

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x - 3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x - 2|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy}, \\ x + y^2 = 5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.
5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{7}$, $BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30^\circ$.
6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4, \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 18$, $1 \leq y \leq 18$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} & \text{N 1.} \\ & \frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x-3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x-2|} \leq 0 \\ & \frac{(x-3)^2 + 1 - 2|x-3|}{2x(x-2) + |x| \cdot |x-2|} \leq 0 \\ & \frac{(|x-3| - 1)^2}{2x(x-2) + |x| \cdot |x-2|} \leq 0 \end{aligned}$$

Заметим, что если ~~знаменатель~~ ^{числитель} обращается в 0, а знаменатель дроби ~~на~~ не равен 0, то вся дробь обращается в 0. Тогда, если $(|x-3|-1)^2 = 0$ и $2x(x-2) + |x| \cdot |x-2| \neq 0$, то дробь становится равной нулю, и неравенство выполняется. Это возможно при $x=4$ или 2 при $x=2$, но при $x=2$ знаменатель становится равен нулю $\Rightarrow x=2$ не подходит. ^{и не является решением неравенства} Таким образом, сведем решение неравенства к решению неравенства $2x(x-2) + |x| \cdot |x-2| < 0$ (случай, если дробь равна нулю уже рассмотрен, а $(|x-3|-1)^2$ всегда больше или равен 0). ^{Заметим, что x и $|x-2|$ имеют одинаковый знак}

$\Rightarrow 1) x \in (-\infty; 2)$. Тогда ^{иногда не проверять}

$$3x \cdot 2x(x-2) - x \cdot (2-x) < 0$$

$$3x(x-2) < 0$$

но ^{кроме случаев от $(-\infty; 0)$ решений} $3x(x-2) < 0$ ^{с знаменателем обращается в 0}

нет. Заметим, что ^и

Заметим, что при $x=0$ значение такое, что $x \neq 0$ \checkmark

№1. Произведение

2) $x \in (0; 2)$. Тогда

$$\cancel{x(2-x)} \geq x(x-2) + x(2-x) \stackrel{<}{\neq} 0$$

$$x(x-2) \stackrel{<}{\neq} 0$$

И согласно методу интервалов $x \in (0; 2)$.

Таким образом, все ~~такие~~ $x \in (0; 2)$ являются решениями неравенства

3) $x \in (2; +\infty)$:

$$2x(x-2) + x(x-2) \stackrel{<}{\neq} 0$$

$$3x(x-2) < 0, \text{ невозможно}$$

по этому неравенству.

Таким образом, $x \in (0; 2) \cup \{4\}$

Ответ: $x \in (0; 2) \cup \{4\}$.

№3.

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} & (1) \\ x + y^2 = 5 & (2) \end{cases}$$

Из (1) выразим x через y

$$x - 2y = \sqrt{xy}$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$$

$$D = 25y^2 - 16y^2 = 9y^2$$

$$x_1 = \frac{5+3y}{2} = 4y; \quad x_2 = y$$

Подставим полученный x в (2):

1) $x_1 = 4y$.

$$4y + y^2 = 5$$

$$y^2 + 4y - 5 = 0$$

$$x_1 = 4 \quad y_1 = 1$$

2) $x_2 = y$.

$$y^2 + y = 5$$

$$y^2 + y - 5 = 0$$

$$x_3 = y_3 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}$$

$x_2 = -20$ и $y_2 = -5$ не подходят,
п.к. $-20 + 10 < 0$.

x_3 и y_3 $x_4 = y_4 = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}$
не подходят, п.к. $x_4^2 < 2y_4$

Ответ: $(4; 1); (\frac{-1 - \sqrt{21}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{21}}{2})$

Заметим, что в

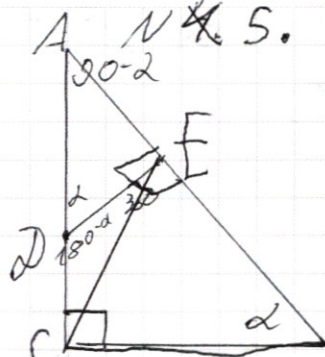
$$\begin{cases} x - 2y > 0 \\ xy > 0 \end{cases}$$

Отсюда $xy > 0$
и $x > 2y$. По-
тому при выделении
этого неравенства
случаев
нет

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Должно:
 $DE \perp AB$
 $AC = \sqrt{4}$
 $BC = 2\sqrt{\frac{4}{3}}$
 $\angle CED = 30^\circ$

$\frac{AD}{AC} = ?$
 $\angle CED = ?$
 S_{AED}



$\sin(180-d) = \sin d$
 1) Пусть $\angle ABC = d$.
 Тогда $\angle BAC = 90-d$, а
 $\angle AED = 180-d \Rightarrow \angle EDC = d$
 $\angle AEC = 90 + 30 = 120^\circ$

2) По теореме Пифагора:

$$AB^2 = 4 + 4 \cdot \frac{4}{3} = \frac{49}{3} \Rightarrow AB = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

3) Площадь треугольника ABC

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot 2}{2} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

4) Площадь $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin d = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin(90-d)$

$$AF \Rightarrow \frac{2\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot \sin d}{2} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\sin d = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{\sqrt{4} \cdot \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot \sin(90-d)}{2} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\sin^2(90-d) = \frac{2}{\sqrt{4}}$$

4) По теореме синусов из $\triangle ABC$:

$$\frac{AC}{\sin 120^\circ} = \frac{EC}{\sin(90-d)} \Rightarrow EC = 2 \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{4}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

5) По теореме синусов из $\triangle CDE$:

$$\frac{DC}{\sin(180-d)} = \frac{EC}{\sin(90-d)} \Rightarrow DC = \frac{2\sqrt{4}}{3}$$

Отношение $\frac{DC}{AC} = \frac{\frac{2\sqrt{4}}{3}}{\sqrt{4}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$

$\triangle ADE$ подобен $\triangle ABC$ (по двум углам) $\Rightarrow S_{AED} = \left(\frac{AD}{AC}\right)^2 \cdot S_{ABC} = \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$

Ответ: $AD:AC = 1:3$; $S_{AED} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Чистовик

$$\begin{cases} (2x+|y|) + |4-2x-y| > 4 \quad (1) \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0 \quad (2) \end{cases}$$

(2): $(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 5$

(1): $(2x+|y|) + |4-2x-y| > 4$

1a. $x > 0; y > 0; 2x+y < 4; y > 4-2x$

$2x+y+4-2x-y > 4$

$4 > 4$, неверно

$x < 0, y < 0$

2a. $x > 0; y < 0; 2x+y > 4$

$2x+y+2x+y-4 > 4$

$4x+2y > 8$

$-2x+y+2x+y-4 > 4$

$4y > 8$

$\begin{cases} y > 4-2x \\ x < -\frac{1}{2}y \\ x > 2 \\ y > 4 \end{cases}$

$2y > 8-4x$

$-2y > 8$

3a. $x < 0; y < 0; 2x+y > 4$

$-2x+y+2x+y-4 > 4$

$y > 4$

4a. $x < 0, y < 0; 2x+y < 4$

$-2x-y-2x$

$-4x-2y > 0$

$x > 0, y < 0, 2x+y > 4$

$2x-y+2x+y-4 > 4$

$x < -\frac{1}{2}y$

$4x > 8$

$-2x > y$

5a. $x < 0, y < 0, 2x+y > 4$

$-2x-y$

верно

6a. $x < 0, y > 0, 2x+y < 4$

$-2y-4x > 8$

чистовик

Круга отоклана

прямая $y = 4 - 2x$;

$y = -2x$; $y = 4$; $y = -4$;

$x = 2$; $x' = 2$

№ 6. Прозрачные

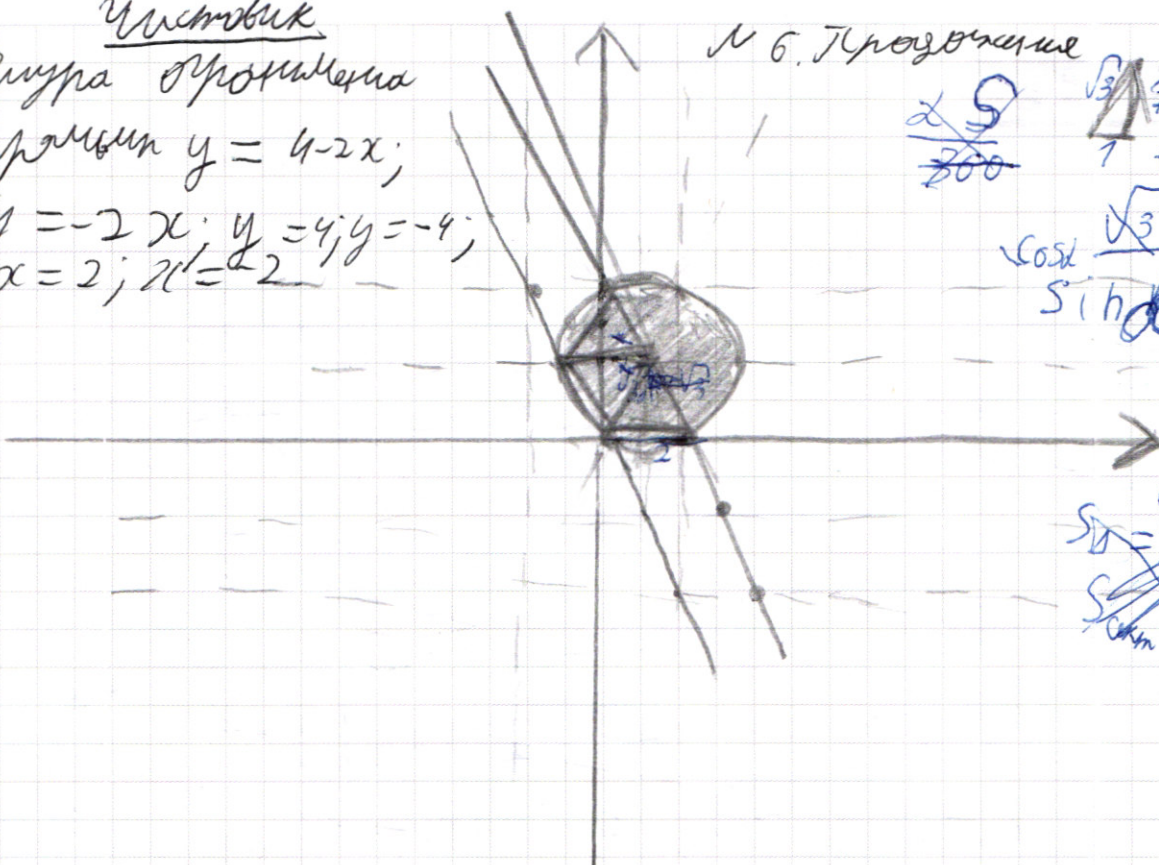
~~2 9~~
~~300~~

~~$\sqrt{3}$~~ ~~2~~

~~7~~ $\tan \alpha = 2$

~~$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$~~
 ~~$\sin \alpha = \frac{1}{2}$~~

~~$\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$~~
 ~~$\frac{2\sqrt{3}}{3}$~~



~~$S_D = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2}$~~
 ~~$S_{\text{сум}} = \dots$~~

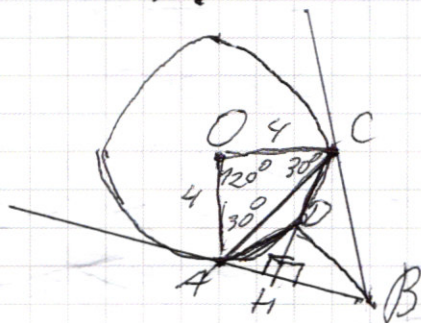
Многочисленные функции следствиям Мура & Мерсона

2, 5π.

Ответ: сумма = 2, 5π.

№ 4.

Дано:
R = 4
S_{ABO} = 6
CH ⊥ AB
—————
 $\frac{AB}{CH} = ?$



1) По теореме синусов

синусов из ΔAOC:

~~LOE~~

$$\frac{AO}{\sin \angle ACO} = 2R$$

$$\frac{4}{\sin \angle ACO} = 8$$

$$\sin \angle ACO = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle ACO = 30^\circ$$

2) $\angle BAO = \frac{120}{2} = 60^\circ$

(считаем дугу, на которую опирается угол). Аналогично

$\angle ACB = 60^\circ$. Отсюда

ΔABC — равносторонний.

AB = a

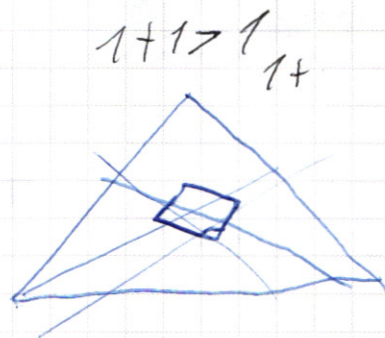
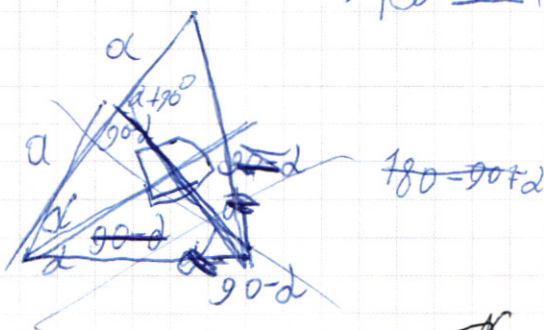
Тогда $\frac{CH}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $\sqrt{3} : 2$.

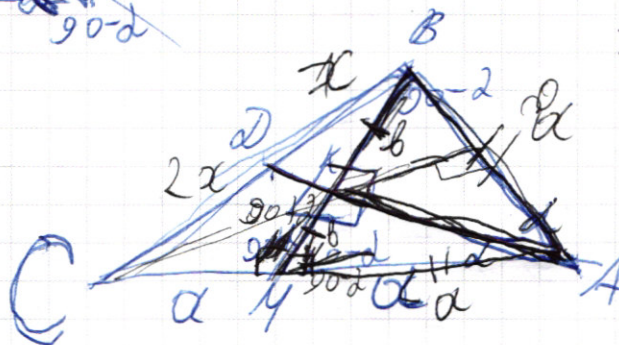
N 2.

$p = 600$

$AD \perp BM$



$3a + 3x = 300$



$\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{AB}$

$\frac{CD}{DB} = \frac{BK}{AB}$

$\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BD}$

$\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB}$

Тут там $\frac{CD}{BD} = \frac{1}{2}$
 $a, 2a$ и $3x$ - углы

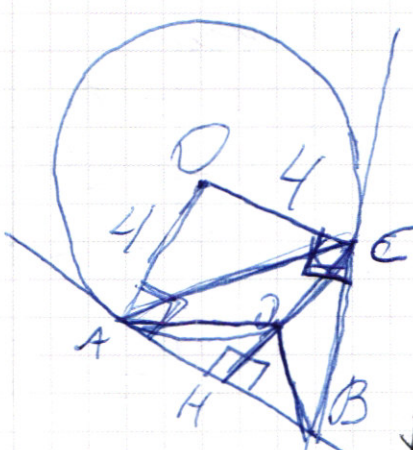
$3 \cdot 2a + 3x = a (MB = AMB)$

$3x + a = 2a$
 $3x = a$
 $a = x$

$3(a + x) = 600$
 $a + x = 200$

N 4

$\frac{AB}{CH}$
 $S_{ABD} = 6$
 $R = 4$



$AB = BC$

$\frac{AB \cdot CH}{2} = S_{ABC}$

$AB \cdot CH = 12$

$AB = 12$

$h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{3}$

$S = a^2 \sin d = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3.

$x \neq 0$ $x = y$
 $x > 2x$ $xy > 0$
 $x - 2y > 0$ $x > 2y$

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} & (1) \\ x + y^2 = 5 & (2) \end{cases}$$

$$y^2 + 2(x - y) = 5 + \sqrt{xy}$$

~~Умножим (1) на (2):~~

~~$$(x - 2y)(x + y^2) = 5\sqrt{xy}$$~~

$$x = 5 - y^2$$
~~$$x = 5 - 2y^2$$~~
~~$$x = 5 + \frac{20 - 2\sqrt{21}}{4} = \frac{10 - \sqrt{21}}{2}$$~~
~~$$t = 5 - y^2$$~~
~~$$y = 0$$~~

~~$$x^2 - 2xy - 2y^2 - 2y^3$$~~

~~$$5 - y^2 - 2y = \sqrt{xy} \sqrt{(5 - y^2)y}$$~~

~~$$t - 20t = \sqrt{t \cdot 0}$$~~

~~$$t^2 - 40t + 40^2 = 0t$$~~
~~$$t^2 - 50t + 40^2 = 0$$~~
~~$$D = 2500 - 1600 = 900$$~~
~~$$t_{1,2} = \frac{50 \pm 30}{2} = 10; 20$$~~

~~$$D = 25a^2 - 16a^2 = 9a^2$$~~

~~$$t_{1,2} = \frac{50 \pm 30}{2} = 10; 20$$~~

~~Сделаем обратную подстановку:~~

~~$$1) t_1 = -20$$

$$5 - y^2 = -2y$$

$$y^2 - 2y - 5 = 0$$

$$D = 4 + 20 = 24$$~~

~~$$1) t_1 = 0$$

$$5 - y^2 = y$$

$$y^2 + y - 5 = 0$$

$$D = 1 + 20 = 21$$~~

~~$$y_1 = \frac{2 \pm \sqrt{24}}{2}$$

$$x = 5 - \left(\frac{\sqrt{21} - 1}{2}\right)^2$$

$$x = 5 - \frac{21 + 1 - 2\sqrt{21}}{4} = \frac{4 - 20 - 2\sqrt{21}}{4} = \frac{-16 - 2\sqrt{21}}{4} = \frac{-4 - \sqrt{21}}{2}$$~~

~~$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}$$

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}$$

$$y_2 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}$$

$$y_2 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}$$~~

~~$$2) x = 4y$$

$$y^2 + 4y - 5 = 0$$

$$D = 16 + 20 = 36$$

$$y_3 = \frac{-4 + 6}{2} = 1$$

$$y_4 = \frac{-4 - 6}{2} = -5$$

$$x_3 = 4$$

$$x_4 = -20$$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1.

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x-3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x-2|} \leq 0$$

$$\frac{x(x-6) + 10 - 2|x-3|}{2x(x-2) + |x| \cdot |x-2|} \leq 0$$

~~$$x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 3}{2} = 1, 4$$~~

~~$$x^2 - 6x + 10 = 0$$

$$D = 36 - 40 = -4$$

$$x^2 = |x|^2$$~~

~~$$x \neq 2$$~~

1) ~~$x=2$~~

$$\frac{(x-3)^2 - 2|x-3| + 1}{(2x(x-2)) \cdot (3x)} \leq 0$$

$$\frac{(|x-3| + 1)^2}{3x(x-2)} \leq 0$$

~~$$x = 5 - y^2$$

$$x = 5 + \frac{1 + 21 - 2\sqrt{7}}{2} = 16$$~~

$\Rightarrow (|x-3| + 1)^2$ всегда больше 0 \Rightarrow

не влияет на знак неравенства, т.е. не влияет на знак неравенства

$$3x(x-2) \leq 0$$

на этом промежутке $[2; +\infty)$ решение нет.

2) $x \in [0; 2]$

~~$$2x(x-2) + x \cdot (2-x)$$~~

$$(x-2)(x-x) \leq 0$$

$$(x-2)x \leq 0$$

$$x \in [0; 2]$$

следоват. подходят все точки на этом промежутке

$$3) x \in (-\infty; -\infty) \cup (-\infty; 0)$$

$$2x(x-2) - x \cdot (-x+2) \leq 0$$

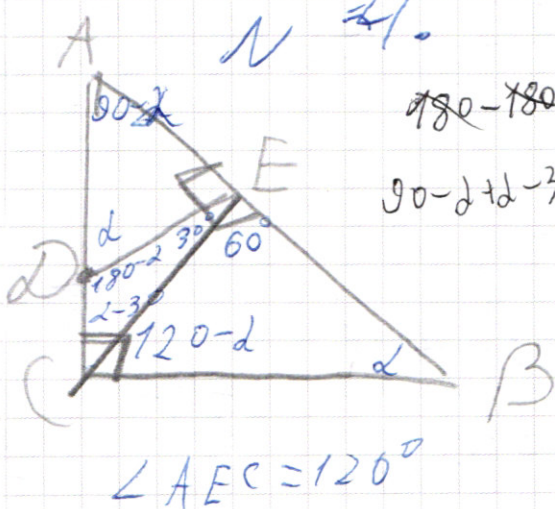
$$2x(x-2) + x(x-2) \leq 0$$

$$3x(x-2) \leq 0$$

Решения на 7-модуль геометрии.

Ответ: $x \in [0; 2]$.

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{4} \\ BC &= 2\sqrt{\frac{4}{3}} \\ \angle CED &= 30^\circ \\ \frac{AD}{AC} &= \dots \\ S_{AED} &= \dots \end{aligned}$$



$$\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \sin(90^\circ)}{2}$$

$$\begin{aligned} 180 - 180 + d - 30 \\ 90 - d + d - 30 = 60 \end{aligned}$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB^2 = 4 + 4 \cdot \frac{4}{3} =$$

$$= \frac{21 + 28}{3} = \frac{49}{3}$$

$$AB = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} 180 - 30 + d - 180 + d \\ = d - 30 \end{aligned}$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{21}}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{14}{\sqrt{3}} \cdot 2\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sin \alpha$$

$$\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4}} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{\sqrt{4}}{2\sqrt{4}} \cdot \frac{1}{\sin 120^\circ} = \frac{EC}{2}$$

$$\frac{2C}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} DC &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} \\ \sin 120^\circ &= \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2} EC &= 2 \\ EC &= \frac{4}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$S_{AED} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{24}$$

$$\frac{\sqrt{4}}{2\sqrt{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$DC = \frac{2\sqrt{4}}{3}$$

$$\frac{\frac{4}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{2}} = \frac{DC}{\sin 30^\circ} \Rightarrow DC = \frac{2}{3} AC$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = DC \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} =$$

$$\frac{\sqrt{4} \cdot 3}{2\sqrt{4}} \cdot \frac{4}{DC} = \frac{\sqrt{4}}{2} \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow DC = \frac{2}{3} AC$$