

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy}, \\ 2y + x^2 = 9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках S и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.
5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{29}$, $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45^\circ$.
6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6, \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leq x \leq 19$, $3 \leq y \leq 19$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$n1 \quad \frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3|} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 5 - 4|x-1| = 0 & (1) \\ 4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3| \neq 0 & (1) \\ x^2 - 2x + 5 - 4|x-1| > 0 & (2) \\ 4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3| < 0 & (2) \\ x^2 - 2x + 5 - 4|x-1| < 0 & (3) \\ 4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3| > 0 & (3) \end{cases}$$

а) Подготовка к работе

$$x^2 - 2x + 5 - 4|x-1| = (x-1)^2 + 4 - 4|x-1| = |x-1|^2 - 4|x-1| + 4$$

$$4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3| = 4 \cdot (x \cdot (x-3)) + |x| \cdot |x-3|$$

$$(1) : |x-1|^2 - 4|x-1| + 4 = 0$$

$$D=0 \rightarrow |x-1|=2 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

$$4(x \cdot (x-3)) + |x| \cdot |x-3| \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ x=3 \\ x \neq 0 \\ x \neq 3 \end{cases} \Rightarrow x = -1$$

$$(3) \neq > 0; D=0 \Rightarrow |x-1|^2 - 4|x-1| + 4 \geq 0 \Rightarrow \text{в (3) нет решений}$$

$$(2) |x-1|^2 - 4|x-1| + 4 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

$$4(x \cdot (x-3)) + |x| \cdot |x-3| \quad \sim 0 \sim 3 \sim$$

а) $x \leq 0 \Rightarrow x$

$$\left. \begin{aligned} 4(x \cdot (x-3)) + -x \cdot -(x-3) &= 4(x \cdot (x-3)) + x \cdot (x-3) = 5(x \cdot (x-3)) \\ x \cdot (x-3) &\geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{выр.} \geq 0 \text{ не подх.}$$

б) $0 < x < 3$

$$\left. \begin{aligned} 4(x \cdot (x-3)) + x \cdot (-x+3) &= 3(x \cdot (x-3)) \\ x(x-3) &< 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{выр.} < 0 \text{ подходит}$$

в) $x \geq 3$

$$\left. \begin{aligned} 4(x \cdot (x-3)) + x \cdot (x-3) &= 5(x \cdot (x-3)) \\ x \cdot (x-3) &\geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{выр.} \geq 0 \\ \text{не подходит}$$

Значит $4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3| < 0$ при $0 < x < 3$

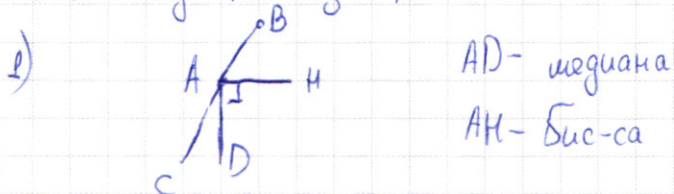
$$\begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 3 \\ 0 < x < 3 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 3$$

Значит у нас $\begin{cases} x = -1 \\ \emptyset \\ 0 < x < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \emptyset \\ 0 < x < 3 \end{cases}$

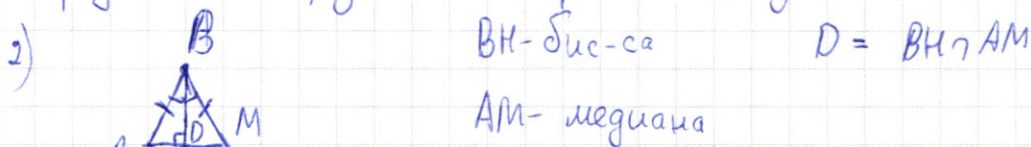
Ответ: $\{-1\} \cup (0; 3)$

н 2

~~Нарису~~ Есть 2 случая: медиана из т. А \perp бис-се из т. А
или медиана из т. А \perp бис-се из другой вершины



Т.к медиана всегда внутри треугольника, то угол $\angle CAD > 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle CAH > 90$, а $\angle CAB = 2\angle CAH \Rightarrow \angle CAB > 180^\circ$, что невозможно в
 треугольнике, значит 1 вариант невозможен.



$$\angle ABD = \angle DBM; \quad BD \perp AM; \quad BD - \text{общая} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle BDM, \text{ значит } AB = BM = \frac{1}{2} BC$$

Т.к $P = 300$, то $AC = 300 - 3AB$

$$\text{Но } AB > |AC - BC| \Rightarrow AB > |300 - 3AB - 2AB| \Rightarrow AB > |300 - 5AB|$$

$$\left. \begin{aligned} \text{При } AB > 60 \Rightarrow AB > 5AB - 300 \Rightarrow AB < 75 \\ \text{При } AB \leq 60 \Rightarrow AB > 300 - 5AB \Rightarrow AB > 50 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 50 < AB < 75$$

Значит $100 < BC < 150$

Значит $150 > AC > 75$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Т.к АВ - целое число, то кол-во вариантов АВ - 23, значит есть всего 23

Таких треугольника

Ответ: 23

№7

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

Предлагаю узнать $f(x)$, для всех чисел от 1 до 19

$$f(2) = 2; f(1) = 0; f(3) = 3; f(5) = 5; f(7) = 7; f(11) = 11; f(13) = 13;$$

$$f(2) = f(2) + f(1) = 2 + f(1) = 2 \Rightarrow f(1) = 0$$

$$f(17) = 17; f(19) = 19, \text{ где } p \text{ — простые } p: f(p) = p$$

Значит у нас есть такие $f(x)$

$$f(1) = 0 \quad f(6) = f(2) + f(3) = 5 \quad f(11) = 11 \quad f(16) = f(4) + f(4) = 8$$

$$f(2) = 2 \quad f(7) = 7 \quad f(12) = f(2) + f(6) = 7 \quad f(17) = 17$$

$$f(3) = 3 \quad f(8) = f(4) + f(2) = 6 \quad f(13) = 13 \quad f(18) = f(3) + f(6) = 9$$

$$f(4) = f(2) + f(2) = 4 \quad f(9) = f(3) + f(3) = 6 \quad f(14) = f(7) + f(2) = 9 \quad f(19) = 19$$

$$f(5) = 5 \quad f(10) = f(2) + f(5) = 7 \quad f(15) = f(3) + f(5) = 8$$

Теперь, используя $f(1)$ и эти $f(x)$ найдем $f\left(\frac{1}{x}\right)$:

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = f(1) = f(3) + f\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = f(1) - f(3) = -f(3)$$

Значит

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -2; f\left(\frac{1}{4}\right) = -4; f\left(\frac{1}{5}\right) = -5; f\left(\frac{1}{6}\right) = -6; f\left(\frac{1}{7}\right) = -7; f\left(\frac{1}{8}\right) = -8$$

$$f\left(\frac{1}{9}\right) = -9; f\left(\frac{1}{10}\right) = -10; f\left(\frac{1}{11}\right) = -11; f\left(\frac{1}{12}\right) = -12; f\left(\frac{1}{13}\right) = -13; f\left(\frac{1}{14}\right) = -14$$

$$f\left(\frac{1}{15}\right) = -15; f\left(\frac{1}{16}\right) = -16; f\left(\frac{1}{17}\right) = -17; f\left(\frac{1}{18}\right) = -18; f\left(\frac{1}{19}\right) = -19$$

Теперь мы знаем все возможные $f(x)$ и $f\left(\frac{1}{y}\right)$ т.к x и $y \in \mathbb{N}$

А значит можем узнать кол-во необходимых пар: где $f(y) > f(x)$
 Для $f(3) - 8$ чисел; $f(4) - 15$ чисел; $f(5) - 13$ чисел; $f(6) - 13$ чисел
 $f(7) - 8$ чисел; $f(8), f(9) - по 11$ чисел; $f(10) - 8$ чисел; $f(11) - 3$ числа
 $f(12) - 8$ чисел; $f(13) - 2$ чисел; $f(14) - 4$ чисел; $f(15) - 5$ чисел; $f(16) - 5$ чисел; $f(17) - 1$ число
 $f(18) - 5$ чисел; $f(19) - 0$ чисел

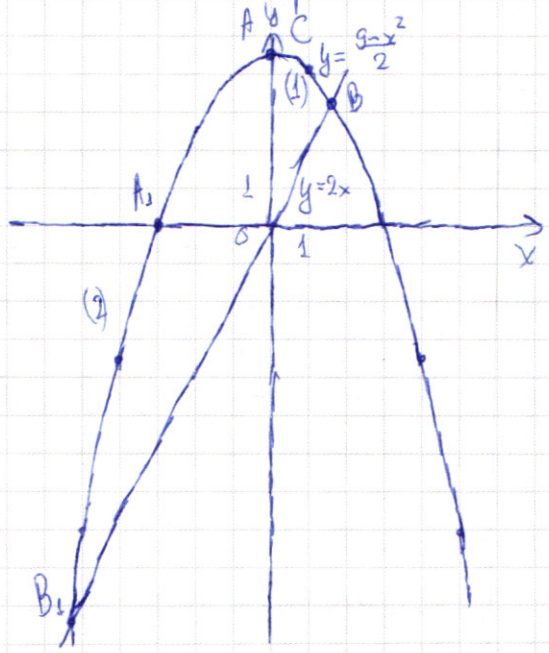
Всего - $16 + 16 + 26 + 30 + 11 + 19 + 10 = 128$ комб.

Ответ: 128

N 3

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

- 1) x или $y \neq 0$ т.к. тогда $y - 2x = 0 \Rightarrow y$ и $x = 0$, но $0, 0$ не реш. $2y + x^2 = 9$
- 2) x и y должны быть одного знака, $y \geq 2x \Rightarrow y - 2x \geq 0 \Rightarrow 2x \leq y$
- 3) $2y + x^2 = 9 \Rightarrow y = \frac{9 - x^2}{2}$, это парабола



Значит ответы находятся в областях (1) и (2) (AB и AB_1)

- (1) В 1 подходит $\text{т.с. } (1; 4)$, иначе выше нее \sqrt{xy} слишком мал
 ниже ее \sqrt{xy} больше $y - 2x$
- (2) Просматривая точки и сверяя близость $y - 2x$ и \sqrt{xy} , можно заметить, что при $y = 4$ эти значения почти совпадают ($\sqrt{17} - 2$ и $\sqrt{\sqrt{17}}$)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Значит $y = -4 \Rightarrow$ пусть ответ - $-4, \sqrt{-517}; -4$

ответ: $(1; 4)$ ~~$(-4; \sqrt{-517})$~~ ; $(-\sqrt{517}; -4)$

нб

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0 \\ |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x - 3y + y^2 = (x-1)^2 + (y-1,5)^2 - 3,25 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1,5)^2 \leq 3,25$$

График - \odot круг с центром $B(1; 1,5)$ и радиусом $\sqrt{3,25} \approx 1,8$

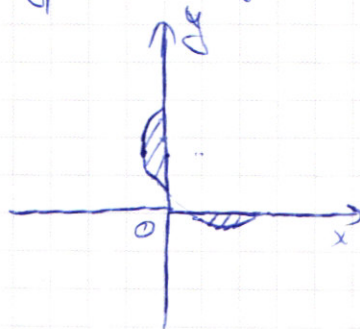
$$|3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6$$

$$|3x| + |2y| > 6 - |6 - 3x - 2y|$$

Если x и $y \geq 0$, то $|3x| + |2y| = 3x + 2y \Rightarrow |3x| + |2y| = 6 - |6 - 3x - 2y|$

Значит надо, чтобы или x , или y были < 0

Значит наша фигура выглядит так



N4

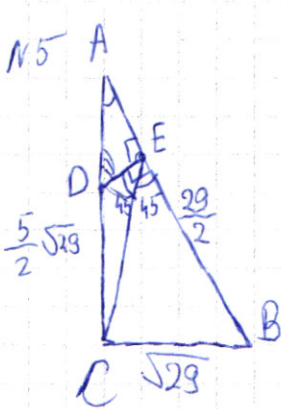
$$AB \cdot CH = CB \cdot CH$$

т.к. AB и CB - кас

$$S_{BDA} = 15 \Rightarrow AB \cdot DH = 30$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$29 + \frac{25 \cdot 29}{4} =$$

$$\frac{841}{4}$$

$$\frac{\sqrt{841}}{2}$$

$$\frac{29}{2}$$

$$2 \frac{\sqrt{29}}{29} = \frac{\sqrt{29}}{29}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ 29 \\ \hline +225 \\ \hline 50 \\ 725 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 29-4 \\ 29 \\ \hline 4 \\ \hline 116 \end{array}$$



$\triangle ADE \sim \triangle ACB \quad k=x$

$$\sqrt{3,25}$$

225

256

289

324



$$AB = CH = ?$$

$$\frac{1}{\cos BCH}$$

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3|} \leq 0$$

$$\frac{(x-1)^2 + 4 - 4|x-1|}{4(x^2 - 3|x| + |x| \cdot |x-3|)} \leq 0$$

$a = b/2$ $x \geq 1$
 $y = 4$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

$$y = \frac{9-x^2}{2}$$

$y - 2x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$

$y \leq 4,5$

$$\begin{cases} x > 0 & y > 0 \\ x < 0 & y < 0 \\ x = 0 & y < 0 \\ y = 0 & \end{cases}$$

$xy = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$$\frac{9-x^2}{2} - 2x = \sqrt{x} \cdot \frac{9-x^2}{2}$$

$$9-x^2 - 4x = \sqrt{x} \cdot 2x^2$$

$$-(x+2)^2 + 13 = \sqrt{x} \cdot 2x^2 = \sqrt{x} \cdot (9-x^2)$$

$(x+2)^2 \leq 13 \Rightarrow x \leq \sqrt{13} - 2$

$y < 0 \Rightarrow x < 0$

$|2x| \geq |y|$

$x^2 + 4x - 9 = 0$
 $D = 16 + 36 = 52$
 $\frac{D}{4} = 4 + 9 = 13$
 $\frac{-2 \pm \sqrt{52}}{2}$
 $\frac{\sqrt{13} - 2}{2}$
 $\frac{-2 - \sqrt{13}}{2}$

$6 \ 0$
 $3,5 \ 8$
 $8 \ 10$
 $13,5 \ 12$
 -5

$8,5 \ 16$
 $8 \ 20$
 $13,5 \ 24$
 $20 \ 28$
 $27,5 \ 32$
 $4 \cdot 3,5$
 $\sqrt{14}$
 -5
 -8
 $\sqrt{110}$

$2 = \sqrt{\quad}$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x| - |x-3|} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 5 - 4|x-1| < 0 & (1) \quad \emptyset \\ 4x^2 - 12x + |x| - |x-3| > 0 & (2) \\ x > 0 & (2) \\ \dots < 0 & (2) \\ x^2 - 2x + 5 - 4|x-1| = 0 & (3) \\ \dots \neq 0 & (3) \end{cases}$$

n1 ✓
n2 ✓
n3 ✓
n2


(3) $x^2 - 2x + 5 - 4|x-1| = 0$

$x^2 - 2x + 1 - 4 - 4|x-1| = 0$

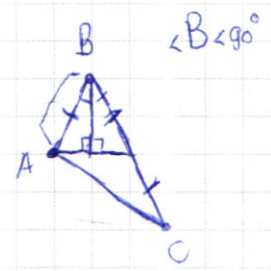
$|x-1| = y = 2 \Rightarrow \begin{matrix} x = -1 \checkmark \\ x = 3 \times \end{matrix}$

$|x-1|^2 - 4|x-1| + 4 = 0$

$y^2 - 4y + 4 \geq 0$



$4 + 12 + 4$
 $36 - 36 + 0 = 0$



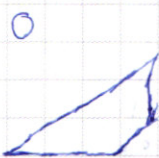
$300 - 3AB$

$\begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 3 \end{cases}$

$2 = -3 + |2| - |1-3|$

$AB > |2AB - 300 - 3AB|$

$4(|x-1| - |x-3|) + |x| - |x-3|$



$AB > |5AB - 300|$

$4 \cdot (x - (x-3)) + |x| - |x-3| > 0$

$AB > 5AB - 300$

$4AB < 300$

$50 < AB < 75$

$4 \cdot (x - (x-3)) + |x| - |x-3| > 0$

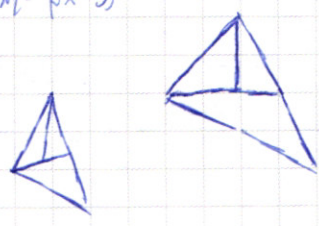
$x = -1$
 $0 < x < 2$
 $2 < x < 3$
 $0 < x < 3$

$6AB > 0$

$100 < BC < 150$

$150 \leq AC < 75$

$4 \cdot (x - (x-3)) + |x| - |x-3| > 0$



120

180

60 120



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$Q \rightarrow \sqrt{13} - 2$
 $-3 \rightarrow -2 - \sqrt{13}$

$x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0$
 $(x-1)^2 + (y-1.5)^2 \leq 0.835$

$3x+2y > 0$
 $x \text{ или } y < 0$

$3x+2y < 6$, то нет

$(3x+2y) \rightarrow 6 - (6-3x-2y)$
 17569
 $4,13 \times 4,13$

$3x+2y > 0$
 $-3x-2y < 6 \Rightarrow 6-3x-2y < 6 \Rightarrow \sqrt{4,23}$

$3x+2y < 6$
 $-3x-2y > 0 \Rightarrow \sqrt{3}$
 $\sqrt{17} \approx 4,123$

$\frac{1}{2}x$

$4x^2 = x^2 + n^2$
 $n^2 = 3x^2 = 7$
 $n = \sqrt{3}x$

$2,23 \sqrt{4,13} \approx$
 $2,1 \times 2,1$

$n^2 = 3x^2 = 7$
 $n = \sqrt{3}x$

$x < 1$

9
 3
 36
 ≈ 25
 ≈ 25
 ≈ 25

$23 \times 23 =$
 $4-2$
 $2\sqrt{17} - 4 = ? \sqrt{4\sqrt{17}}$
 $\sqrt{17} - 2 = ? \sqrt{\sqrt{17} \cdot 90759}$

$9x - x^3$
 $2 \sqrt{4\sqrt{17}}$
 $2\sqrt{\sqrt{17}}$
 $y = -4$
 $9 - x^2 = -8$
 $x^2 = 17$
 $x = \sqrt{17}$

$2(\sqrt{17} - 2)$
 $4 - 2\sqrt{17}$
 $2(2 - \sqrt{17})$

$$f(8) = 6 \quad f(9) = 6 \quad f(10) = 6$$

$$f(12) = 7 \quad f(16) = 8 \quad f(18) = 8$$

$$\begin{array}{c}
 \rightarrow \quad 32 \qquad \qquad 56 \qquad \qquad 19 \\
 \underbrace{16+15+1} + \underbrace{13+13+8} + \underbrace{11+11} + \underbrace{8+3+8} + \\
 \underbrace{2+4+5+5+0+5} \\
 21 \\
 96 + 32 = 128
 \end{array}$$

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

$$f(p) = p \quad (p - \text{простое})$$

$$3 \leq x \leq 19 \quad 3 \leq y \leq 19$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$f(2) = 2 \quad f(3) = 3 \quad f(5) = 5 \quad f(7) = 7 \quad f(11) = 11 \quad f(13) = 13 \quad f(17) = 17 \quad f(19) = 19$$

$$f(4) = 0 \quad f(6) = 5 \quad f(10) = 7 \quad f(14) = 9 \quad f(22) = 13 \dots$$

$$16 + 16 = 32 + 26 = 58 +$$

$$30 = 8 + 8 + 11 = 9 + 10 = 10 + 9 + 19 = 128$$

$$f(1) = f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = -2$$

$$f\left(\frac{1}{5}\right) =$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) =$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) =$$

$$f\left(\frac{1}{5}\right) =$$

$$f\left(\frac{1}{6}\right) =$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)