

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x - 3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x - 2|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy}, \\ x + y^2 = 5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{7}$, $BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

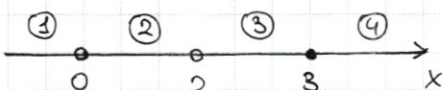
$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4, \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 18$, $1 \leq y \leq 18$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x-3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x-2|} \leq 0$$



$x=0$ - + + +

$x=2$ - - + +

$x=3$ - - - +

① $\frac{x^2 - 6x + 10 + 2x - 6}{2x^2 - 4x + (-x)(x+2)} \leq 0; x < 0$

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{3x^2 - 6x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \leq 0$$

нет решений

Ответ: $(0; 2) \cup \{4\}$.

② $\frac{x^2 - 6x + 10 + 2x - 6}{2x^2 - 4x + (x)(x+2)} \leq 0; 0 \leq x < 2$

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{x(x-2)} \leq 0$$

(0; 2)

③ $\frac{x^2 - 6x + 10 + 2x - 6}{2x^2 - 4x + (x)(x-2)} \leq 0; 2 \leq x < 3$

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{3x^2 - 6x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \leq 0$$

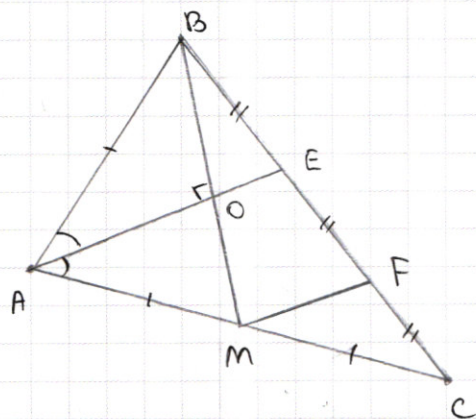
нет решений

④ $\frac{x^2 - 6x + 10 - 2x + 6}{2x^2 - 4x + (x)(x-2)} \leq 0; x > 3$

$$\frac{x^2 - 8x + 16}{3x^2 - 6x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-4)^2}{3x(x-2)} \leq 0$$

{4}

№ 2



AE - биссектриса
BM - медиана
AE \perp BM
O - точка перес. AE и BM
MF \parallel AE

AB = x ; BE = y

$P_{ABC} = AB + AC + BC = 3x + 3y = 600$

$3x + 3y = 600 \quad | : 3$

$x + y = 200 \Leftrightarrow y = 200 - x$

Ответ: 199

$x \in [1; 199]$ и $y = 200 - x \Rightarrow$ 199 вариантов

В треугольнике BAM
AO - бис. и высота \Rightarrow
AB = AM, AO - медиана
AB = AM = MC = x
 $\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$ (св. бис.)
 $\frac{EF}{FC} = \frac{AM}{MC} = \frac{1}{1}$ (теор. Фалеса)
 \Rightarrow BE = EF = FC = y

№3

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases} \text{ ODB: } x - 2y > 0; xy > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2y \\ xy > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - 2y)^2 = xy \\ x + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 = xy \\ x + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 5xy + 4y^2 = 0 \quad (1) \\ x + y^2 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 5xy + 4y^2 = 0 \quad (1) \\ a = 1; b = -5y; c = 4y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4y \\ x = y \\ x + y^2 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} D = 25y^2 - 16y^2 = 9y^2 \\ x = \frac{5y + 3y}{2} = 4y \\ x = \frac{5y - 3y}{2} = y \quad (1) \end{cases}$$

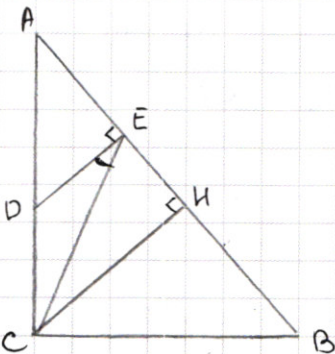
$$\begin{cases} x = 4y \\ y^2 + 4y - 5 = 0 \quad (2) \\ x = y \\ y^2 + y - 5 = 0 \quad (3) \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 + 4y - 5 = 0 \quad (2) \\ a = 1; b = 4; c = -5 \\ D_a = 4 + 5 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4y \\ y = 1 \\ y = -5 \\ x = y \\ y = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \\ y = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2 + 3 = 1 \quad (2) \\ y = -2 - 3 = -5 \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \\ x = -20 \text{ - не соот. ODB} \\ y = -5 \\ x = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \text{ - не соот. ODB} \\ y = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \\ y = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} D = 1 + 20 = 21 \\ y = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \quad (3) \\ y = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \quad (3) \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{-1 - \sqrt{21}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}\right) \cup (4; 1)$

№5



$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{7} \\ BC &= 2\sqrt{\frac{7}{3}} = 2\sqrt{\frac{7}{3}} \\ \angle CED &= 90^\circ \\ CH &\text{ - высота} \\ CH \perp AB, DE \perp AB &\Rightarrow \\ CH \parallel DE & \end{aligned}$$

Рассмотрим $\triangle ADE$ и $\triangle ACH$,
в них:

1. $\angle A$ - общий
2. $\angle AED = \angle AHC = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ACH$ (по 2 уг.)

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AH} = \frac{DE}{CH}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \quad (\text{теор. Пиф.})$$

$$AB = \sqrt{7 + 4 \cdot \frac{7}{3}} = \sqrt{7 \left(1 + \frac{4}{3}\right)} = \sqrt{7 \cdot \frac{7}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

$$S_{ABC} = 2 = AC \cdot CB = AB \cdot CH$$

$$CH = \frac{AC \cdot CB}{AB} = \frac{\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{\sqrt{3}}} = \frac{7 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot 7} = 2$$

$$\angle CEH + \angle CED = 90^\circ \quad (DE \perp AB)$$

$$\angle CEH = 90^\circ - \angle CED = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

~~$$\frac{EH}{CH} = \cotg(60^\circ) = \tg(30^\circ)$$~~

$$\frac{EH}{CH} = \cotg(60^\circ) = \tg(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (CH - \text{гипотенуза})$$

$$EH = \frac{CH \cdot 1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$AE = AB - EH - HB = \frac{7}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AH} = \frac{DE}{CH} = \frac{AE}{AE + EH} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{3}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{S_{AED}}{S_{ACH}} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow S_{AED} = \frac{S_{ACH}}{9} \quad S_{ACH} = \frac{AH \cdot CH}{2} = \frac{3 \cdot 4}{\sqrt{3} \cdot 2} = \sqrt{3}$$

$$S_{AED} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

О.вет: $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}; S_{AED} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

$\sqrt{7}$

$$f(abc) = f(a'b'c') = f(a) \cdot 1 + f(b) \cdot 1 + f(c) \cdot 1$$

$$f(c) = f(b^2) = f(b) \cdot 2 \quad \text{при:}$$

$$c = b^2; f(abc) = f(ab^2) = f(a) \cdot 1 + f(b) \cdot 2$$

$$f(x/y) = f(x^1 y^{-1}) = f(x) - f(y)$$

сумма всех $S =$

$$= 145$$

S - сумма всех $f(x)$, которые $\leftarrow f(y)$

$$P: 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10$$

$$f(p): 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 5 \ 7 \ 6 \ 6 \ 7$$

$$S: 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 4 \ 8 \ 6 \ 6 \ 8$$

$$P: 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17 \ 18$$

$$f(p): 11 \ 7 \ 13 \ 9 \ 8 \ 8 \ 17 \ 8$$

$$S: 15 \ 8 \ 16 \ 14 \ 11 \ 11 \ 17 \ 11$$

О.вет: 145

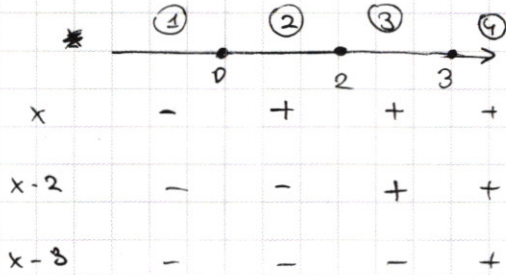


черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

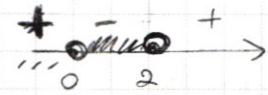
$$\sqrt{\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x-3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x-2|}} \leq 0$$



$$\textcircled{1} \quad \frac{x^2 - 6x + 10 + 2x - 6}{2x^2 - 4x + (-x)(-x+2)} \leq 0 ; x < 0$$

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{3x^2 - 6x} \leq 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \leq 0$$



Ответ: ~~(0; 2)~~ нет решений

$$\textcircled{2} \quad \frac{x^2 - 6x + 10 + 2x - 6}{2x^2 - 4x + x^2 - 2x} \leq 0, 2 \leq x < 3$$

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{3x^2 - 6x} \leq 0$$

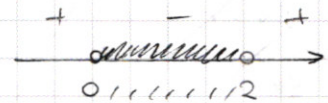
$$\frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \leq 0$$

Ответ: нет решений

$$\textcircled{2} \quad \frac{x^2 - 6x + 10 + 2x - 6}{2x^2 - 4x + x(-x+2)} \leq 0 ; 0 \leq x < 2$$

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x} \leq 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{x(x-2)} \leq 0$$



Ответ: (0; 2)

$$\textcircled{4} \quad \frac{x^2 - 6x + 10 - 2x + 6}{2x^2 - 4x + x^2 - 2x} \leq 0 \quad x \geq 3$$

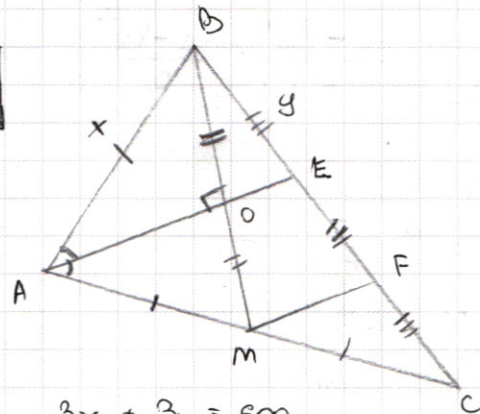
$$\frac{x^2 - 8x + 16}{3x^2 - 6x} \leq 0$$

$$\frac{(x-4)^2}{3x(x-2)} \leq 0$$

Ответ: 4

Ответ: (0; 2) ∪ {4}

Р



$$\begin{aligned} 3x + 3y &= 600 \\ x + y &= 200 \end{aligned}$$

$$[x \in [1; 200) ; y = 200 - x]$$

193 вариантов

$$\sqrt{3} \begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x - 2y \geq 0 \\ xy \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x - 2y)^2 = xy \\ x^2 - 4xy + 4y^2 = xy \\ x^2 - 5xy + 4y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a &= 1; b = -5y; c = 4y^2 \\ D &= 25y^2 - 16y^2 = 9y^2 \geq 0 \\ x &= \frac{5y \pm 3y}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = y \\ x = 4y \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 + y - 5 = 0 \\ y^2 + 4y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$1. \quad y^2 + y - 5 = 0$$

$$2. \quad y^2 + 4y - 5 = 0$$

$$D = 1 + 20 = 21$$

$$D = 4 + 5 = 9$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$y = -2 \pm 3$$

$$x = y = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$x = y = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}$$

$$y = -5; x = -20 \text{ - не подходит } (x - 2y < 0)$$

$$x^2 = \left(\frac{-1 + \sqrt{21}}{2}\right)^2 = \frac{1 - 2\sqrt{21} + 21}{4} \quad \begin{cases} y = 1; x = 4 \\ y = -5; x = -20 \end{cases}$$

$$x - 2x \geq 0$$

$$x \geq 2x$$

$$x \leq 0$$

$$\frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \geq -1 - \sqrt{21}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \neq -1 + \sqrt{21}$$

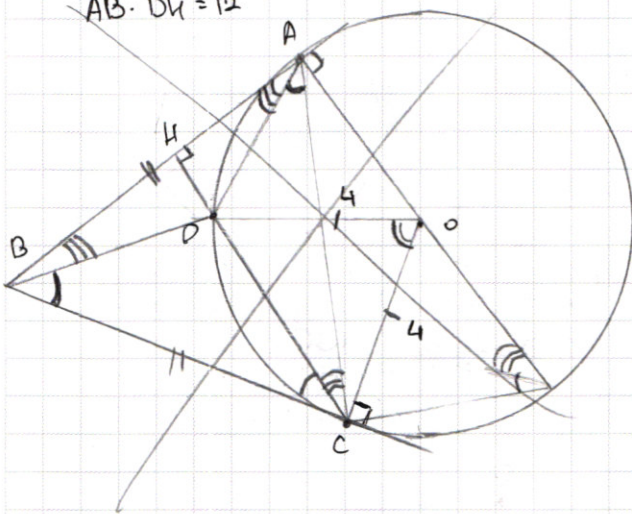
$$x = y = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \text{ ~~не подходит~~$$

$$-1 + 4,5 \geq -2 + 9 \dots$$

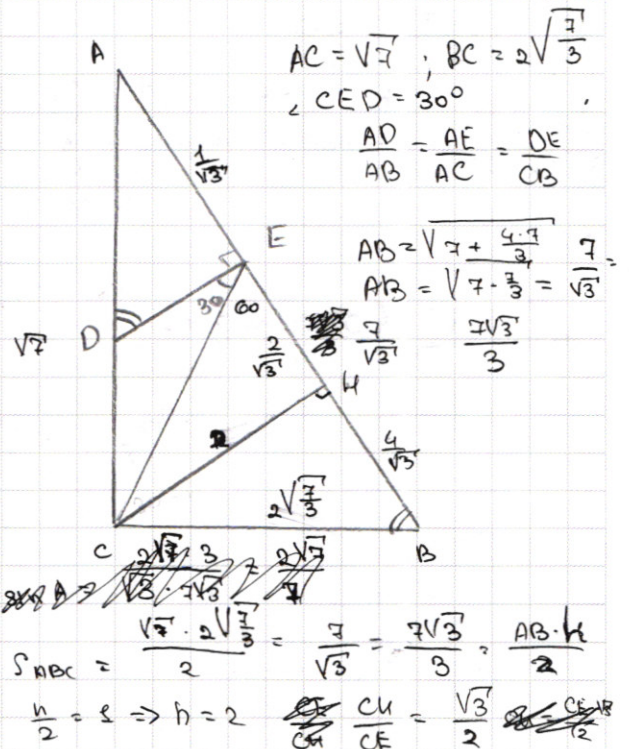
$$\frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \neq -2 + 2\sqrt{21}$$

Ответ: $\left(\frac{-1 + \sqrt{21}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}\right)$ и $(4; 1)$

$$\sqrt{4} \quad \begin{aligned} r &= 4 \\ AB \cdot DH &= 12 \end{aligned}$$



$$\sqrt{5}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$CE = \frac{2CU}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$UB = \sqrt{CB^2 - CU^2} = \sqrt{4 \cdot \frac{7}{3} - 4} = \sqrt{4 \left(\frac{7}{3} - \frac{3}{3} \right)} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{EK}{CE} = \frac{1}{2} \quad EK = \frac{CE}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\begin{aligned} \frac{AB}{AD} &= \frac{AE}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{21}} \\ AD &= \frac{AB \cdot \sqrt{21}}{\sqrt{3}} = \frac{7 \cdot \sqrt{21}}{\sqrt{3}} = \frac{7 \cdot \sqrt{7} \cdot 3}{\sqrt{3}} = 7\sqrt{7} \\ \frac{AD}{AC} &= 7\sqrt{7} \end{aligned} \right)$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{\sqrt{21}}$$

$$AD = \frac{AB}{\sqrt{21}} = \frac{7}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \cdot 3} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\triangle ADE \sim \triangle ACH \quad \left(\frac{AE}{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$$

$$DE = \frac{1}{3} CU = \frac{2}{3}$$

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

100-60: 0 1 2 3 4 4 8 6 6 8 15 8 16 14 11 11 17 11 Σ ~~6+9+16+12+10+15+16+17+39+17~~

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| N | P | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 7 | f(p) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 6 | 6 | 7 | 11 | 7 | 13 | 9 | 8 | 8 | 17 | 8 | |

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow f(y) > f(x)$$

| | | | | | | | | | | | |
|---------------------------|-----------------|----|----|----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|
| 2: (1, 2) | $\geq f(2) - 1$ | 3 | 6 | 10 | 14 | 22 | 28 | 34 | 42 | 57 | |
| 3: (1, 3); (2, 3) | $\geq f(3) - 1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 8 | 6 | 6 | 8 | 15 |
| 4: (1, 4); (2, 4); (3, 4) | $\geq f(4) - 1$ | 65 | 81 | 95 | 106 | 117 | 134 | 145 | | | |
| 5: f(p) - 1 | | 8 | 16 | 14 | 11 | 11 | 17 | 11 | | | |
| 6: f(5) - 1 = 5 - 1 | | | | | | | | | | | |

W 4...

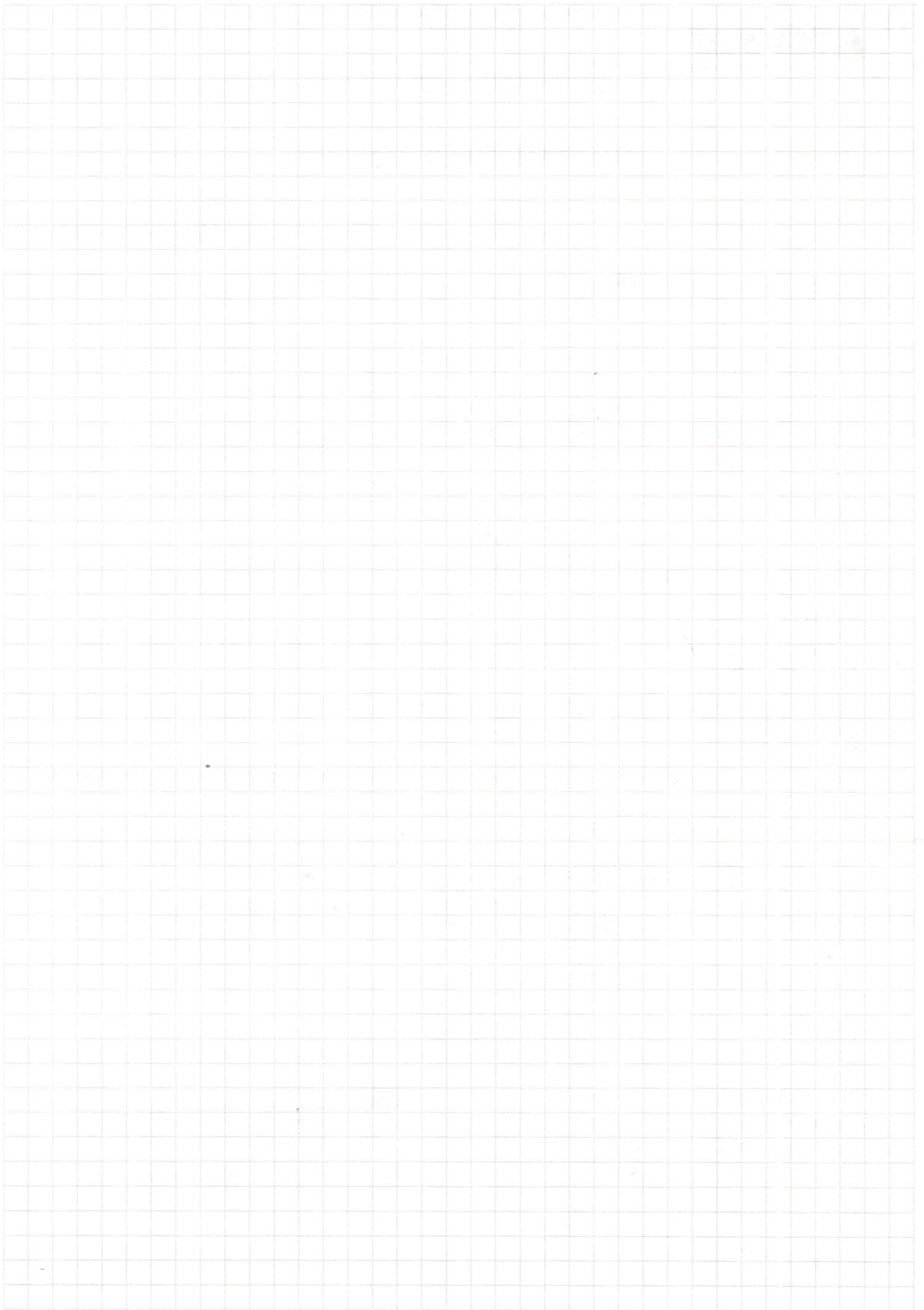
$$AB = BC$$

$$\frac{CU}{BC} = \sin B = \cos C$$

$$16 \cdot \sin(180 - B) = AB^2 \cdot \sin B$$

$$AB = 4 ; BK = 3$$

$$\left(\begin{aligned} f(abc) &= f(a) + f(b) + f(c) \\ f(a) &= c = b^2 \\ f(c) &= f(b) + f(b) \\ f(abc) &= f(a) + 3f(b) = f(ab^3) \\ f(x/y) &= f(x \cdot y^{-1}) = f(x) - f(y) \end{aligned} \right)$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

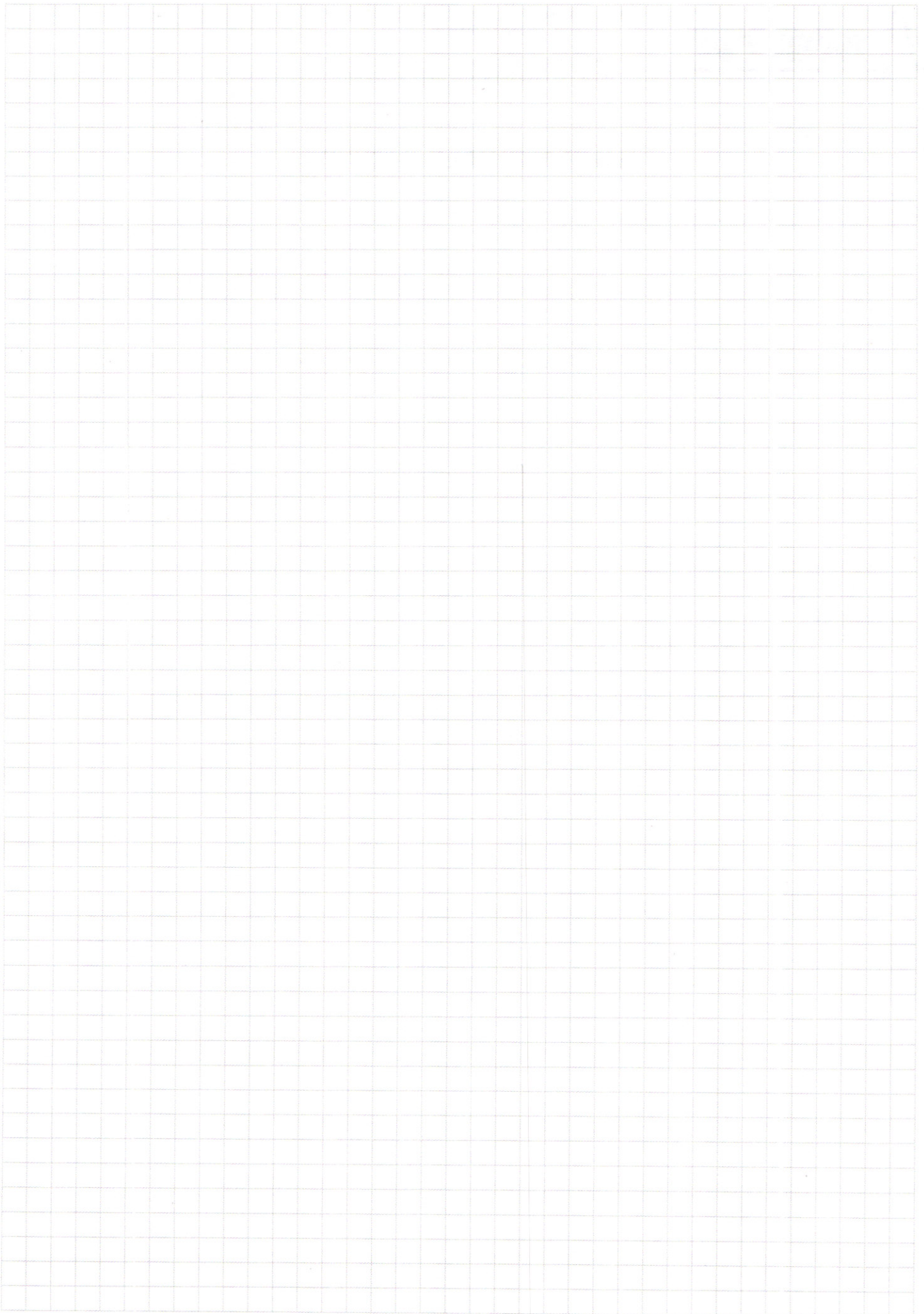
| |
|------|
| ШИФР |
|------|

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)