

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy}, \\ 2y + x^2 = 9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.
5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{29}$, $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45^\circ$.
6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6, \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leq x \leq 19$, $3 \leq y \leq 19$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

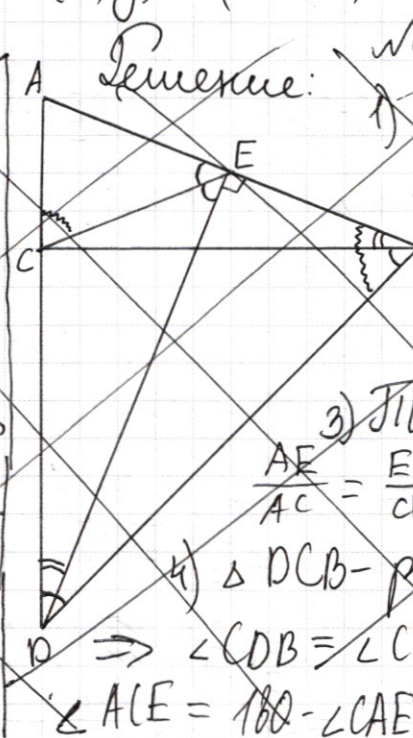
$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \\ y^2 - 4xy + 4x^2 = xy \\ xy \geq 0 \\ y - 2x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Сначала решим верхнее уравнение выразив} \\ \text{х через у и затем подставим во второе.} \\ y - 5xy + 4x^2 = 0 \\ xy \geq 0 \\ y \geq 2x \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x = y \\ x = 0,25y \end{cases} \\ xy \geq 0 \\ y \geq 2x \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x = y \\ y \leq 0 \\ x = 0,25y \end{cases} \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Теперь подставим полученные значения во второе уравнение:

$$\begin{cases} y^2 + 2y - 9 = 0 \\ x = y; y \leq 0 \\ y^2 + 16y - 72 = 0 \\ x = 0,25y; y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 \pm \sqrt{10} \\ x = y; y \leq 0 \\ y = 4 \pm \sqrt{138} \\ x = 0,25y; y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 - \sqrt{10} \\ x = 1 - \sqrt{10} \\ y = 4 + \sqrt{138} \\ x = 1 + \frac{\sqrt{138}}{4} \end{cases}$$

Ответ: $(x; y) = (1 - \sqrt{10}; 1 - \sqrt{10})$ или $(x; y) = (1 + \frac{\sqrt{138}}{4}; 4 + \sqrt{138})$.

Дано:
 $\angle ACB = 90^\circ$
 $DE \perp AB$
 $AC = \sqrt{2}a$
 $BC = \frac{5}{2}\sqrt{2}a$
 $\angle CED = 45^\circ$
 $\frac{AD}{AC} = ?$
 $S_{AED} = ?$



Решение: №5

- $\triangle ACB \sim \triangle AED$, т.к. $\angle AED = \angle ACB = 90^\circ$,
 $\angle CAB$ - общий (по двум равным углам)
- Из п. 1) $\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{ED}{CB} \Rightarrow$
 $\Rightarrow ED = AE \cdot \frac{CB}{AC} = \frac{5}{2}AE$.
- Т.к. CE - биссектриса в $\triangle AED$, то
 $\frac{AE}{AC} = \frac{ED}{CD} \Rightarrow CD = AC \cdot \frac{ED}{AE} = \frac{5}{2}AC = BC$
- $\triangle DCB$ - равнобедренный ($DC = CB$, DB - основание)
 $\Rightarrow \angle CDB = \angle CBD = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ = \angle CEA = \angle CED$
 $\angle ACE = 180 - \angle CAE - \angle CEA = 180 - \angle CAE - \angle CPB = \angle ABD$

5) $\triangle CAE \sim \triangle BAD$ по двум углам ($\angle CAE$ - общий и $\angle ACE = \angle ABD$)

6) Из п. 5) $\Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB}$, где AB по теореме Пифагора равна

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} \Rightarrow AE = \frac{AC}{AB} AD, \text{ где } AD = AC + CD = AC + BC.$$

$$AE = \frac{AC}{\sqrt{AC^2 + BC^2}} (AC + BC)$$

7) $S_{AED} = \frac{1}{2} AE \cdot DE = \frac{5}{4} AE^2$, м.р. $DE = \frac{5}{2} AE$ из п. 2)

$$S_{AED} = \frac{5}{4} \frac{AC^2}{AC^2 + BC^2} (AC + BC)^2$$

$$S_{AED} = \frac{5}{4} \cdot \frac{(\sqrt{29})^2}{(\sqrt{29})^2 + (\frac{5}{2}\sqrt{29})^2} (\sqrt{29} + \frac{5}{2}\sqrt{29})^2 = \frac{5}{4} \cdot \frac{29}{29 + \frac{25}{4} \cdot 29} \cdot \frac{49}{4} \cdot 29$$

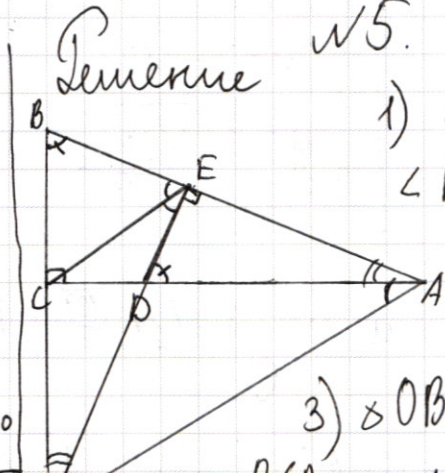
$$S_{AED} = \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{29} \cdot \frac{49}{4} \cdot 29 = \frac{5}{4} \cdot 49 = 61,25.$$

$$8) \frac{AD}{AC} = \frac{AC + CD}{AC} = 1 + \frac{CD}{AC} = 1 + \frac{BC}{AC} = 1 + \frac{\frac{5}{2}\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = 1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$$

Ответ: $S_{AED} = 61,25$; $AD:AC = 7:2$

Решение №5.

- $\angle ACB = 90^\circ$
- $DE \perp AB$
- $AC = \frac{5}{2}\sqrt{29}$
- $BC = \sqrt{29}$
- $\angle CED = 45^\circ$
- $AD:AC = ?$
- $S_{AED} = ?$



1) $\triangle DEA \sim \triangle BCA$ по 2 углам ($\angle A$ - общий, $\angle DEA = \angle BCA = 90^\circ$) $\Rightarrow EA = \frac{CA}{BC} ED = \frac{5}{2} ED$

2) Проведем ED до пересечения с BC и найдем точку O .

3) $\triangle OBE \sim \triangle ABC$ по 2 углам ($\angle B$ - общий, $\angle BOE = \angle BCA = 90^\circ$) $\Rightarrow OE = BE \cdot \frac{CA}{BC} = \frac{5}{2} BE$

4) П.р. CE - биссектриса в $\triangle BEO$, но $CO = BC \cdot \frac{OE}{BE} = \frac{5}{2} BC = CA$

5) $\triangle OCA$ - р.д, м.р. $CO = CA \Rightarrow \angle CAD = \angle COA = 45^\circ$

6) $\triangle CBE \sim \triangle ABO$ по 2 углам ($\angle B$ - общий, $\angle BEC = \angle BOA = 45^\circ$)

~~$$\Rightarrow BE = \frac{BC}{AB} BO = \frac{BC}{AB} (BC + CO) = \frac{BC}{AB} (BC + CA) = \frac{\sqrt{29}}{5\sqrt{29}} (\sqrt{29} + \frac{5}{2}\sqrt{29}) = \frac{1}{5} (\sqrt{29} + \frac{5}{2}\sqrt{29}) = \frac{3}{5}\sqrt{29}$$

$$EA = AB - BE = \sqrt{29} - \frac{3}{5}\sqrt{29} = \frac{2}{5}\sqrt{29} \Rightarrow ED = \frac{2}{5} EA = \frac{4}{25}\sqrt{29}$$~~

~~$$S_{AED} = \frac{1}{2} ED \cdot EA = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{25}\sqrt{29} \cdot \frac{2}{5}\sqrt{29} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{25} \cdot \frac{2}{5} \cdot 29 = \frac{4}{25} \cdot 29 = 56,8$$~~

$$\Rightarrow BE = \frac{BC}{AB} BO = \frac{BC}{AB} (BC + CO) = \frac{BC}{AB} (BC + CA) \Rightarrow EA = AB - BE = \frac{CA(BC + CA)}{AB}$$

$$7) S_{AED} = \frac{1}{2} EA \cdot ED = \frac{1}{5} EA^2 = \frac{CA^2 (CA - BC)^2}{5(AC^2 + BC^2)} = \frac{(\frac{5}{2}\sqrt{29})^2 (\frac{5}{2}\sqrt{29} - \sqrt{29})^2}{5((\frac{5}{2}\sqrt{29})^2 + (\sqrt{29})^2)}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$S_{AED} = \frac{25 \cdot 29 \cdot \frac{9}{4} \cdot 25}{5 \cdot \frac{25}{4} \cdot 29} = \frac{25 \cdot 9}{5 \cdot 4} = \frac{5 \cdot 9}{4} = \frac{45}{4} = 11,25$$

$$8) AD = \sqrt{AE^2 + DE^2} = AE \sqrt{1 + \frac{H^2}{AS^2}} = AE \cdot \frac{\sqrt{29}}{5} = \frac{AC \cdot (AC - BC)}{AB} \cdot \frac{\sqrt{29}}{5}$$

$$AD = \frac{\frac{8}{5} \sqrt{29} \cdot \frac{3}{5} \sqrt{29} \cdot \sqrt{29}}{5 \cdot \frac{25}{5}} = \frac{3}{2} \sqrt{29}$$

$$9) \frac{AD}{AC} = \frac{\frac{3}{2} \sqrt{29}}{\frac{5}{2} \sqrt{29}} = \frac{3}{5}$$

Ответ: $S_{AED} = 11,25$; $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$.

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3|} \leq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 5 - 4 \cdot |x-1|) \cdot (4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3|) \leq 0$$

Тогда рассмотрим 4 случая с разными раскрытиями модулей:

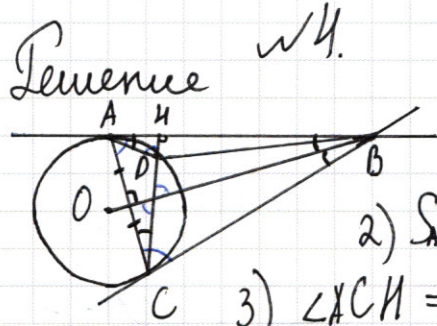
$$\begin{cases} x \in (-\infty; 0] : (x^2 + 2x + 1)(5x^2 - 15x) \leq 0 ; (x+1)^2 \cdot 5x(x-3) \leq 0 \\ x \in (0; 1] : (x^2 + 2x + 1)(3x^2 - 9x) \leq 0 ; (x+1)^2 \cdot 3x(x-3) \leq 0 \\ x \in (1; 3] : (x^2 - 6x + 9)(3x^2 - 9x) \leq 0 ; (x-3)^2 \cdot 3x(x-3) \leq 0 \\ x \in (3; +\infty) : (x^2 - 6x + 9)(5x^2 - 15x) \leq 0 ; (x-3)^2 \cdot 5x(x-3) \leq 0 \end{cases}$$

Теперь воспользуемся методом интервалов:

$$\begin{cases} x \in (-\infty; 0] : x(x+1)^2(x-3) \leq 0 \\ x \in (0; 1] : x(x+1)^2(x-3) \leq 0 \\ x \in (1; 3] : x(x-3)^3 \leq 0 \\ x \in (3; +\infty) : x(x-3)^3 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \emptyset \\ x \in (0; 1] \\ x \in (1; 3) \\ x \in \emptyset \end{cases}$$

Так же у нас ни в одном случае $x \neq 0$ и $x \neq 3$, т.е. когда знаменатель равен 0, а это невозможно. Тогда решим это неравенство является промежутком $x \in (0; 3)$ Ответ: $x \in (0; 3)$

Дано:
 $S_{ABD} = 15$
 $R = 6$
 $AB:CH = ?$



1) По свойству степеней точки $AH^2 = OH^2 - R^2 = DH \cdot CH$

2) $S_{ABD} = \frac{DH}{2} \cdot AB = \frac{OH^2 - R^2}{2} \cdot \frac{AB}{CH}$

3) $\angle ACH = \angle DAI$, т.р. они равны половине дуги $\overset{\frown}{AD}$ ($\angle ACH$ т.р. вписанный, а $\angle DAI$ - угол между хордой и кас.)

4) BO - биссектриса ^{и медиана} угла ACB , т.р. $OA = OC = R$ и она перпендикулярна и высота в $\triangle ABC$, т.р. $\triangle ABC$ - р/б ($AB = BC$, т.р. касательные из одной точки к одной окружности) и тогда пусть $\angle ABO = \angle OBC = \alpha$, тогда $\angle HAC = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle ACH = \alpha = \angle IAD = \frac{AB}{2}$

5) Из пункта 2) $\Rightarrow \frac{AB}{CH} = \frac{2S_{ABD}}{OH^2 - R^2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Дано: $P = 300$
 $N = ?$

Решение: $\checkmark 2$

1) Пусть $\angle ABH = \alpha$, тогда $\angle HBC = \alpha$.
 2) $\angle BMO = \angle BCO = 90 - \alpha \Rightarrow \triangle MBC - \text{р/б} \Rightarrow MB = BC$ и пусть $BC = y \Rightarrow AB = 2y$.
 3) П.Р. BH - медиана, то $\frac{BA}{AH} = \frac{BC}{HC} \Rightarrow AH = 2HC$ и пусть $HC = x \Rightarrow AH = 2x$

Тогда периметр равен $P = 3x + 3y = 300 \Rightarrow x + y = 100$ и значит составим систему уравнений с неравенствами треугольника.

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 3x < 3y \\ 3x + y > 2y \\ 3x + 2y > y \end{cases}; \begin{cases} x = 100 - y \\ y > x \\ y < 3x \\ y > -3x \end{cases}; \begin{cases} x = 100 - y \\ y > x \\ y < 3x \\ x, y \in \mathbb{N} \end{cases}; \begin{cases} y = 100 - x \\ y > x \\ y < 3x \\ x, y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Тогда из системы следует, что $100 - x > x$ и $100 - x < 3x$:

$$\begin{cases} 100 - x > x \\ 100 - x < 3x \end{cases}; \begin{cases} 100 > 2x \\ 100 < 4x \end{cases}; \begin{cases} x < 50 \\ x > 25 \end{cases}, \text{ тогда } x \in \{26, 27, 28, \dots, 48, 49\}$$

$$y \in \{51, 52, 53, \dots, 72, 73, 74\}$$

Тогда кол-во треугольников N , равно кол-ву возможных y (или x , у них одинаковое кол-во) и $N \in 24$.

Ответ: 24.

№6.

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6 \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0 \end{cases}$$
 Для начала рассмотрим, как раскрываются модули в первом уравнении в зависимости от x и y :

$$\begin{cases} \text{при } x \geq 0, |3x| = 3x \\ \text{при } x < 0, |3x| = -3x \end{cases} \quad \begin{cases} \text{при } y \geq 0, |2y| = 2y \\ \text{при } y < 0, |2y| = -2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{при } y \leq \frac{6-3x}{2}, |6-3x-2y| = 6-3x-2y \\ \text{при } y > \frac{6-3x}{2}, |6-3x-2y| = 3x+2y-6. \end{cases}$$

Решим второе уравнение относительно x (выразим x через y)

$$D = (-2)^2 - 4(y^2 - 3y) = -4(y^2 - 3y - 1)$$

D должен быть $\geq 0 \Rightarrow -4(y^2 - 3y - 1) \geq 0 \Leftrightarrow y^2 - 3y - 1 \leq 0$

$(y - \frac{3+\sqrt{13}}{2}) / (y - \frac{3-\sqrt{13}}{2}) \leq 0$

$y \in [\frac{3-\sqrt{13}}{2}; \frac{3+\sqrt{13}}{2}]$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-4(y^2 - 3y - 1)}}{2} = 1 \pm \sqrt{-(y^2 - 3y - 1)}$$

$$(1 \pm \sqrt{-(y^2 - 3y - 1)})^2 - 2(1 \pm \sqrt{-(y^2 - 3y - 1)}) - 3y + y^2 \leq 0;$$

$$1 \pm 2\sqrt{-(y^2 - 3y - 1)} - (y^2 - 3y - 1) - 2 \mp 2\sqrt{-(y^2 - 3y - 1)} - 3y + y^2 \leq 0;$$

$$1 - y^2 + 3y + 1 - 2 - 3y + y^2 \leq 0; 0y \leq 0 \Rightarrow y \text{ - и т.д.}$$

Это выполняется всегда, но y может быть любым в пределах $[\frac{3-\sqrt{13}}{2}; \frac{3+\sqrt{13}}{2}]$ и второе уравнение будет верным, а x тогда будет равен $1 \pm \sqrt{-(y^2 - 3y - 1)}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten mathematical work on graph paper:

Equations and Algebra:

- $y - 2x = \sqrt{xy}$
- $2y + x^2 = 9$
- $xy \geq 0$
- $y - 2x \geq 0$
- $y \geq 2x$
- $y^2 - 4xy + x^2 = xy$
- $AN^2 = (2AB - AN) \cdot AN$
- $y^2 - 5xy + 4x^2 = 0$
- $D = (5y)^2 - 44y^2 = 21y^2$
- $x = \frac{5y \pm \sqrt{21}y}{2 \cdot 4} = 0,25y$
- $2y + \frac{y^2}{8} = 9$
- $4y^2 + 16y - 72 = 0$
- $x = \frac{1 \pm \sqrt{16b}}{2}$
- $y = \frac{4 \pm \sqrt{13b}}{2}$
- $x = y$
- $y \geq 2y; 0 \geq y$
- $y \leq 0$
- $x = 0,25y$
- $0,25y \geq 0$
- $y \geq 0,5y$
- $y \geq 0$

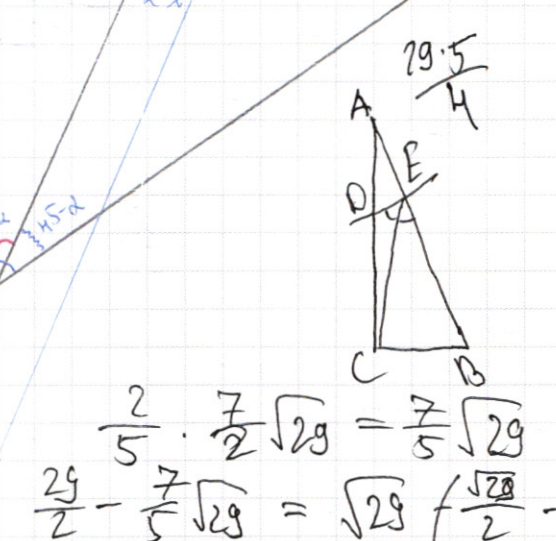
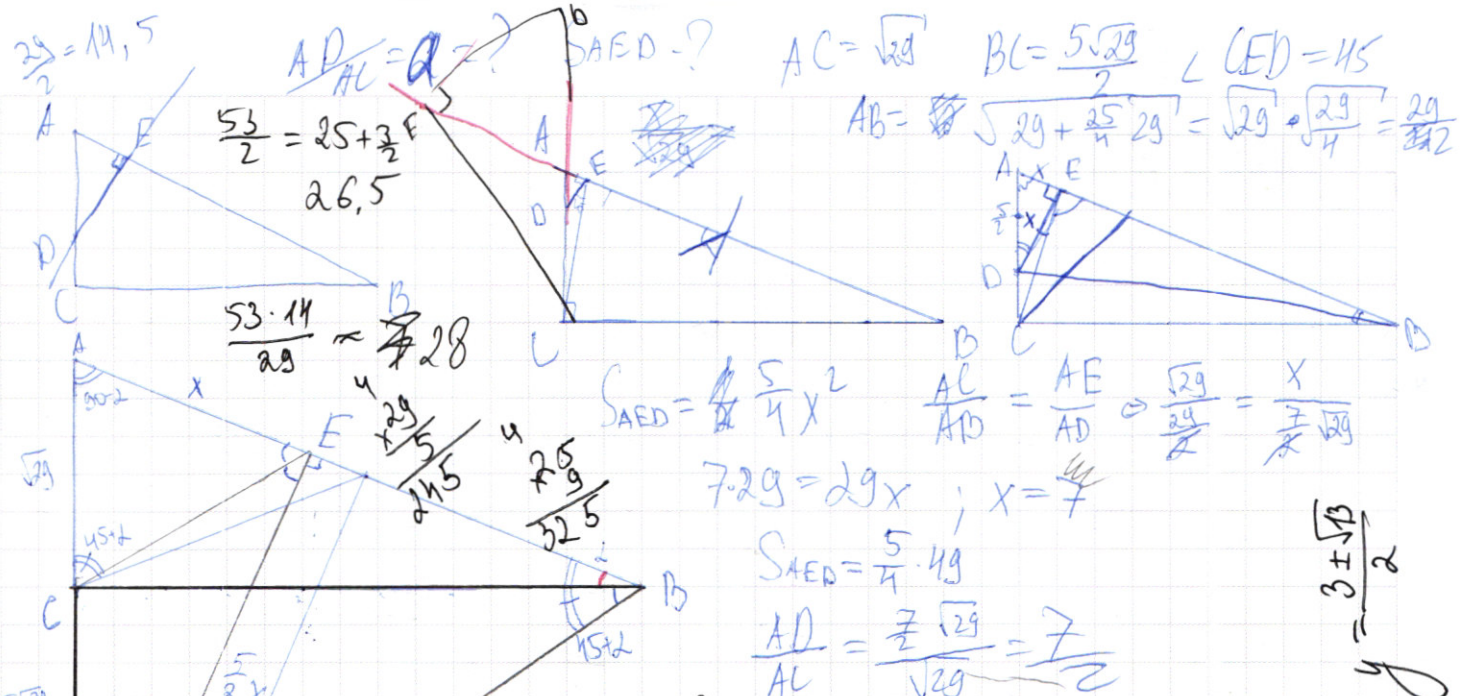
Geometry and Diagrams:

- Diagrams showing circles, triangles, and lines with points A, B, C, D, H, K, M, N.
- Labels for radii (R), diameters (D), and heights (CH, DH).
- Area calculations: $S_{ABD} = 15$, $R = 6$.
- Formulas: $AN^2 = DH$, $CH = OH^2 - R^2$.
- Area of triangle ABD: $S_{ABD} = \frac{1}{2} DH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{AN^2}{CH} \cdot AB = \frac{AN^2}{2} \cdot \frac{AB}{CH}$.
- Formula for k: $k = \frac{2S_{ABD}}{CH^2 - R^2} = \frac{2S_{ABD}}{2Rd + d^2} = \frac{2S_{ABD}}{d(2R+d)}$.
- Equation: $AN^2 = (2AB - AN) \cdot AN$.
- Equation: $CH^2 + AN^2 = 2AN \cdot AB$.
- Equation: $CH = \sqrt{AN(2AB - AN)}$.
- Equation: $CH^2 + AN^2 = 2AN \cdot AB + AN^2 = CB^2$.
- Equation: $CH^2 + AN^2 = 2AN \cdot AB + AN^2 = CB^2$.

Arithmetic and Linear Equations:

- $51 \dots 54$
- $51 \dots 564$
- $200 + 45 = 245$
- $245 \mid 4$
- $245 \mid 61,25$
- $2x + y = 100$
- $2y \leq 3x$
- $y \geq x$
- $2y \leq y + 3x$
- $y \leq 3x$
- $6 + 3x - 2y \geq 0$
- $2y \leq 6 - 3x$

$$D = 4 - 4(y^2 - 3y) = -4y^2 + 12y + 4 = 4(y^2 - 3y - 1) \geq 0 \Leftrightarrow$$



$$x^2 - 2x + 5 - 4 + 4x = x$$

$$\frac{29}{2} - \frac{7}{5}\sqrt{29} = \sqrt{29} \left(\frac{\sqrt{29}}{2} - \frac{7}{5} \right) = \frac{29 \cdot 5 - 7 \cdot \sqrt{29} \cdot 2}{10}$$

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$\frac{BA^2 - BC^2 - BC \cdot CA}{BA} = \frac{BC^2 + CA^2 - BC^2 - BC \cdot CA}{BA} = \frac{CA(BC + CA)}{BA^2 - CA^2}$$

$$\frac{25}{4} \cdot 29 \cdot \frac{9}{4} \cdot 29}{5 \cdot \frac{25}{4} \cdot 29} = \frac{25 \cdot 9}{5 \cdot 4} = \frac{45}{4} = 11,25$$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4(x-1)}{4x^2 - 12x + |x|/|x-3|} \leq 0$$

$(x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|) / (4x^2 - 12x + |x|/|x-3|) \leq 0$
 $x \in (-\infty; 0]$ $4x - 4, x^2 - 3x$
 $x \in (0; 1]$ $4 - 4x, -x^2 + 3x$
 $x \in (1; 3]$ $4 - 4x, -x^2 + 3x$
 $x \in (3; +\infty)$ $4 - \sqrt{x}, x^2 - 3x^2$

x	-	+	+	+
x-1	-	-	+	+
x-3	-	-	-	+



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

[Grid area for writing]

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)