$$

$$BC + 2AB > AB$$

т.к. $AB > 0$, то при любом BC ($BC > 0$) $BC > -AB$

Значит $BC > AB$

при $BC \leq AB$ $300 = AB + BC + AC \leq 4AB$

\Rightarrow при $AB \leq 75$ Δ не существует

при $BC \geq 3AB$ $300 = AB + BC + AC \geq 6AB$

при $AB \leq 50$ Δ не существует

~~Осталось рассмотреть $AB > 50$ (при $AB > 50$)~~

~~при $75 > AB > 50$ по пер-ву Δ ка~~

при $75 > AB > 50$ Δ существует (по пер-ву Δ ка)

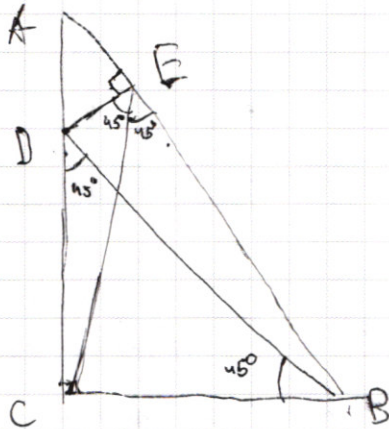
Рассмотрим ка-во возможные AB другие стороны

опр. однозначно, а значит и Δ тоже (то есть сколько возможных AB найдется столько Δ ка)

т.к. $AB \in \mathbb{Z}$, то Δ число — 24. Ответ: 24.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5



Дано:

$$\angle CED = 45^\circ$$

$$AC = \frac{5}{2}\sqrt{29}$$

$$BC = \sqrt{29}$$

$$S_{\triangle AED} = ?$$

$$AD:AC = ?$$

~~Решение~~ $\angle CEB = 180^\circ - \angle AED - \angle DEC = 45^\circ$

т.к. ~~AB~~ $DEBC$ - впис., т.к. $\angle DEB + \angle DCB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Значит $\angle ABC = \angle DEC$, т.к. опир. на DC
 $\angle CDB = \angle CEB$ т.к. опир. на CB

$$\Rightarrow \angle CDB = \angle DBC = 45^\circ \Rightarrow DC = \sqrt{29}$$

$$AD = \frac{5}{2}\sqrt{29} - \sqrt{29} = 1,5 \cdot \sqrt{29}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{1,5 \cdot \sqrt{29}}{\frac{5}{2}\sqrt{29}} = \frac{3}{5}$$

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$ по двум углам ($\angle A$ - общ., $\angle E = \angle C = 90^\circ$)

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$$

$$AB = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\sqrt{29}\right)^2 + (\sqrt{29})^2} \quad \text{по Пф. Пифагора}$$

$$AB = \sqrt{\frac{29 \cdot 25}{4} + 29} = \sqrt{29 \left(\frac{25}{4} + 1\right)} = \sqrt{29 \cdot \frac{29}{4}} = \frac{29}{2}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{29}}{\frac{\sqrt{29}-\sqrt{29}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{29}} = \frac{DE}{\sqrt{29}} = \frac{AE}{\frac{5}{2}\sqrt{29}}$$

$$DE = 3$$

$$AE = 3 \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$$

$$S_{\Delta AED} = \frac{3 \cdot 15}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{45}{4}$$

Ответ: $AD=AC=3 \cdot 5$; $S_{\Delta ABD} = \frac{45}{4}$

N3

y и x не равны 0, т.к. $2y+x^2=9$

Тогда $x=0$, тогда из 1) $y=0$ противоречие!!!

☞

Тогда $y=0$, тогда из 1) $x=0$ Противоречие!!!

П.к. \sqrt{xy} имеет смысл, то x и y одного знака

Если x и $y > 0$, тогда и $y-2x \geq 0$, т.к. $\sqrt{xy} \geq 0$
 $y \geq 2x$

$$\begin{cases} (y-2x)^2 = xy \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

Если $x, y < 0$, то

$$\begin{cases} 2x \leq y \\ \text{т.к. } \sqrt{xy} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 - 5xy + 4x^2 = 0 \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 - 5xy + 4x^2 = 0 \\ y_{1,2} = \frac{5x \pm \sqrt{25x^2 - 16x^2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} y=x \\ y=4x \end{cases} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=4x \\ 8x+x^2-9=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=x \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=4x \\ \begin{cases} x=-9 \\ x=1 \end{cases} \end{cases} \quad x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64+36}}{2}$$

$$\begin{cases} y=x \\ x^2+2y-9=0 \end{cases} \quad x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+36}}{2}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=4x \end{cases} \quad x, y > 0 \text{ и } 2x \geq y$$

$$\begin{cases} x=-9 \\ y=4x \end{cases} \quad \begin{matrix} x, y < 0, \\ \text{но} \\ 2x \neq y \end{matrix}$$

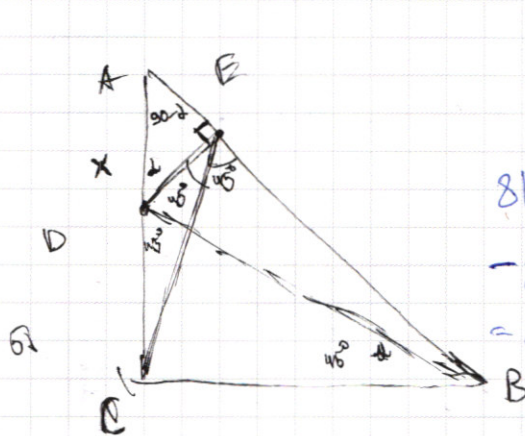
$$\begin{cases} y=x \\ \begin{cases} x=\sqrt{10}-1 \\ x=-1-\sqrt{10} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=x \\ x=\sqrt{10}-1 \end{cases} \quad x, y > 0, \text{ но } 2x \geq y$$

$$\begin{cases} y=x \\ x=-1-\sqrt{10} \end{cases} \quad \begin{matrix} x, y < 0 \text{ и} \\ 2x \leq y \end{matrix}$$

Ответ: $x, y \geq -1-\sqrt{10}$ или $x=1$; $y=4$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



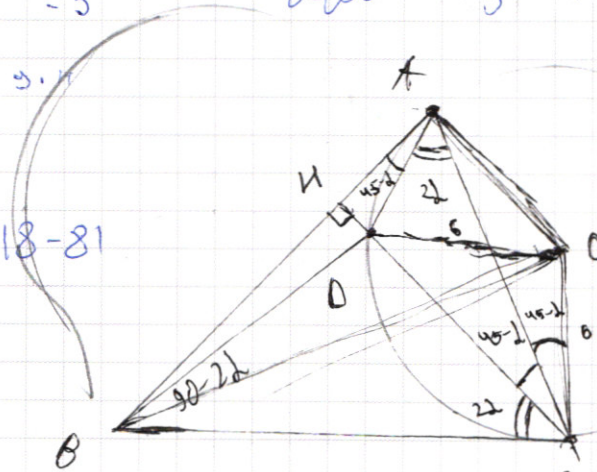
$x^3 + 11x^2$
 $\frac{AB}{AC} = 3$
 $81 \cdot 11 - 81^2 \cdot 81 - (x+1)(x^3 + 11x^2 + 9x - 1) = 0$
 $-81 \cdot 9 - 81 \cdot 1^2 = x^4 + 11x^3 + 9x^2 - x - x^3 - 11x^2 - 9x + 1$
 $= 81$
 $-1 + 11 - 9 - 1 = 0$
 $x^4 + 10x^3 - 2x^2 - 10x + 1 = 0$

$16 \cdot 11 = 176 + 64$
 $-36 - 81$
 x^3
 -3
 -2
 $4 = 64$
 $3 = 27$
 $27 + 99$
 $-8 + 44 + 18 - 81$

$x^3 + 11x^2 + 9x - 81 = 0$

45
 $25 \cdot 11 = 275$
 $64 - 81$
 -5
 -125
 $x^2 = k$

-27
 99
 27
 -81
 -4264
 -64
 176
 -81



$x^2 + 11x$
 $\frac{1}{x} + \frac{11}{x^2}$
 $8 + 44 + 99 =$
 $-1000 + 1100$
 $27 + 99 +$

$y = 2x$
 $y =$

$\frac{AM}{DE} = \frac{CH}{AM}$

$CH \cdot DH = AM^2$

$y = \frac{9-x^2}{2}$

$\frac{9-x^2}{2} = 2x = \sqrt{\left(\frac{9-x^2}{2}\right)x} =$

$x = -5$
 $-125 - 45 - 81$
 -27
 99
 81

$$\begin{aligned} k^2 - 2n^2 &= 9 \\ 2k^2 + n^2 &= 9 \end{aligned}$$

~~Всё~~

$$y^2 + 4x^2 - 4xy = xy$$

$$x + 2y = 9$$

$$y^2 + 4x^2 - 5xy = x + 2y - 9$$

$$3x^2 + y^2 - 5xy + 2y - 9 = 0$$

$$y^2 - 5xy + 4x^2 = 0$$

$$y = \frac{5x \pm \sqrt{25x^2 - 16x^2}}{2} = \frac{5x \pm 3x}{2}$$

$$y - 2x \geq 0$$

~~$$x \geq 0$$~~

~~$$x \leq 0$$~~

$$y \geq 2x$$

$$x(x-2) + y(y-3) \leq 0$$

~~Всё~~

~~Всё~~

$$-1 + \sqrt{10} + 2 - 2\sqrt{10}$$

$$(\sqrt{10} - 1) - 2(\sqrt{10} - 1) = \sqrt{10} - 1 = \sqrt{10} - 1$$

$$4 = 2 = \sqrt{4 \cdot 1} = 2$$

$$2 \cdot 4 + 1 = 9$$

$$-18 = -36 + 18 = \sqrt{-9 \cdot -36} = 18$$

$$\begin{aligned} &(-1 - \sqrt{10}) - 2(-1 - \sqrt{10}) \\ &1 + \sqrt{10} = \sqrt{(-1 - \sqrt{10})^2} \end{aligned}$$

~~$$1 + \sqrt{10}$$~~

$$-1 - \sqrt{10}$$

$$y = x$$

$$y = 4x$$

$$x^2 = 5x^2$$

$$2x + x^2 = 9$$

$$x^2 - 2x - 9 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 36}}{2}$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{10}$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 100}}{2} = \frac{-8 \pm 10}{2}$$

$$x_{1,2} = -4 \pm 5$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -9$$

(!!!)

51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70
 71 72 73 74

$$y = \frac{9-x^2}{2}$$

$$8 - \frac{9-x^2}{2} - 2x = \sqrt{x \left(\frac{9-x^2}{2} \right)}$$

$$9-x^2-4x = \sqrt{18x-2x^3}$$

$$(9-x^2-4x)^2 = 18x-2x^3$$

$$81+x^4+16x^2-18x^2-42x+8x^3 = 18x-2x^3$$

$$81+x^4-2x^2-90x+8x^3 = 0$$

$$81+1-2-90+10$$

$$(x-1)(x^3)$$

$$x^4+10x^3-2x^2-90x+81=0$$

$$x^4+11x^3$$

$$\sin 2d = 2 \sin d \cos d$$

$$1-2-90+10+81$$

$$x^4 = 11x^3 + 9x^2 - 81x$$

$$x^3 = 11x^2$$

$$x^4 - 2x^2 - 90x + 10x^3 + 81 \quad | \quad x-1$$

$$\begin{array}{r} x^4 + 10x^3 - 2x^2 - 90x + 81 \\ - (x^4 - x^3) \\ \hline 11x^3 - 2x^2 - 90x + 81 \end{array} \quad | \quad x-1$$

$$\begin{array}{r} 11x^3 - 2x^2 - 90x + 81 \\ - (11x^3 - 11x^2) \\ \hline 9x^2 - 90x + 81 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9x^2 - 90x + 81 \\ - (9x^2 - 9x) \\ \hline -81x + 81 \end{array}$$

$$(x-1)(x+11x^2)$$

$$81 : x$$

$$xy = y^2 - 4xy + 4x^2$$

AB

$$y^2 - 5xy + 4x^2 = 0$$

$$x + 2y - 9 = 0$$

$$y = \frac{9-x^2}{2}$$

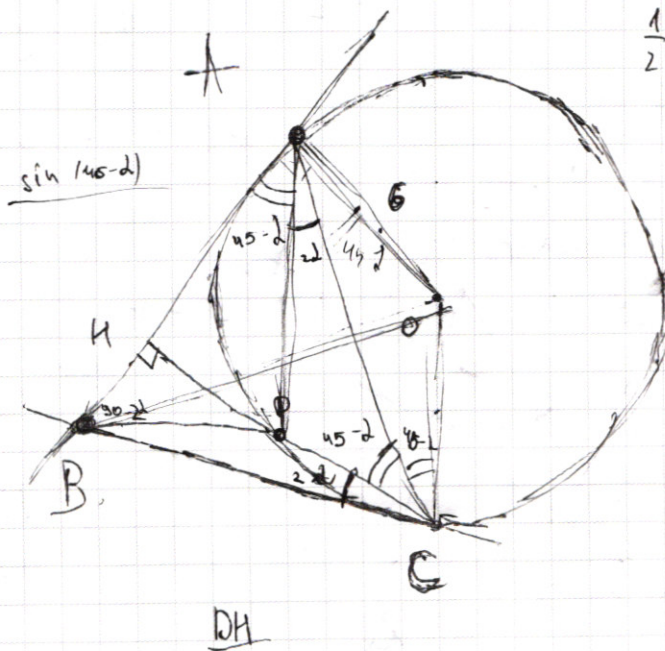
$$\sin(45^\circ - d) = \frac{6}{AB}$$

$$AB = \frac{6}{\sin(45^\circ - d)}$$

$$\sin(45^\circ - d)$$

$$\frac{CH}{AB} = \sin(90^\circ - 2d)$$

$$\frac{6}{AB} = \sin$$



$$\frac{1}{2} AB \cdot DH = 15$$

$$AB \cdot DH = 30$$

$$AB \cdot CH = AB \cdot 2DH = 60$$

$$AB = \frac{60}{CH} \quad CH = \frac{60}{AB}$$

$$90^\circ - d =$$

$$180^\circ - 50^\circ + d =$$

$$\frac{90+d}{2} = 45 + 0.5d$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3|} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{4x^2 - 12x + x \cdot (x-3)} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{4x^2 - 12x + x^2 - 3x} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{5x^2 - 15x} \leq 0$$

$$\frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} \geq 0$$

$$\frac{x-3}{5x} \geq 0$$

$$x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$$

$$x < 0$$

$$x^2 + 4x - 9 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 36}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{52}}{2} = -2 \pm \sqrt{13}$$

$$x = 50$$

$$3 > x \geq 1$$

$$2y + x^2 = 9$$

$$y = \frac{9 - x^2}{2}$$

$$\frac{9 - x^2}{2} - 2x = \sqrt{x \left(\frac{9 - x^2}{2} \right)}$$

$$9 - x^2 - 4x = 2 \sqrt{\frac{9x - x^3}{2}}$$

$$3x + y = 300$$

$$x > y > x$$

$$x = 50$$

$$300 \div 75 = 4$$

$$150$$

$$75$$

$$75$$

$$150$$

$$75$$

$$75$$

$$95$$

$$150$$