

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x - 3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x - 2|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy}, \\ x + y^2 = 5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.
5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{7}$, $BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30^\circ$.
6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4, \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 18$, $1 \leq y \leq 18$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1. \frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x-3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x-2|} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x-3|}{2x|x-2| + |x| \cdot |x-2|} = \frac{(x-3)^2 - 2|x-3| + 1}{2x(x-2) + |x| \cdot |x-2|} = \frac{(|x-3|-1)^2}{2x|x-2| + |x| \cdot |x-2|}$$

$$\frac{(|x-3|-1)^2}{2x|x-2| + |x| \cdot |x-2|} \leq 0 \quad x \neq 2; 0, \text{ т.к. знаменатель будет равен нулю}$$

рассмотрим 4 варианта x чтобы раскрыть модуль

I $x \geq 3$

$$\frac{(x-3-1)^2}{2x(x-2) + x(x-2)} = \frac{(x-4)^2}{3x(x-2)} \quad (x-4)^2 \geq 0; 3x(x-2) > 0 \Rightarrow \text{при } x=4$$

II $2 < x < 3$

$$\frac{(3-x-1)^2}{2x|x-2| + x|x-2|} = \frac{(x-2)^2}{3x|x-2|} = \frac{x-2}{3x} \quad \begin{matrix} x-2 > 0 \\ 3x > 0 \end{matrix} \Rightarrow \text{при } 2 < x < 3 \text{ нет решений}$$

III $0 < x < 2$

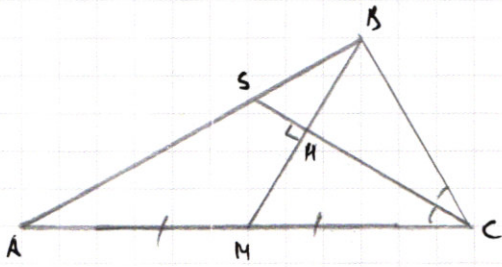
$$\frac{(3-x-1)^2}{2x|x-2| + x|x-2|} = \frac{(x-2)^2}{x|x-2|} = \frac{x-2}{x} \quad \begin{matrix} x-2 < 0 \\ 3x > 0 \end{matrix} \Rightarrow 0 < x < 2 - \text{решение}$$

IV $x < 0$

$$\frac{(3-x-1)^2}{2x|x-2| - x|x-2|} = \frac{(x-2)^2}{3x|x-2|} = \frac{x-2}{3x} \quad \begin{matrix} x-2 < 0 \\ 3x < 0 \end{matrix} \Rightarrow \frac{x-2}{3x} > 0 \Rightarrow \text{нет решений при } x < 0$$

Ответ: $x \in (0; 2), x = 4$

2



~~CS - бис. $\triangle ABC$~~

BM - мед. $\triangle ABC$

CS - бис. $\triangle ABC$

рассмотрим $\triangle BMC$

~~BH \perp MC~~ CH \perp MB

CH - высота

CH - бис. (по опр.)

CH - бис. и высота

$\triangle BMC$ - р/б (по сл-ву р/б тр-ка)

BC = MC

BC = MC = AM (M - ср. AC)

пусть AC = 2a, BC = a; AB = b

$$P = AC + BC + AB = 2a + a + b = 600$$

$$\begin{cases} AC < BC + AB \\ AB < BC + AC \\ BC < AB + AC \end{cases} \text{ - неравенство тр-ка} \Rightarrow \begin{cases} 2a < a + b \\ b < 2a + a \\ a < 2a + b \end{cases} \begin{cases} a < b \\ b < 3a \\ 0 < a + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a + b = 600 \\ b \in (0; 3a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 600 \\ a < b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{600 - b}{3} \\ \frac{600 - b}{3} < b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b > 3a \\ 600 - b < 3b \\ 600 < 4b \\ b > 150 \end{cases}$$

$$3a > b \quad \frac{600 - b}{3} > b \quad 600 - b > 3b$$

$$600 > 2b$$

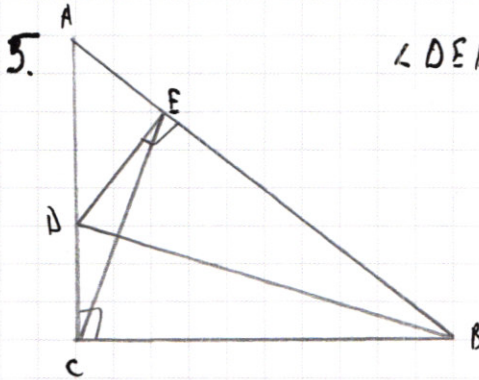
$$b < 300$$

$$\begin{cases} 3a + b \\ b \in (150; 300) \\ b : 3 \end{cases}$$

$$\frac{300 - 150}{3} - 1 = 49$$

Ответ: 49 треугольников

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\angle DEB + \angle DCB = 90 + 90 = 180^\circ$$

$$AC = \sqrt{7} \quad BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$$

\Downarrow
DEBC - впис (по кругу)

$$\angle CED = \angle CBD = 30^\circ \text{ (опор на окружность)}$$

\Downarrow
свойство

$$\angle CEB = \angle DEB - \angle DEC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$R = \frac{1}{2} DB$$

$$DB = 2R = \frac{BC}{\sin \angle BEC} = \frac{2\sqrt{\frac{7}{3}}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{7} \text{ (т. синусов)}$$

$$CD = 0,5 DB = \frac{2}{3}\sqrt{7} \text{ (катетов } \angle 30^\circ \text{ в пр. тр-ке)}$$

$$\underline{AD} = AC - CD = \sqrt{7} - \frac{2}{3}\sqrt{7} = \frac{1}{3}\sqrt{7}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{BC \cdot AC}{2} = \frac{2\sqrt{\frac{7}{3}} \cdot \sqrt{7}}{2} = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{7 + 4 \cdot \frac{7}{3}} = \sqrt{\frac{35}{3}}$$

Рассм $\triangle ABC$ и $\triangle ADE$

$$\angle A - \text{общ}$$

$$\angle AED = \angle ACB = 90^\circ$$

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE \quad k = \frac{AD}{AB} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{7}}{\sqrt{\frac{35}{3}}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{1}{15}}$$

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = k^2$$

$$S_{ADE} = k^2 \cdot S_{ABC} = \frac{1}{15} \cdot \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7}{15\sqrt{3}}$$

Ответ: $AD:AC = 1:3$; $S_{AED} = \frac{7}{15\sqrt{3}}$

3.

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$x - 2y = \sqrt{xy} \quad |^2 \quad xy \geq 0$$

$$(x - 2y)^2 - xy = 0$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - xy = 0$$

~~$$x(x - y) - 4y^2$$~~

$$D = 25y^2 - 16y^2 = 9y^2$$

$$x = \frac{5 \pm 3y}{2} \quad x_1 = y \quad x_2 = 4y$$

$$I \quad x = y$$

$$x + y^2 = 5$$

$$x + x^2 = 5$$

~~$$D = 1 + 20 = 21$$~~

$$D = 1 + 20 = 21$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$II \quad x = 4y \quad y = \frac{1}{4}x$$

~~$$x + y^2 = 5$$~~

~~$$x + \frac{1}{16}x^2 = 5 \quad | \cdot 16$$~~

~~$$x^2 + 16x - 80 = 0$$~~

~~$$D = 16^2 + 80 \cdot 4 =$$~~

$$x + y^2 = 5$$

$$4y + y^2 = 5$$

$$D = 16 + 20 = 36 = 6^2$$

$$y = \frac{-4 \pm 6}{2}$$

$$y_1 = 1 \quad x_1 = 4$$

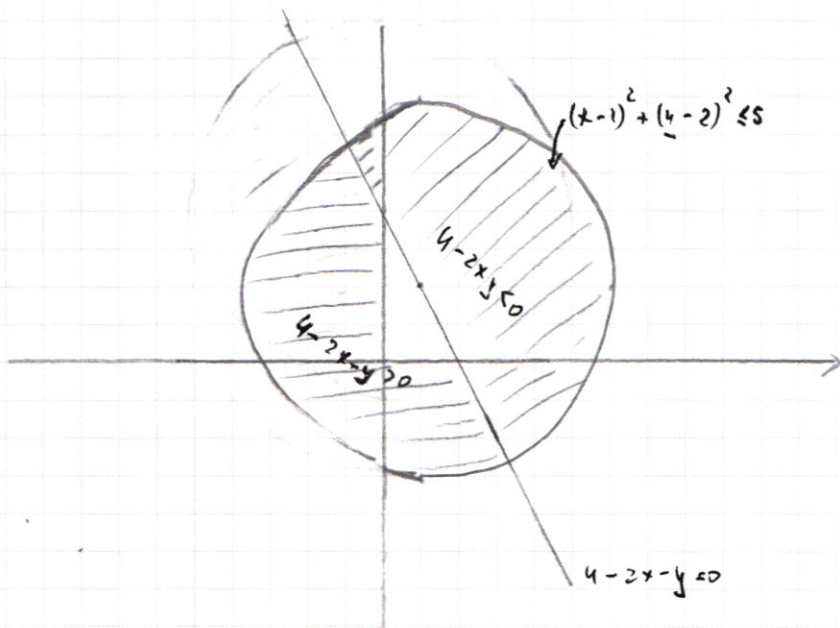
$$y_2 = -5 \quad x_2 = -20$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{-1 + \sqrt{21}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \right) \left(\frac{-1 - \sqrt{21}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \right) (4; 1) (-20; -5)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4 \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |4 - 2x - y| > 4 - (|2x| + |y|) \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 5 \end{cases}$$



$$4 - 2x - y = 0$$

$$x = 0 \quad y = 4$$

$$x = 2 \quad y = 0$$

или $x = 0 \quad y = 0$ или $x = 2 \quad y = 0$

или $4 - 2x - y > 0$:

$$4 - 2x - y > 4 - (|2x| + |y|)$$

$$2(|x| - x) + |y| - y > 0 \quad \text{или} \quad x < 0 \quad \text{или} \quad y < 0$$

или $4 - 2x - y \leq 0$ и $(2x + y) \geq 4$:

$$y + 2x - 4 > 4 - (|2x| + |y|)$$

$$2(|x| + x) + |y| + y > 8$$

или I. $x > 0 \quad y > 0$

$$4x + 2y > 8$$

$$2x + y > 4$$

или

II. $x \leq 0 \quad y > 0$

$$2y > 8$$

$$y > 4$$

III. $x > 0 \quad y \leq 0$

$$4y > 8$$

$$x > 2$$

$$S = S_{\text{верх}} - S_{\text{ниж}} = 4\pi R^2 - S_{\text{ниж}}$$

$$S_{\text{ниж}} = \frac{(2-0) \cdot (4-0)}{2} = 4$$

$$S = 4\pi \cdot 5 - 4$$

Отв: $20\pi - 4$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x-3|}{2x^2 - 4x + 1 + |x-1| \cdot |x-2|} \leq 0$$

$$\frac{(x-3)^2 - 2|x-3| + 1}{2x(x-2) + (x+1)(x-2)} = \frac{(|x-3| - 1)^2}{2x(x-2) + (x+1)(x-2)} \leq 0$$

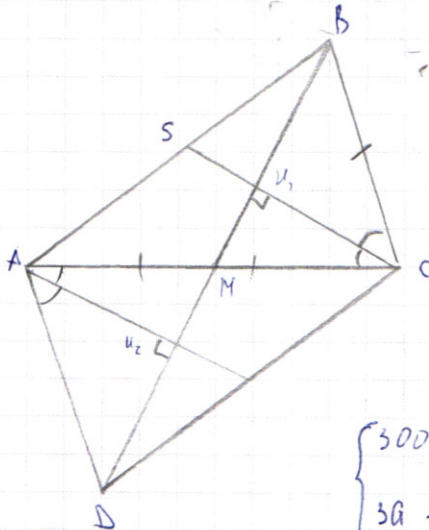
I $x \geq 3$

$$\frac{(x-3-1)^2}{2x(x-2) + x(x+2)} = \frac{(x-4)^2}{3x(x-2)} > 0 \Rightarrow x = 4$$

II $2 < x < 3$ $\frac{(3-x-1)^2}{2x(x-2) + x(x+2)} = \frac{(2-x)^2}{3x(x-2)} = \frac{x-2}{3x} > 0$

III $0 < x < 2$ $\frac{(3-x-1)^2}{2x(x-2) - x(x+2)} = \frac{(2-x)^2}{x(x-2)} = \frac{x-2}{x} < 0$

IV $x < 0$ $\frac{(3-x-1)^2}{2x(x-2) - x(x+2)} = \frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} = \frac{x-2}{3x} > 0$



$$3a + b = 600$$

$$b < 3a \quad a < b < 3a$$

$$a < b + 2a \quad \text{строго}$$

$$a < b + a$$

$$a = b$$

$$b = 3a$$

$$4a = 600$$

$$2b = 600$$

$$a = 150 \quad b = 150$$

$$b = 300$$

$$\begin{cases} 300 > b > 150 \\ 3a + b = 600 \end{cases}$$

$$b = 3$$

$$b = \sqrt{600 - 3a}$$

$$a = \sqrt{600 - b}$$

$$\frac{150}{3} - 1 = 49$$

$$b: 3$$

$$b: 153 \quad a = \frac{600 - 153}{3} = 200 - 51 = 149$$

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \cdot 2 \\ x + y^2 = 5 \end{cases} \begin{cases} x^2 + 4y^2 - 3xy = 0 \\ x = 5 - y^2 \end{cases}$$

$$25 - 10y + y^2 + 4y^2 - 3(5 - y^2)y =$$

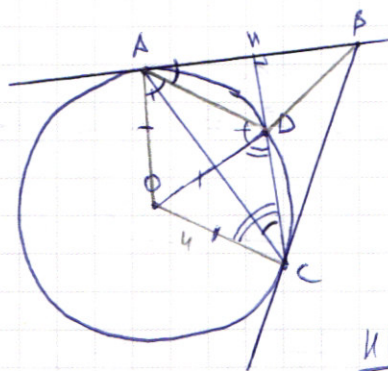
$$25 - 10y + 5y^2 - 15y + y^5 = 0$$

$$y^5 + 5y^2 - 25y + 25 = 0$$

~~10y - 25~~

$$5^6 + 5^5 - 5^4 + 5^2$$

$$-5^6 + 5^5 + 5^4 + 5^2$$



$$AD = BC$$

$$\frac{AB}{CH} = \frac{6}{CH} = \frac{12}{CH}$$

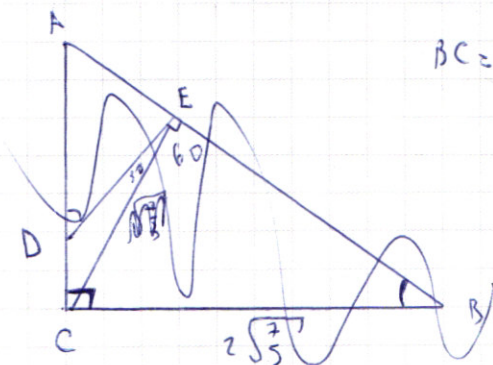
$$\frac{AB}{CH} = \frac{6}{CH} = \frac{12}{CH}$$

~~AM = BK~~

$$\frac{HD}{AH} = \frac{AK}{CH} \quad HD \cdot CH = AH^2$$

$$\frac{AB}{CH} = \frac{BC}{CH} =$$

$$\frac{AD}{CH} = \frac{BC}{AH}$$



$$BC = \sqrt{CE^2 + BE^2 - CE \cdot BE}$$

$$BD = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

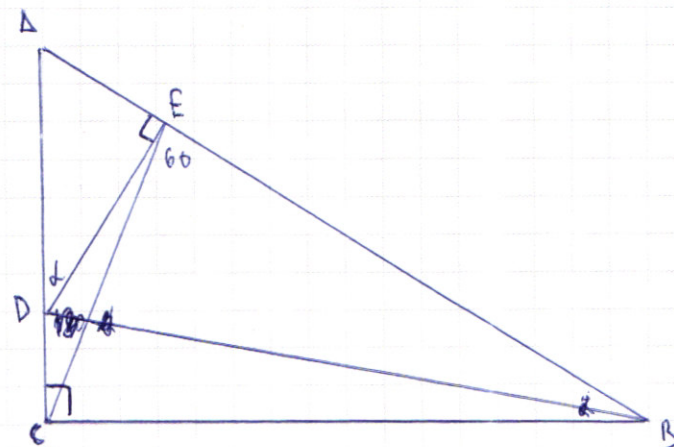
$$AB = \sqrt{7 + 10 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{\frac{35}{3}}$$

$$AB = \sqrt{\frac{35}{3}}$$

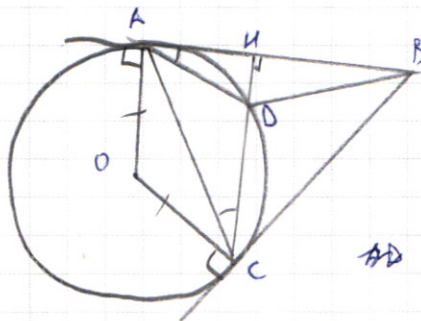
$$BD = AC = \sqrt{7}$$

$$BC = 2\sqrt{\frac{3}{3}}$$

$$AC, BC \quad \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



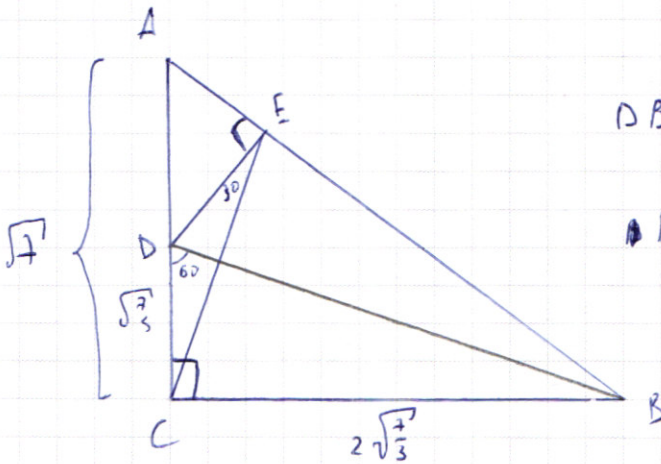
$$\frac{AB}{CH} = \frac{12}{CH \cdot HD} = \frac{12}{AH^2}$$

$$\sin C = \frac{AH}{AC} = \frac{HD}{AH}$$

$$\delta = \frac{AD}{HD} = \frac{AD}{HD} = AH$$

$$AB \cdot HD = R \quad AB = \frac{R}{HD}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{CH}$$



$$DB = \frac{\sqrt{7}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{4}{3}\sqrt{7}$$

$$DB = \frac{CB}{\sin 60} \quad \sin 60 = \frac{CB}{DB}$$

$$AC = \sqrt{7}$$

$$AC^2 = 4^2 + 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 120 = AB^2 + AB^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 120$$

$$AC^2 = 2 \cdot (AB^2 + 4^2)$$

$$AC^2 = AB^2 + 16$$

$$\frac{AB}{CH} = \frac{12}{AH^2}$$

$$\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{\sqrt{7}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

$$S_{ADE} = \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4 - 2\sqrt{3}}{3} = \frac{28 - 14\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{\frac{7}{3\sqrt{3}}}{\frac{7}{3\sqrt{3}}} = \frac{7 - 7}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{15}$$

$$\delta = \frac{AD}{AH}$$

$$\Delta H^2 + CH^2 = AB^2 + 16$$

$$\frac{AB}{CH} = \frac{12}{AH^2} \quad AH^2 = \frac{12CH}{AB}$$

$$\frac{12CH}{AB} + CH^2 = AB^2 + 16$$

$$\begin{cases} |2x+1+y| + |4-2x-y| > 4 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 5 \end{cases} \quad \begin{cases} |4-2x-y| > 4 - (2x+1+y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} |4-2x-y| > 4-2x-y \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 5 \end{cases}$$

$$4-2x-y > 4-2(x)-|y|$$

$$2|x|-x +$$

$$2x+y-4 > 4-2|x|-|y|$$

$$2(|x|+x) + (y)+y > 8$$

~~$$4-2x-y > 0$$~~

$$4-2x-y < 0$$



Handwritten scribbles.

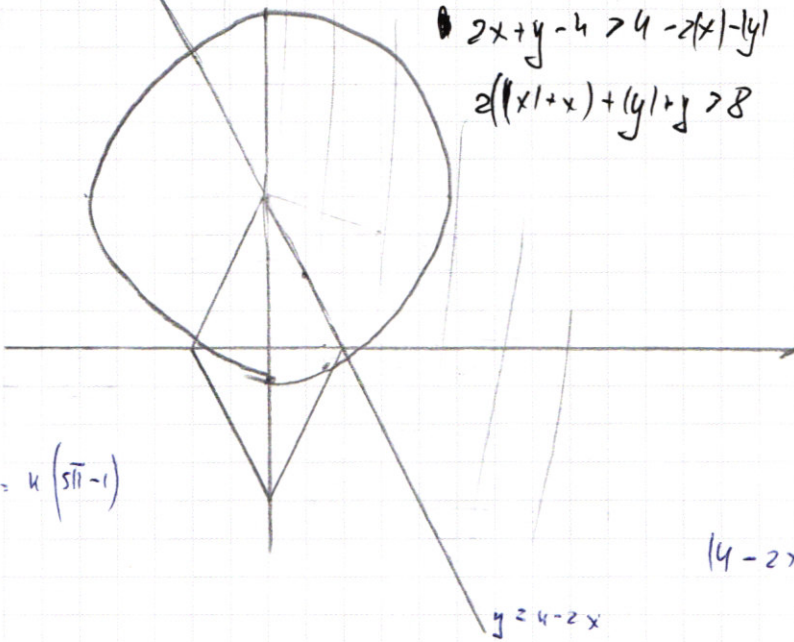
$$x = -1 \quad y = 7$$

$$(4+2-7) = 2$$

Handwritten scribbles.

4

$$4\pi R^2 = 4(5\pi - 1)$$



$$|4-2x-y| \leq 4$$

$$|4-2x-y| > 4-2x-y$$

$$4 = 2x+y$$

$$y = 4-2x$$

$$4-2x-y > 0$$

$$4-2x > y$$

$$x-2y = \sqrt{xy}$$

$$x^2 + 4y^2 - 5xy = 0$$

$$\frac{D}{4} = 4y^2 + 3y > 3y$$

$$x = \frac{-2y \pm \sqrt{4y^2 + 3y}}{2}$$

$$D = 25y^2 - 16y^2 = 9y^2$$

$$x = \frac{5y \pm 3y}{2} \quad x_1 = 4y \quad x_2 = y$$

$$4-2x-y > 4-2(x)-|y|$$

$$2(|x|-x) + (y)-y > 0$$