МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

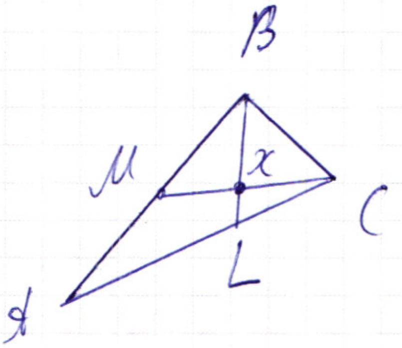
4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y| > 6, \\ x^2-2x-3y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 19$, $3 \leqslant y \leqslant 19$ и $f(x/y) < 0$.



№2

Дано: $\triangle ABC$

$\angle ABL = \angle LBC$

$AM = MB$

$CM \perp BL$

$P_{ABC} = 300$

$\begin{cases} AB \in \mathbb{N} \\ BC \in \mathbb{N} \\ AC \in \mathbb{N} \end{cases}$

кол-во $\triangle ABC$

Решение:

1) Раз $BL \perp MC$ и $\angle ABL = \angle LBC$, то в $\triangle MBC$: BX – биссектриса и высота $\Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle MBC$ – р/б $\triangle \Rightarrow BC = MB$.

2) Из 1): $BC = MB \Rightarrow AB = 2BC$

3) Пусть $BC = x$, тогда по т. косинусов:

$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2 \cdot BC \cdot AB \cdot \cos\angle ABC$,

выразив через x:

$AC^2 = x^2 + 4x^2 - 2 \cdot x \cdot 2x \cdot \cos\angle ABC$

$AC^2 = 5x^2 - 4x^2 \cos\angle ABC$

$AC^2 = x^2 (5 - 4\cos\angle ABC)$

4) Раз $AC \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{N}$, то $5 - 4\cos\angle ABC$ должно быть квадратом целого числа.

5) Раз функция cos имеет область значений ~~от -1 до 1~~ $[-1; 1]$, то $5 - 4\cos\angle ABC$ имеет область значений $[1; 9]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6) Из 4) и 5): $\left[\begin{array}{l} 5-4\cos\angle ABC = 1 \\ 5-4\cos\angle ABC = 4 \\ 5-4\cos\angle ABC = 9 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\angle ABC = 1 \\ \cos\angle ABC = 0{,}25 \\ \cos\angle ABC = -1 \end{array}\right. \not\Rightarrow$

$\not\Rightarrow$

Если $\cos\angle ABC = 1$, то $\angle ABC = 0°$ - ~~невозм~~ невозможно.

Если $\cos\angle ABC = -1$, то $\angle ABC = 180°$ - невозможно.

Остается один вариант: $\cos\angle ABC = 0{,}25$ - верный (возможный) вариант.

Тогда $AC^2 = x^2 \cdot 4 \Rightarrow AC = 2x$

В итоге мы получили, что:

$BC = x$

$AC = 2x \Rightarrow 5x = P_{ABC} \Rightarrow 5x = 300 \Rightarrow x = 60$

$AB = 2x$

Ну то есть мы однозначно задали стороны, которые должны быть, чтобы выполнялось условие $\Rightarrow$ ответ - 1.

Ответ: 1.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} & (1)\\ 2y+x^2=9 & (2)\end{cases} \qquad ОДЗ: \begin{cases} xy\geq 0\\ y-2x\geq 0\end{cases}$$

Из (2): $y=\frac{9-x^2}{2}$ (3)

(1): $y-2x=\sqrt{xy} \Rightarrow y^2-5xy+4x^2=0$

Подставив y, домножив равенство на 4 и раскрыв скобки, получим:

$$x^4+10x^3-2x^2-90x+81=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x+9)(x^2+2x-9)=0$$

Тогда:

$$\left[\begin{array}{l} x=1\\ x=-9\\ x=-1+\sqrt{10}\\ x=-1-\sqrt{10}\end{array}\right.$$

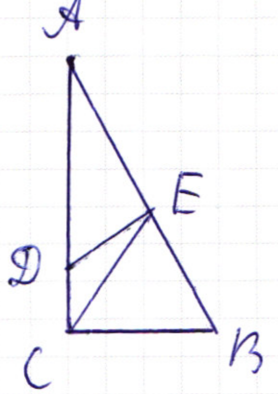
Найдя y по (3):

$$\left[\begin{array}{l} x=1;\ y=4\\ x=-9;\ y=-36\\ x=-1+\sqrt{10};\ y=-1+\sqrt{10}\\ x=-1-\sqrt{10};\ y=-1-\sqrt{10}\end{array}\right.$$

не подходит по ОДЗ

Ответ: $x=1,\ y=4$; $x=-1-\sqrt{10},\ y=-1-\sqrt{10}$.

№5



Дано: $\triangle ABC$

$\angle ACB = 90^\circ$

$DE \perp AB$

$AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$

$BC = \sqrt{29}$

$\angle CED = 45^\circ$

$\frac{AD}{AC} = ?$

$S_{AED} = ?$

Решение:

1) $\angle DCB = 90^\circ = \angle DEA \Rightarrow CDEB$ – вписанный четырехугольник.

2) Из 1): $\angle DBC = \angle DEC = 45^\circ \Rightarrow \angle BDC =$
$= \angle DCB - \angle DBC = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ \Rightarrow \triangle DBC$ – р/б $\triangle$.

3) Из 2): $DC = BC$, тогда

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC - DC}{AC} = \frac{AC - BC}{AC} = \frac{1{,}5\sqrt{29}}{2{,}5\sqrt{29}} = 0{,}6$$

4) $\triangle AED \sim \triangle ACB$ по 2 углам: $\angle A$ – общий, $\angle AED = \angle ACB = 90^\circ$. Тогда $\frac{S_{AED}}{S_{ACB}} = k^2$, где

k – коэффициент подобия треугольников и

$$k = \frac{AD}{AB}$$

5) Из т. Пифагора: $AB = \frac{29}{2} \Rightarrow k = \frac{1{,}5\sqrt{29}}{\frac{29}{2}} = \frac{3}{\sqrt{29}}$

Тогда $k^2 = \frac{9}{29}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6) Из 4) и 5): $S_{AED} = k^2 \cdot S_{ACB}$

$S_{ACB} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{5 \cdot 29}{2}$

Тогда $S_{AED} = \frac{9}{29} \cdot \frac{5 \cdot 29}{2} = \frac{45}{2} = 22{,}5$

Ответ: 0,6; 22,5.

№ 7

Из условия: $p = f(p) = f(p \cdot 1) = f(p) + f(1) =$
$= p + f(1)$, то есть

$p = p + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

Пусть у нас есть натуральное число n и у него следующее каноническое разложение:

$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$

Тогда $f(n) = f(p_1 \cdot p_1^{\alpha_1 - 1} \dots p_k^{\alpha_k}) = f(p_1) + f(p_1^{\alpha_1 - 1} \dots p_k^{\alpha_k}) =$
$= p_1 + f(p_1 \cdot p_1^{\alpha_1 - 2} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}) = \dots = \alpha_1 p_1 + f(p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k})$.

То есть $f(n) = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_k p_k$ (1)

Теперь заметим следующее:

$$0 = f(1) = f(n \cdot \frac{1}{n}) = f(n) + f(\frac{1}{n}) =$$

$$= \alpha_1 p_1 + \ldots \alpha_k p_k + f(\frac{1}{n})$$

~~$0 =$~~ То есть: $-\alpha_1 p_1 - \alpha_2 p_2 - \ldots - \alpha_k p_k = f(\frac{1}{n})$ (2)

Из всего этого:

$$f(\frac{x}{y}) = f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) \quad (3)$$

Используя формулы (1), и (2), и (3) просто переберем все пары $(x; y)$ и посмотрим, когда $f(\frac{x}{y}) < 0$.

$f(3) = 3$	$f(11) = 11$	$f(3^{-1}) = -3$	$f(11^{-1}) = -11$
$f(4) = 4$	$f(12) = 7$	$f(4^{-1}) = -4$	$f(12^{-1}) = -7$
$f(5) = 5$	$f(13) = 13$	$f(5^{-1}) = -5$	$f(13^{-1}) = -13$
$f(6) = 5$	$f(14) = 9$	$f(6^{-1}) = -5$	$f(14^{-1}) = -9$
$f(7) = 7$	$f(15) = 8$	$f(7^{-1}) = -7$	$f(15^{-1}) = -8$
$f(8) = 6$	$f(16) = 8$	$f(8^{-1}) = -6$	$f(16^{-1}) = -8$
$f(9) = 6$	$f(17) = 17$	$f(9^{-1}) = -6$	$f(17^{-1}) = -17$
$f(10) = 7$	$f(18) = \cancel{12}\ 8$	$f(10^{-1}) = -7$	$f(18^{-1}) = -8$
	$f(19) = 19$		$f(19^{-1}) = -19$

Если перебрать, то получим: 128

Ответ: 128

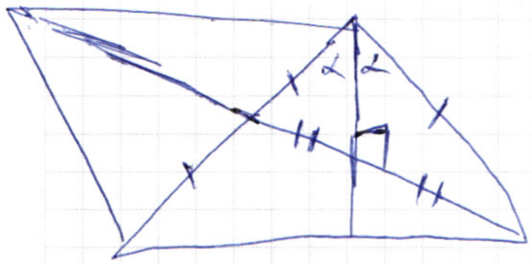
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$$y=\frac{9-x^2}{2}$$

$$\frac{9-x^2}{2}-2x=\sqrt{x\cdot\frac{9-x^2}{2}}$$

$$\frac{9-x^2-4x}{2}=\sqrt{x\frac{(3-x)(3+x)}{2}}$$

$2^2\cdot 3$

16 3
15 8
13 2
13 4
8 5
11 5
11 1
8 5
0

$\cancel{y-\sqrt{xy}=2x}$

y^2

60 + 17 + 10 + 8 + 33

60 + 50 + 16

128

$n=p_1p_2$

$f(\frac{1}{n})=f(\frac{1}{p_1}\cdot\frac{1}{p_2})=$
$=f(\frac{1}{p_1})+f(\frac{1}{p_2})$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

области определения: $\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ x>0 \end{cases}$

$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$

№7

$f(p)=p=f(p)+f(1)$

$f(n)=\alpha_1p_1+\ldots+\alpha_kp_k$

$f(1)=0$

$\cancel{f(\frac{1}{n})=\frac{\alpha_1}{p_1}+\ldots+\frac{\alpha_k}{p_k}}$

$f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})$

$f(\frac{1}{m})=\alpha_1\cdot f(\frac{1}{p_1})+\ldots+\alpha_k f(\frac{1}{p_k})$

$f(1)=f(p\cdot\frac{1}{p})=f(p)+f(\frac{1}{p})=p+f(\frac{1}{p})=0$

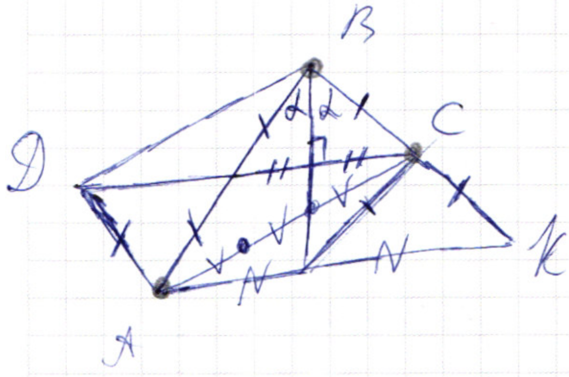
$$\boxed{f(\frac{1}{p})=-p}$$

$$\boxed{f(n)=\alpha_1p_1+\ldots+\alpha_kp_k}$$

$\cancel{f(\frac{1}{n})=\alpha_1p_1+\ldots}$ + $\boxed{f(\frac{1}{n})=-\alpha_1p_1-\ldots-\alpha_kp_k}$

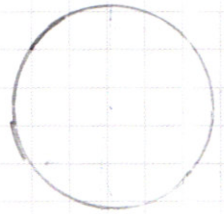
☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

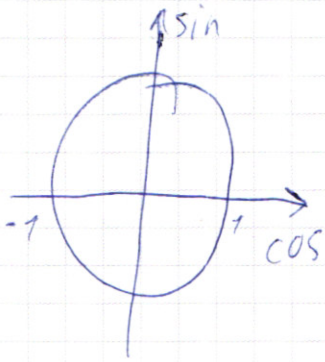


$$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2\cdot AB\cdot BC\cdot \cos(2\alpha)$$

ц ц ц ц ц ц



$\cos(2\alpha)$ – ц

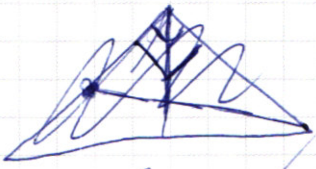


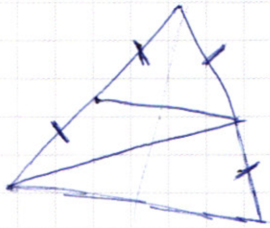
cos – от -1 до 1 => целые: -1, 0, 1

cos 180°   cos 90   cos 0°

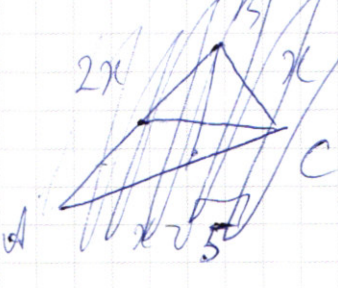
$2\alpha = 90°$

$\alpha = 45°$





№2



$x^2 + 4x^2 = 5x^2$

$AC^2 = x^2 + 4x^2 - 2\cdot x\cdot 2x\cdot \cos 2\alpha$

$5x^2 - 4x^2\cos 2\alpha$

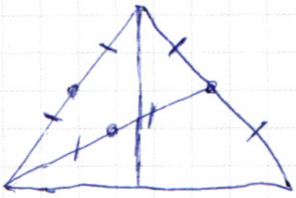
$AC^2 = x^2(5 - 4\cos(2\alpha))$

$AC = x\sqrt{5 - 4\cos 2\alpha}$

$5 - 4\cos 2\alpha$ – квадрат

от 1 до 9

1 4 9



$AC = 2x$

$P = 5x = 300$

$x = 60$

$\cos = 1$ → $2\alpha = 0$ ✗

$\cos = 0{,}25$ → $2\alpha =$ ✓

$\cos = -1$ → $2\alpha = 180°$ ✗

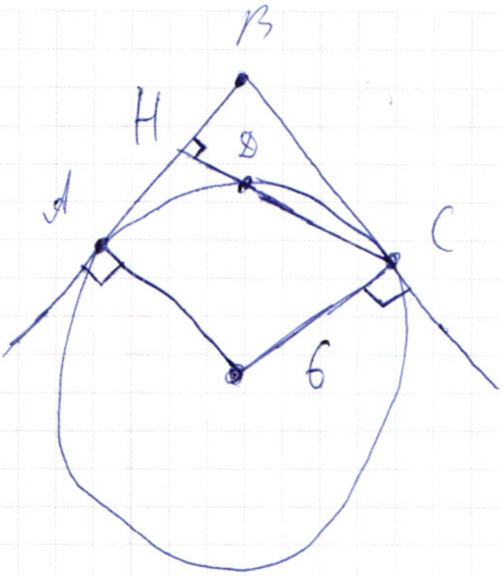
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

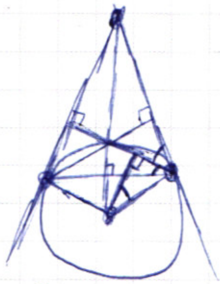
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\frac{AB}{CH} = ?$

$S_{ABD} = 15 = \frac{AB \cdot DH}{2}$



$$\begin{array}{l|l} x^3+11x^2+9x-81 & x+9 \\ \underline{x^3+9x^2} & x^2+2x-9 \\ \quad 2x^2+9x-81 & \\ \quad \underline{2x^2+18x} & \\ \qquad -9x-81 & \\ \qquad \underline{-9x-81} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

31
20

$2,5^2$

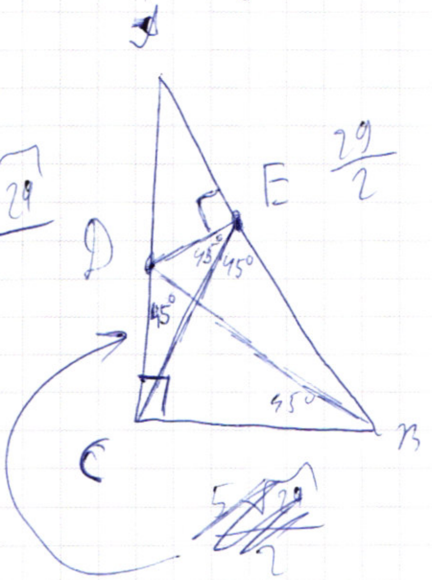
$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

$\frac{4 \cdot 29+}{4}$ $\quad \frac{25 \cdot 29}{4}$

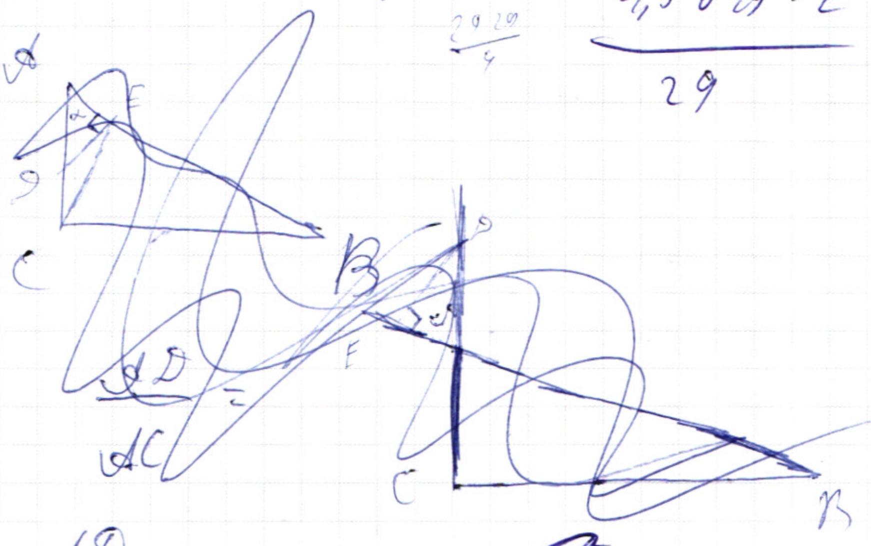
$\frac{20 \cdot 29}{4}$

$\frac{1,5\sqrt{29} \cdot 2}{29} = \frac{3}{\sqrt{29}}$

$\frac{5\sqrt{29}}{2}$



$\frac{29}{2}$



$\frac{AD}{AC} =$

$\sqrt{29}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{1,5}{2,5} = \frac{3}{5}$

$\frac{5 \cdot 29}{2}$

$y-2x=\sqrt{xy}$

$y^2-4xy+4x^2=xy$

$y^2-5xy+4x^2=0$

$(y-2x)^2=xy$

$\left(\frac{9-x^2}{2}-2x\right)^2=x\frac{9-x^2}{2}$

$\frac{(3-x)^2(3+x)^2}{4}-5x\frac{(3-x)(3+x)}{2}+4x^2=0$

$(3-x)(3+x)\left(\frac{(3-x)(3+x)}{4}-\frac{5x}{2}\right)+4x^2=0$

$\left(\frac{9-x^2}{2}-2x\right)^2-x\frac{9-x^2}{2}=0$

$\left(\frac{9-x^2}{2}\right)^2-2\frac{9-x^2}{2}\cdot 2x+4x^2-\frac{9x-x^3}{2}=0$

$\frac{81-18x^2+x^4}{4}-2\cdot(9x-x^3)+4x^2-\frac{9x-x^3}{2}=0$

$81-18x^2+x^4-72x+8x^3+16x^2-18x+2x^3=0$

$x^4+10x^3-2x^2-90x+81=0$

$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$

$y=\frac{9-x^2}{2}$

$\begin{cases} xy\geq 0 \\ y-2x\geq 0 \end{cases}$

ОДЗ

$9-x^2-10x$

$\boxed{y=\frac{9-x^2}{2}}$

$x=1 \quad y=4$ ✓

$x=-9 \quad y=-36$ ✗

$x=-1+\sqrt{10} \quad y=-1+\sqrt{10}$ ✗

$x=-1-\sqrt{10} \quad y=-1-\sqrt{10}$ ✓

$4+36$

$\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

$-1+\sqrt{10}$ $\quad 11-2\sqrt{10}$ $\quad 1-2\sqrt{10}+10$

$-1-\sqrt{10}$ $\quad 11+2\sqrt{10}$ $\quad 1+2\sqrt{10}+10$

$2\cancel{7}+99$

$-27+99-27-81$

$-9^3+11\cdot 9^2-9^2-9^2$

-9^3+9^3

-9

-2

$\frac{-2\pm 2\sqrt{10}}{2}$

$-1\pm\sqrt{10}$

$$\begin{array}{l|l} x^4+10x^3-2x^2-90x+81 & x-1 \\ \hline \underline{x^4-x^3} & x^3+11x^2+9x-81 \\ \quad 11x^3-2x^2-90x+81 & \\ \quad \underline{11x^3-11x^2} & \\ \qquad 9x^2-90x+81 & \\ \qquad \underline{9x^2-9x} & \\ \qquad\quad -81x+81 & \\ \qquad\quad \underline{-81x+81} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$1+10-2-90+81$

$92-92=0$

$\cancel{1-10-2+90+81}$

$(x-1)(x+9)(x^2+2x-9)$

$x=1 \quad x=-1+\sqrt{10}$

$x=-9 \quad x=-1-\sqrt{10}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)