МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство
$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе
$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y| > 4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

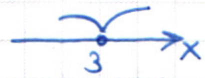
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1. $\dfrac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leq 0$

Вначале рассмотрим числитель, а после перейдём к знаменателю, не забыв, что последний не может равняться 0, что формирует О.Д.З.

Итак, числитель. Для начала раскроем модуль: $|x-3|=0$
$x=3$



1) $x<3$ $\quad |x-3|=3-x$

$x^2-6x+10-6+2x=$
$=x^2-4x+4=x^2-2\cdot2x+2^2=$
$=(x-2)^2$

Значит, числитель на промежутке $x\in(-\infty;3)$ - неотрицателен. тоесть при $x-2=0 \Rightarrow x=2$ числитель обращается в ноль, как и вся дробь, если 2 входит в О.Д.З, что будет проверено позднее; так же неравенство будет верно при отрицательном знаменателе, т.к при делении положительного на отрицательное получается отрицательное.

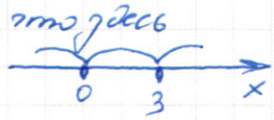
2) $x\geqslant3$ $\quad |x-3|=x-3$

$x^2-6x+10-2x+6=x^2-8x+16=$
$=x^2-2\cdot4x+4^2=(x-4)^2$

Значит, числитель на промежутке $x\in[3;+\infty)$ - неотрицателен, тоесть при $x-4=0 \Rightarrow x=4$ числитель обращается в ноль, как и вся дробь при условии, что 4 входит в О.Д.З, что проверим позже; так же стоит отметить, что как и в первом случае, неравенство будет верно при отрицательном знаменателе.

Таким образом, после рассмотрения числителя можно сделать вывод, что неравенство верно всегда, когда знаменатель отрицателен, при $x=2$; $x=4$ (если $2;4\in ОДЗ$).

Перейдём к рассмотрению знаменателя. Стоит отметить, что здесь необходимо раскрыть два модуля. $|x|=0$ при $x=0$
$|x-3|=0$ при $x=3$.



Для начала стоит определить О.Д.З, чтобы проверить подходят ли значения 2; 4 для этого неравенства.

Рассматриваем 3 промежутка

1) $x<0$
$2x^2-4x+(-x)(2-x)=$
$=2x^2-4x-2x+x^2=$
$=3x^2-6x.$
$3x^2-6x=0$
$x(x-2)=0$
~~...~~
$x=0$; $x=2$ оба корня посторонние, т.к промежуток $x\in(-\infty;0)$ не содержит эти числа.

2) $0\leq x\leq3$
$2x^2-4x+x(2-x)=$
$=2x^2-4x+2x-x^2=$
$=x^2-2x$
$x(x-2)=0$
$x=0$ $x=2$ оба корня $\in[0;3]$, то $x\neq0$; $x\neq2$, то числитель только в 1 случае будет обращаться в 0 (при $x=4$)

3) $x>3$
$2x^2-4x+x^2-2x=$
$=3x^2-6x$
$x(x-2)=0$
$x=0$; $x=2$ - посторонние корни, т.к промежуток $x\in(3;+\infty)$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Таким образом О.Д.З $x \in (-\infty;0)\cup(0;2)\cup(2;+\infty)$

Рассмотрим случай, когда знаменатель меньше 0, раскрыв модуль вновь получаем 3 случая, которые были разобраны ранее, но теперь вместо приравнивания к 0 следует поставить знак < и решить неравенство.

Запишем 3 случаи:

1) $x<0$

$3x^2-6x<0$

разделим на 3

$x^2-2x<0$

2) $0\leq x\leq 3$; $x\neq 0; x\neq 2.$

$x^2-2x<0$

3) $x>3$

$3x^2-6x<0$

разделим на 3

$x^2-2x<0$

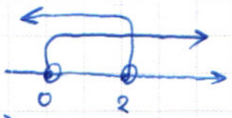
Заметим, что во всех трех случаях неравенство одно и то же, тогда решим его только 1 раз, на промежутке, совпадающем с О.Д.З

$x^2-2x<0$

$x\neq 0$, то при $x>0$

$x-2<0$

$x<2$



$x\in(0;2)$

при $x<0$

$x-2>0$

$x>2$

нет решений

Значит, решением неравенства будет $x\in(0;2)\cup\{4\}$

Ответ: $x\in(0;2)\cup\{4\}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3.

решим систему уравнений $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$

Проанализируем эту систему, внимательно её рассмотрев. Заметим, что благодаря первому уравнению $x-2y=\sqrt{xy}$ мы сможем узнать О.Д.З. т.к в уравнении есть корень, содержащий переменные. Из этого, что подкоренное выражение всегда неотрицательно, как, кстати, и само значение корня, можно сделать вывод о том, что $x-2y \geq 0$; $xy \geq 0$, из последнего условия видно, что числа x; y одинаковы по знаку, т.к их произведение неотрицательно, или хотя бы одно из них равно 0.

Теперь приступим к решению самой системы.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2y)^2=xy \\ x+y^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-4xy+4y^2=xy \\ x+y^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-5xy+4y^2=0 \\ x=5-y^2 \end{cases}$$

решим систему методом подстановки.

$$(5-y^2)^2-5y(5-y^2)+4y^2=0 \Rightarrow 25-10y^2+y^4-25y+5y^3+4y^2=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow y^4+5y^3-6y^2-25y+25=0$ Воспользуемся теоремой Безу для решения уравнения 4 степени, сразу обратив внимание на то, что корней не более 4. Итак, 25 - свободный член, то целочисленные корни, если такие имеются будут делителями числа 25. К примеру, подставим (-5), то

$625-625-150+125+25=0+0=0$, то есть (-5) - корень, то $y-\alpha=0$; $\alpha=-5$, то $y+5=0$. разделим уравнение на $(x+5)$, то получим

$$\begin{array}{l|l} y^4+5y^3-6y^2-25y+25 & y+5 \\ \underline{y^4+5y^3} & y^3-6y+5 \\ \quad -6y^2-25y & \\ \quad \underline{-6y^2-30y} & \\ \qquad 5y+25 & \\ \qquad \underline{5y+25} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$(x+5)(y^3-6y+5)=0$ теперь рассматриваем уравнение 3 степени $y^3-6y+5=0$ 5-свободн. чл. то возьмем, к примеру, 1, то $1-6+5=6-6=0$, то есть 1 - корень $\alpha=1$ $y-\alpha=0$; $y-1=0$ делим на $(y-1)$.

$$\begin{array}{l|l} y^3-6y+5 & y-1 \\ \underline{y^3-y^2} & y^2+y-5 \\ \quad y^2-6y & \\ \quad \underline{y^2-y} & \\ \qquad -5y+5 & \\ \qquad \underline{-5y+5} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$(x+5)(y-1)(y^2+y-5)=0$ рассматриваем квадратное уравнение.

$y^2+y-5=0$ $D=1+20=21$ $\sqrt{D}=\sqrt{21}$; $D>0 \Rightarrow$ 2 корня.

$y=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

теперь, зная все 4 корня уравнения четвертой степени, подставляем их, находим x, наблюдаем за тем, чтобы все удовлетворяло условию.

1) $y=-5$

$x=5-y^2=5-25=-20$

а) $x;y$ - одного знака - верно

б) $x-2y\geq 0$ - неверно.
$-20+10=-10$, то

$(-20;-5)$ н/у.

2) $y=1$

$x=5-1=4$

а) верно (одного знака)

б) $x-2y\geq 0$ верно

$4-2=2$

$(4;1)$ - решение системы.

3) $y=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$

$x=5-\frac{1-2\sqrt{21}+21}{2}=$
$=5-11+\sqrt{21}=-6+\sqrt{21}$.

а) $4<\sqrt{21}<5$
$\sqrt{16}<\sqrt{21}<\sqrt{25}$.

Значит, y:

$4-1<\sqrt{21}-1<5-1$

$\frac{3}{2}<\frac{\sqrt{21}-1}{2}<2$

такие, $y>0$

x: $4<\sqrt{21}<5$

$-2<\sqrt{21}-6<-1$

$x<0$, то $x;y$ - разного знака, то н/у.

4) $y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$

$x=5-11-\sqrt{21}=-6-\sqrt{21}$

а) y: $4<\sqrt{21}<5$

$-4>-\sqrt{21}>-5$

$-5>-\sqrt{21}-1>-6$

$-\frac{5}{2}>\frac{-\sqrt{21}-1}{2}>-3$, то $y<0$

x: $4<\sqrt{21}<5$
$-4>-\sqrt{21}>-5$
$-10>-\sqrt{21}>-11$ $x<0$ - одного знака.

б)
$x-2y\geq 0$

$-6-\sqrt{21}+1+\sqrt{21}=-5$ н/у

Значит, существует лишь одно решение системы

Ответ. $(4;1)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

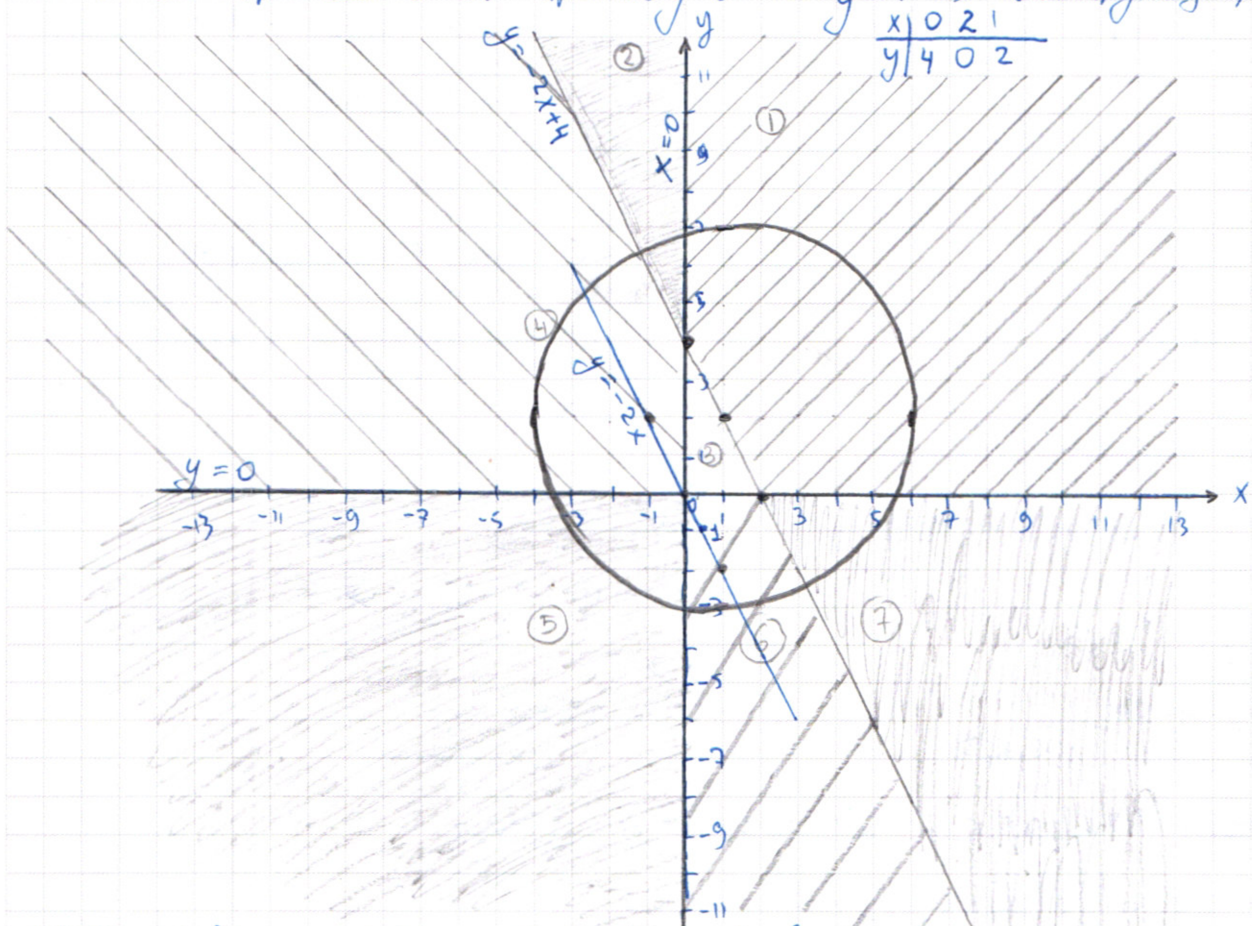
Задача 6. итак, дана система $\begin{cases} |2x| + |y| + |4-2x-y| > 4 \\ x^2-2x-4y+y^2 \leq 0 \end{cases}$

1) рассмотрим все модули, чтобы начертить график.

а) $2x=0$ б) $y=0$ в) $4-2x-y=0$

$x=0$ - прямая $x=0$. прямая $y=0$ $y=4-2x$ - лин. функц. граф.-прям

x	0	2	1
y	4	0	2



теперь необходимо рассмотреть 7 случаев.

1) возьмем произвольную точку в участке ① плоскости (3;3)

$|2\cdot3| + |3| + |4-2\cdot3-3|$ $\underset{>0}{}$ $\underset{>0}{}$ $\underset{<0}{}$

раскрываем модули.

$2x+y+2x+y-4>4$

$4x+2y-8>0$

$2x+y-4>0$

$y>4-2x$

$y=4-2x$ - лин. ф. гр. пр.

x	0	2	1
y	4	0	2

заштрихуем выбранную часть плоскости.

2) произвольная точка в пл ② $(-1;9)$

$|2\cdot(-1)| + |9| + |4+2\cdot1-9|$ $\underset{<0}{}$ $\underset{>0}{}$ $\underset{<0}{}$

раскрываем модули

$-2x+y-4+2x+y>4$

$2y>8$

$y>4$ закрашиваем выбранную часть плоскости

$y=4$ прямая

☐ черновик ☒ чистовик Страница №5

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

③. $(1;1)$

$|2\cdot1| + |1| + |4-2\cdot1-1|$
$>0 \quad >0 \quad >0$

$2x+y+4-2x-y>4$
$4>4$ $4 \nless 4$, то
не закрашиваем.

④ $(-1;1)$

$|2\cdot(-1)| + |1| + |4+2\cdot1-1|$
$<0 \quad >0 \quad >0$

$-2x+y+4-2x-y>4$

$-4x>0$
$x<0$ $\quad x=0$ - прямая
Закрашиваем нужный участок

⑤ $(-1;-1)$

$|2\cdot(-1)|+|-1|+|4+2\cdot1+1|$
$<0 \quad <0 \quad >0$

$-2x-y+4-2x-y>4$

$-4x>2y$

$y<-2x$

$y=-2x$ - лин.ф гр.пр.

x	0	1	-1
y	0	-2	2

закрасим выбранную область

⑥ $(1;-1)$

$|2\cdot1| + |-1| + |4-2\cdot1+1|$
$>0 \quad <0 \quad >0$

$2x-y+4-2x-y>4$

$-2y>0$

$y<0$
$y=0$ - прямая
закрасим

⑦ $(5;-3)$

$|2\cdot5| + |-3| + |4-5\cdot2+3|$
$>0 \quad <0 \quad <0$

$2x-y-4+2x+y>4$

$4x>8$

$x>2$ $\quad x=2$ - пр.
закрасим

решим в то все неравенство системы

$x^2-2x-4y+y^2\leq0$

$(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)\leq5$

$(x-1)^2+(y-2)^2\leq5$, то рисуем окружность радиусом 5;

центр - координаты $(1;+2)$
то, что внутри круга - закрашиваем, то $S_{кр}-S_{\Delta}=S$

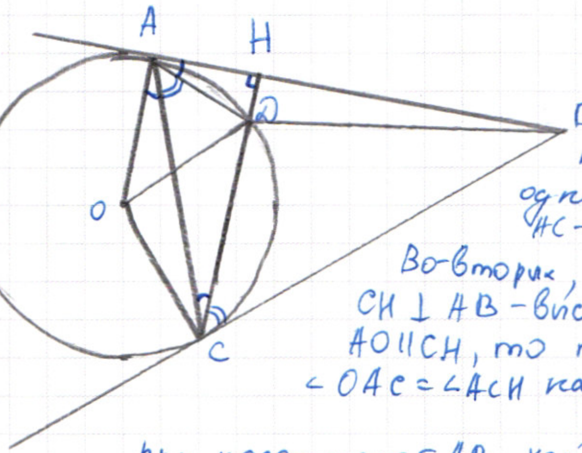
$S=\pi R^2-\frac{2\cdot4}{2}=3{,}14\cdot25-4$ (ед^2)

Ответ: $3{,}14\cdot25-4$ ед^2.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4.

Найти: $\frac{AB}{CH}$



Решение:

Во-первых, $BA = BC$ как отрезки касательных из одной точки к одной окружности, то ABC – равнобедр, AC – основание.

Во-вторых, $AO \perp AB$ – радиус в т. касания
$CH \perp AB$ – высота, то
$AO \parallel CH$, то при этих пр. и секущей AC
$\angle OAC = \angle ACH$ как накрест лежащие

при касательной AB, хорда AD заключает дугу $\breve{AD}$, то
$\angle HAD = \frac{1}{2}\breve{AD}$, но $\angle ACD = \frac{1}{2}\breve{AD}$, как вписанный, то

$\angle 1 = \angle HAD = \angle ACD$, то $\triangle AHD \sim \triangle CHA$ по 2 углам ($\angle H$ – общий, $\angle HAD = \angle ACD$), то

$$\frac{AH}{CH} = \frac{HD}{AH} = \frac{AD}{AC}.$$

BC – касательная, CD – хорда, то $\angle BCD = \frac{1}{2}\breve{CD}$, но $\angle CAD = \frac{1}{2}\breve{CD}$, то
$\angle BCD = \angle CAD = \angle 2$

Заметим, что $OA = OD$ – как радиусы одной окружности, то $\triangle AOD$ – равнобедр.; AD – основание, то $\angle OAD = \angle ODA = \angle 1 + \angle 2$ как углы при основании р.тр., но из рисунка видно, что в равнобедр. $\triangle ABC$ углы при основании $\angle BAC = \angle BCA = \angle 1 + \angle 2$, то

$\triangle ABC \sim \triangle AOD$ по 2 углам, то $\frac{AD}{AC} = \frac{OA}{AB} = \frac{4}{AB}$ $(OA = R = 4)$, то

$$\frac{AH}{CH} = \frac{HD}{AH} = \frac{AD}{AC} = \frac{OA}{AB} = \frac{4}{AB}, \text{ то } \frac{AB}{CH} = \frac{4}{AH}, \quad \frac{AH}{AB} = \frac{HD}{4},$$

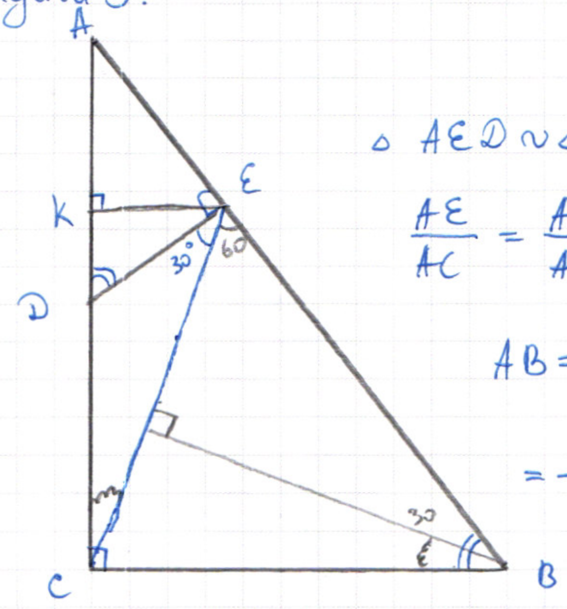
$AH^2 = CH \cdot HD$ $\quad AB = x\,AH$ $\quad \frac{AH}{AB} = \frac{1}{x} = \frac{HD}{4} \Rightarrow 4 = x\,HD \Rightarrow HD = \frac{4}{x}$

$$\left(\frac{AH}{CH}\right)^2 = \frac{HD}{CH} = \frac{16}{AB^2}$$

$S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot HD = 6$ $\quad AB \cdot HD = 12$

$AB \cdot HD = AH \cdot OA = AH \cdot 4 \Rightarrow AH = \frac{12}{4} = 3$, $\frac{AB}{CH} = \frac{4}{AH} = \frac{4}{3}$

Задача 5.



$\triangle AED \sim \triangle ACB$ по углам ($\angle E = \angle C = 90°$; $\angle A$ - общ)

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{ED}{BC} \Rightarrow AD = \frac{ED \cdot AB}{BC}$$

по т. пифагора

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} =$$

$$= \sqrt{7 + \frac{28}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

$$S_{\triangle ABC} = AC \cdot BC \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

$$S_{\triangle AED} = AE \cdot ED \cdot \frac{1}{2}$$

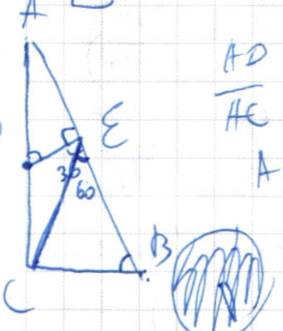
$\triangle AKE \sim \triangle AED$ по углам

$$\frac{AE}{AD} = \frac{KE}{DE} = \frac{AK}{AE}$$

$\triangle KED \sim \triangle EAD$ по углам

$$\frac{ED}{AD} = \frac{KE}{AE} = \frac{ED \cdot BC}{ED \cdot AB} = \frac{KE}{AE} = \frac{BC}{AB}$$

$\frac{AC}{BC}=\frac{\sqrt{7}\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$



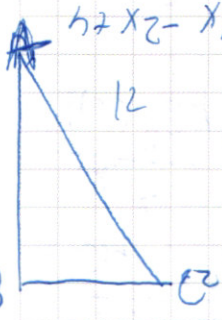
$AC=\sqrt{7}$ $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$

AED

$\frac{AD}{AC}$

$\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}$

$\angle CED=30^\circ$



$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

$x=5-y^2$

1) $x-2y\geq 0$

2) $x;y$ - одинаковые знаки

$x^2-4xy+4y^2=xy$

$x^2-5xy+4y^2=0$

$(5-y^2)^2-5y(5-y^2)+4y^2=0$

$25-10y^2+y^4-25y+5y^3+4y^2=0$

$y^4+5y^3-6y^2-25y+25=0$

$(y+5)(y-1)(y^2+y-5)=0$

$y=1$ $x=5-1=4$

$y=-5$ $x=5-25=-20$

$y=1+\sqrt{-x^2+2x+4}$

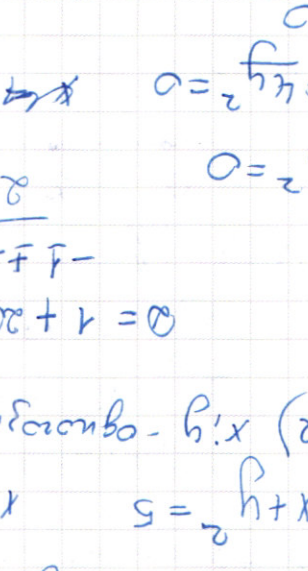
$1+\sqrt{-x^2+2x+4}$

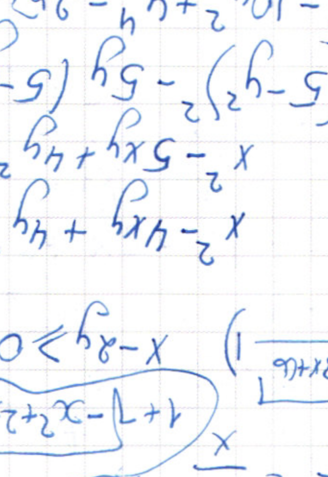
x^2-2x+4

$(x-1)^2+(y-2)^2\leq 5$

$y^2-4y+4-5$

$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}$





$a+b+c=600$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\le 0$$

$2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|\neq 0$

$2x^2-4x-x(2-x)\neq 0$ $\quad 2x^2-4x-x(x-2)\neq 0$ $\quad 2x^2-4x+x(x-2)\neq 0$

1) $2x^2-4x-2x+x^2\neq 0$

$3x^2-6x\neq 0$

$x\neq 0$

$x\neq 2$

$x\in(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$

2) $2x^2-4x-x^2+2x\neq 0$

$x^2-2x\neq 0$

$x(x-2)\neq 0$

$x\neq 0 \quad x\neq 2$

$x\in(0;2)$

$2x^2-4x+x(2-x)\neq 0$

3) $2x^2-4x+x^2-2x\neq 0$

$3x^2-6x\neq 0$

4)

$0 \quad 2 \quad 3$

$x^2-6x+10-2x+6=0$

$x^2-8x+16=0$

$x^2-2\cdot 4x+4^2=0$

$(x-4)^2=0$

$x=4$) знамен <0

$x^2-6x+10+2x-6=0$

$x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$

знамен <0

$x\le 3$

$x>3$