МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство
$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

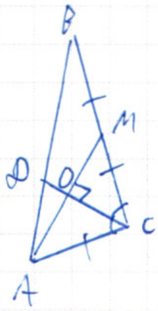
5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе
$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

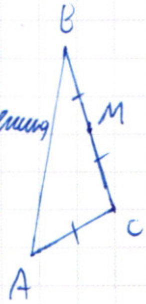


Рассмотрим произвольный треугольник, у которого бисс-а CD и мед-а AM перпендикулярны.

Заметим, что $\triangle ACM$ - равноб.-ый, т.к. CO, где O - $AM \cap CD$, является бисс-ой и выс-ой. Значит $AC = MC$, и $BC = 2AC$. Значит в любом таком треугольнике одна сторона в два раза меньше другой, т.к. и AM - мед-а, и CD - бисс-а, лежат внутри $\triangle ABC$.

Сформулируем признак такого треугольника: в треугольнике медиана перпендикулярна биссектрисе, если сторона, к которой проведена медиана, в два раза больше другой стороны треугольника, которая и является стороной угла, который делит биссектриса.

Действительно, тогда если провести к стороне BC медиану, то $\triangle ACM$ окажется равноб-ым по определению и бисс-а $\angle C$ будет перпендикулярна основанию AM. Случаев, когда $BC \neq 2AC$, и, всё же, бисс-а перпендикулярна медиане, быть не может, т.к. из рассуждения в начале будет следовать $BC = 2AC$, и будет противоречие.



Значит наш треугольник имеет стороны длины x; $2x$; $600-3x$, т.к. 600 - периметр.

Заметим, что порядок длин мы можем брать без потери общности, т.к. любой треугольник, у которого другой порядок сторон с теми же длинами, будет равен треугольнику с установленным порядком длин сторон по трём сторонам.

Воспользуемся неравенством треугольника:

① $x+2x>600-3x \Rightarrow x>100$

② $x+600-3x>2x \Rightarrow x<150$, значит $100<x<150$, то есть

③ $2x+600-3x>x \Rightarrow x<300$ для любого x в этом

промежутке можно построить треугольник со сторонами x; $2x$; $600-3x$, и в нём будет биссектриса, перпендикулярная медиане ~~основанию~~, и периметр $=600$. Строится он стандартным способом построения треугольника по трём сторонам, медиана проводится к стороне, соответствующей $2x$, а бисс-а к $600-3x$.

Всего таких x — 49.

Ответ: 49

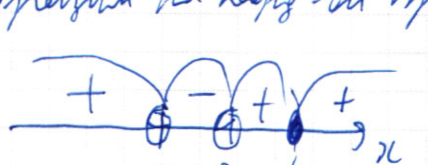
№1

Раскроем модуль в неравенстве на интервалах. Получится четыре интервала:

① $x \geq 3$

$$\frac{x^2-6x+10-2(x-3)}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} = \frac{x^2-8x+16}{3x^2-6x} = \frac{(x-4)^2}{3x(x-2)}$$

По методу интервалов будет 4 интервала, изобразим на коорд-ой пр.-ой



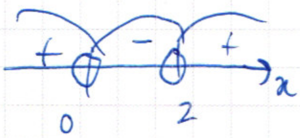
тогда удовлетворяет неравенству промежуток $(0;2)\cup\{4\}$, но т.к. $x\geq 3$, то $\{4\}$

② $3>x\geq 2$

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} = \frac{x^2-4x+4}{3x^2-6x} = \frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} = \frac{x-2}{3x}, \ x\neq 2$$

также изобразим интервалы на коорд. пр.:

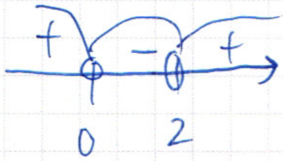
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



, удовлетворяет пр-ок $(0;2)$, но $x \geq 2$, т.е. $\varnothing$

③ $2 > x \geq 0$

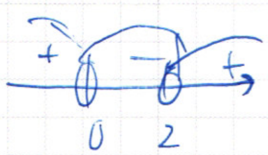
$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} = \frac{x^2-4x+4}{x^2-2x} = \frac{(x-2)^2}{x(x-2)} = \frac{x-2}{x}, \ x \neq 2,$$ изобразим:



, удовлетворяет всем условиям $(0;2)$

④ $0 > x$

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} = \frac{x^2-4x+4}{3x^2-6x} = \frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} = \frac{x-2}{3x}, \ x \neq 2,$$ изобразим:



, $(0;2)$ удовлетворяет, но $x<0$, поэтому $\varnothing$

Из четырёх интервалов получаем решения неравенства $(0;2)\cup\{4\}$

Ответ: $x \in (0;2)\cup\{4\}$

№3

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x=5-y^2 \end{cases}$$, т.е. $-y^2-2y+5=\sqrt{5y-y^3}$, возведём это выражение в квадрат:

$y^4+4y^2+25+4y^3-10y^2-20y=5y-y^3$

$y^4+5y^3-6y^2-25y+25=0$, одним из корней этого выражения является $y=1$, т.е.

$(y-1)(y^3+6y^2-25)=0$ — ещё поделим методом Горнера:

	1	5	−6	−25	25
1	1	6	0	−25	0

одним корнем этого выражения является $y=-5$, поделим:

	1	6	0	−25
−5	1	1	−5	0

$(y-1)(y+5)(y^2+y-5)=0$

найдём корни у последней скобки

$D = 1+20=21$

$y = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$, наше уравнение примет вид

$(y-1)(y+5)\left(y - \frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)\left(y - \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)=0$ и будет иметь 4 корня.

вернёмся к уравнению до возведения в квадрат и проверим наши корни:

$-y^2 - 2y+5 = \sqrt{5y-y^3}$

~~$y=1$: $-1-2+5 \overset{?}{=} \sqrt{5-1}$ $2=2$ - верно~~   ~~$y=-5$: $-25+10+5 \overset{?}{=} \sqrt{-25+125}$ $-10=\sqrt{100}$ - неверно, значит $y=-5$ - побочный корень~~

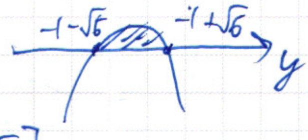
~~$y = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$:~~

~~$\frac{1-2\sqrt{21}+21}{2} + 1 - \sqrt{21} + 5 = \sqrt{\frac{-5+5\sqrt{21}}{2} - \frac{(-1+\sqrt{21})^3}{8}}$~~

Для этого узнаем ограничения для y: левая часть должна быть неотрицательной, как и подкоренное выражение

$f(y) = -y^2-2y+5$, $f(y) \geq 0$ $x=-1$, ветви вниз

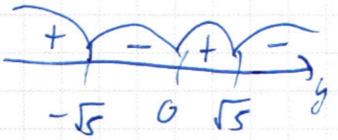
$D = 4+20=24$ $y = \frac{2 \pm 2\sqrt{6}}{-2}$ $y = -1 \pm \sqrt{6}$



Значит по методу схем. ~~пост~~ постр. параболы

$y \in [-1-\sqrt{6}; -1+\sqrt{6}]$

$5y - y^3 \geq 0$ $y(5-y^2) \geq 0$ $y(\sqrt{5}-y)(\sqrt{5}+y) \geq 0$ по методу интервалов:



, т.е. $y \in (-\infty; -\sqrt{5}] \cup [0; \sqrt{5}]$

Сравним концы промежутков:

$-\sqrt{5} > -1-\sqrt{6}$, т.к. $-\sqrt{5} < -1+\sqrt{6}$, т.к. $-1+\sqrt{6} > 0 > -\sqrt{5}$

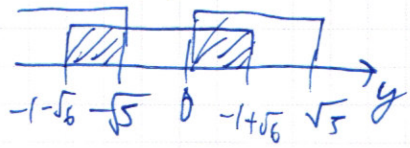
$\sqrt{5} < 1+\sqrt{6}$ $\sqrt{5} > -1-\sqrt{6}$, т.к. $\sqrt{5} > 0 > -1-\sqrt{6}$

$5 < 1+2\sqrt{6}+6$ $\sqrt{5} > -1+\sqrt{6}$, т.к.

$-2 < 2\sqrt{6}$ $5 > 1-2\sqrt{6}+6$

$-2 > -2\sqrt{6}$ Значит ~~корни~~ границы лежат так:

Значит $y \in [-1-\sqrt{6}; -\sqrt{5}] \cup$ $\cup [0; -1+\sqrt{6}]$ $1 < \sqrt{6}$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Проверим корни:

$y = 1$: $0 < 1 < -1+\sqrt{6}$, верно

$y = -5$: $-5 < -1-\sqrt{6}$, неверно, это побочный корень

$y = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$: $\frac{-1+\sqrt{21}}{2} > -1+\sqrt{6}$, т.к. , неверно, значит это побочный корень

$-1+\sqrt{21} > -2+2\sqrt{6}$

$\sqrt{21} > -1+2\sqrt{6}$

$21 > 1-4\sqrt{6}+24$

$-4 > -4\sqrt{6}$

$1 < \sqrt{6}$

$y = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$

$\frac{-1-\sqrt{21}}{2} > -1-\sqrt{6}$, т.к. $\qquad \frac{-1-\sqrt{21}}{2} < -\sqrt{5}$, т.к.

$-1-\sqrt{21} > -2-2\sqrt{6} \qquad -1-\sqrt{21} < -2\sqrt{5}$

$\sqrt{21} < 1+2\sqrt{6} \qquad 1+\sqrt{21} > 2\sqrt{5}$

$21 < 1+4\sqrt{6}+24 \qquad 1+2\sqrt{21}+21 > 20$

$-4 < 4\sqrt{6} \qquad 2\sqrt{21} > -2$

Значит настоящие корни: $y = 1$ и $y = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$

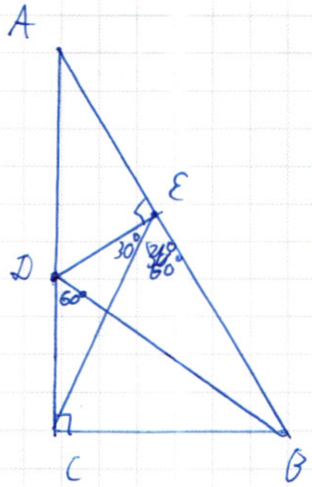
получаем, что:
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 1 \\ x = 5 - 1^2 \end{cases} \\ \begin{cases} y = \frac{-1-\sqrt{21}}{2} \\ x = 5 - \left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$x = 4$

$x = 5 - \frac{1+2\sqrt{21}+21}{4} = \frac{20-22+2\sqrt{21}}{4} = \frac{2\sqrt{21}-2}{4} = \frac{\sqrt{21}-1}{2}$

Ответ: $(4; 1)$ и $\left(\frac{\sqrt{21}-1}{2}; \frac{-\sqrt{21}-1}{2}\right)$

№5



Дано: $AC=\sqrt{7}$; $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$; $\angle CED=30^\circ$

$\angle C=90^\circ$; $E\in AB$; $D\in AC$; $DE\perp AB$

$AD:AC$ – ? S_{AED} – ?

Решение: ДП: CE.

CDEB – впис., т.к. противопол. углы по 90°.

$\angle CDB=\angle CEB=90^\circ-\angle DEC=90^\circ-30^\circ=60^\circ$

в $\triangle CDB$, $\angle C=90^\circ$ $tg\angle CDB=\frac{CB}{CD}$

$$CD=\frac{CB\cdot\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ}=\cancel{\frac{2\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}}=\cancel{2\sqrt{7}}$$

$=\frac{2\sqrt{7}\cdot 1\cdot 2}{\sqrt{3}\cdot 2\cdot\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{7}}{3}$, т.е. $AD=AC-CD=\sqrt{7}\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}\sqrt{7}$, и

~~Тогда~~ $\cancel{AD:AC=\frac{2\sqrt{7}}{3\cdot\sqrt{7}}=\frac{2}{3}}$ (1) $AD:AC=\frac{1}{3}$

$\triangle AED\sim\triangle ACB$, как прямоуг. с общ. у. $\angle A$, т.е.

$\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}$ $\quad AE=\frac{AC\cdot AD}{AB}$, ~~из (1)~~ $\cancel{\frac{AD}{AC}=\frac{2}{3}}$

т.е. $AE=\frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}{3\cdot AB}=\frac{7}{3\cdot AB}$, $AB=\sqrt{7+\frac{28}{3}}$ по т. Пифагора,

$AB=\sqrt{\frac{7\cdot 7}{3}}=7\sqrt{\frac{1}{3}}$, т.е.

$AE=\frac{7\cdot\sqrt{3}}{3\cdot 7}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{CB}$ из того же подобия

$DE=\frac{AD\cdot CB}{AB}=\frac{\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}{3\cdot\sqrt{3}\cdot 7}=\frac{2}{3}$, тогда

$S_{AED}=\frac{1}{2}AE\cdot DE=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{9}$

Ответ: $S_{AED}=\frac{\sqrt{3}}{9}$; $AD:AC=\frac{1}{3}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

Возьмём $f(1)$, $f(2)$, ~~и~~ $f(3)$: $f(3)=f(2)+f(1)$, $f(2)=2$ по у, тогда $f(1)=0$

Так как функция от ~~любого~~ простого числа натуральная, ~~то и любая~~ функция от любого натурального числа натуральная, т.к. $f(ab)=f(a)+f(b)$, ведь любое число раскладывается на простые множители, то в конце концов число разложится на сумму функций от простых чисел, а значит функции натуральные.

Рассмотрим $f(a)$ и $f(\frac{1}{a})$, где a – натуральное.

$f(a)+f(\frac{1}{a})=f(1)$, и т.к. $f(1)=0$, то $f(a)=-f(\frac{1}{a})$, значит любое число вида $\frac{1}{a}$, где $a\in N$, обращает функцию в отрицательное число. ~~Теперь возьмём числа $f(\frac{m}{n})$ и $f(\frac{n}{m})$; $f(\frac{m}{n})+f(\frac{n}{m})=f(1)$~~

~~$f(\frac{m}{n})=f(m)+f(\frac{1}{n})$ и $f(\frac{n}{m})=f(n)+f(\frac{1}{m})$, т.е.~~

~~$f(m)+f(\frac{1}{m})+f(\frac{1}{n})+f(n)=0$~~

~~$f(m)+f(\frac{1}{n})=0-(f(n)+f(\frac{1}{m}))$, т.е. если одна часть >0, то другая <0,~~

~~а это значит, что если функция от рац. ч. $\frac{m}{n}>0$, то функция от обратного числа <0.~~

~~если $m>n$, тогда $f(m)$~~ Рассмотрим $f(\frac{m}{n})$, $m\in N$, $n\in N$, т.е. от рац. числа

$f(m/n)=f(m)+f(\frac{1}{n})=f(m)-f(n)$, значит

$f(m/n)>0$, если $f(m)>f(n)$ и $f(m/n)<0$, если $f(m)<f(n)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Рассмотрим значения функции для чисел от 1 до 18:

$f(1)=0$ $\quad f(6)=5$ $\quad f(11)=11$ $\quad f(16)=8$

$f(2)=2$ $\quad f(7)=7$ $\quad f(12)=7$ $\quad f(17)=17$

$f(3)=3$ $\quad f(8)=6$ $\quad f(13)=13$ $\quad f(18)=12$

$f(4)=4$ $\quad f(9)=6$ $\quad f(14)=9$

$f(5)=5$ $\quad f(10)=7$ $\quad f(15)=8$

Будем брать все пары x и y, для которых $f(x)<f(y)$

x	кол-во значений y, для которых $f(x)<f(y)$						
1	17	6	12	11	3	16	5
2	16	7	7	12	7	17	0
3	15	8	10	13	1	18	2
4	14	9	10	14	4		
5	12	10	7	15	5		

И получается, что всего пар x и y, для которых $f(\frac{x}{y})<0$

$17+16+15+14+12+12+7+10+10+7+3+7+1+4+5+5+2=147$

Ответ: 147

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

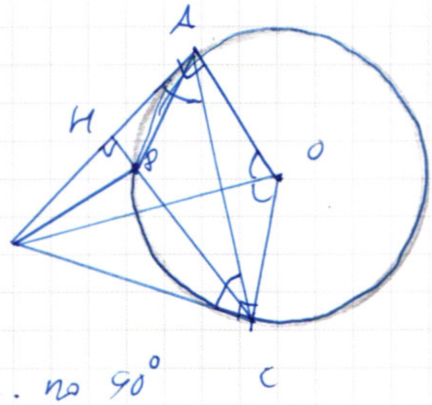
№4

Дано: окр $(O;R)$ $R=4$

BA и BC - кас.; $CH \perp AB$

$S_{ADB}=6$ $\quad CH \cap$ окр$(O;R) = D$

$AB : CH$ - ?



Решение: ДП: OB и AC

$AOCB$ - вписан, т.к. противопол. уг. по $90°$

Значит $\angle BAC = \angle BOC$ и $\angle AOB = \angle ACB$, $\angle AOB = \angle COB$, т.к.

$\triangle AOB = \triangle COB$ по трём ст. (BO - общ.; $AB = CB$, как отр. кас.; $AO=CO=R$)

т.е. по транз-сти $\angle BAC = \angle AOB$

$\triangle AHC \sim \triangle OAB$, как прямоуг-ые с одним равным углом.

Значит $\frac{AH}{OA} = \frac{CH}{AB}$ (1)

Рассмотрим ст. точки H отн. окр$(O;R)$, тогда:

$HA^2 = HD \cdot HC$ $\quad HA = \sqrt{HD \cdot HC}$, тогда равенство (1) примет вид

$\frac{HC}{AB} = \frac{\sqrt{HD} \cdot \sqrt{HC}}{4}$, т.к. $OA=4=R$ (2)

$S_{ADB} = \frac{1}{2} HD \cdot AB$ по формуле, то $HD = \frac{2S_{ADB}}{AB} = \frac{12}{AB}$, т.к. $S_{ADB}=6$, тогда

(2) примет вид:

$\frac{HC}{AB} = \frac{\sqrt{12} \cdot \sqrt{HC}}{\sqrt{AB} \cdot 4}$, ~~возведём в квадрат~~

$\frac{AB^2}{HC^2} = \frac{HC \cdot 12}{AB \cdot 16} = \frac{HC \cdot 3}{AB \cdot 4}$ $\quad AB^3 \cdot 4 = HC^3 \cdot 3$ $\quad AB = HC \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$, то

$\frac{AB}{HC} = \frac{HC \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4}}}{HC} = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ Ответ: $AB : HC = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

$\frac{\sqrt{HC}}{\sqrt{AB}} = \frac{\sqrt{12}}{4}$, возведём в квад.

$\frac{HC}{AB} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ $\qquad \frac{AB}{HC} = \frac{4}{3}$

Ответ: $\frac{AB}{HC} = \frac{4}{3}$

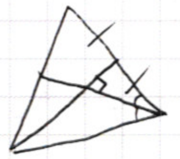
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

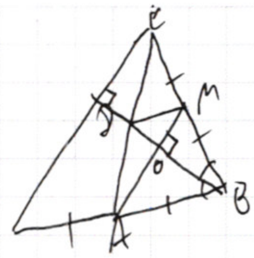
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





Одна сторона обязана быть в два раза больше другой!

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AM \cdot BD + S_{CDM}$

+ Неравенство треугольника!!!

$S_{ABC} = 2S_{ABM} = BO \cdot AM$

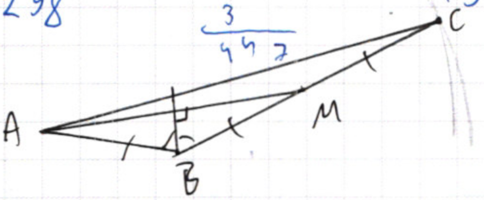
149

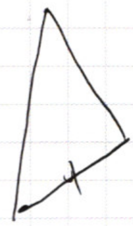
298

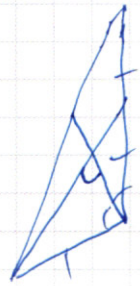
$3 \cdot 149 = 447$

12

$600 - 447 = 153$







$x;\ 2x;\ 600 - 3x$

1) $x + 2x > 600 - 3x$

$6x > 600$

$\boxed{x > 100}$

!!!

2) $x + 600 - 3x > 2x$

$4x < 600$

$\boxed{x < 150}$

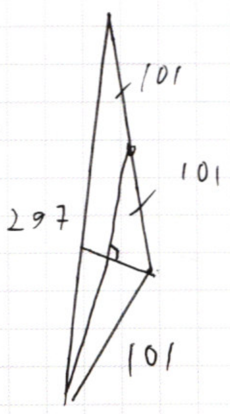
3) $2x + 600 - 3x > x$

$2x < 600$

$x < 300$

Отв: $\boxed{49}$

101; 202; 297



$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

$-y^2-2y+5=\sqrt{5y-y^3}$

$x=5-y^2$

$f(y)=-y^2-2y+5 \qquad f(y)\geqslant 0$

$a=-1$, ветви ↓

$D=4+20=24$

$y=\dfrac{2\pm 2\sqrt6}{-2}=-1\pm\sqrt6$

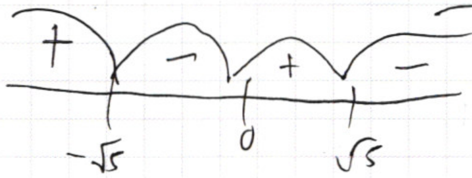
$4 \mid 24$, 6

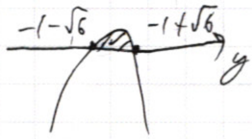
$5y-y^3\geqslant 0$

$y(5-y^2)\geqslant 0$

$y(\sqrt5-y)(\sqrt5+y)\geqslant 0$

$\dfrac{-5+5\sqrt{21}}{2} \qquad \dfrac{(-1+\sqrt{21})^3}{8}$





$(-\infty;-\sqrt5]\cup[0;\sqrt5]$

$-20+20\sqrt{21} > -1+3\sqrt{21}-63+21\sqrt{21}$

$y^4+4y^2+25+4y^3-10y^2-20y=5y-y^3$

$-\sqrt5 \leqslant -1-\sqrt6$

$-20+20\sqrt{21} \quad -64+24\sqrt{21}$

$\sqrt5 > 1+\sqrt6$

$44 > 4\sqrt{21}$

$25 > 1+2\sqrt6+6$

$18 > 2\sqrt6 \quad 168$

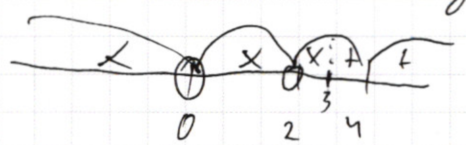
$9 > \sqrt6$

$\dfrac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leqslant 0$

$\boxed{x\geqslant 3}$

$\dfrac{x^2-8x+16}{3x^2-6x}=\dfrac{(x-4)^2}{3x(x-2)}$

$y^4+5y^3-6y^2-25y+25=0$



~~$[3;+\infty)$~~ $\varnothing$

$\boxed{y=1 \text{ - корень}}$

$2\leqslant x<3$

$D=1+20=21$

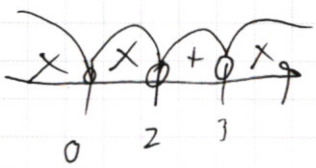
$y=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

$\dfrac{x^2-4x+4}{3x^2-6x}=\dfrac{(x-2)^2}{3x(x-2)}=\dfrac{x-2}{3x}, \; x\neq 2$

~~$(2;3)$~~

	1	5	−6	−25	25
1	1	6	0	−25	0

$\boxed{x<0}$



$\dfrac{x^2-4x+4}{}$

$0\leqslant x<2$

$(y-1)(y^3+6y^2-25)$

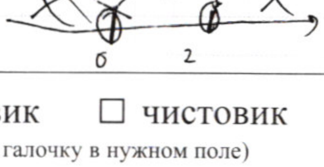
$\boxed{y=-5 \text{ - корень}}$

$\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-2x}=\dfrac{(x-2)^2}{x(x-2)}=\dfrac{x-2}{x}, \; x\neq 2$

$(0;2)$

	1	6	0	−25
−5	1	1	−5	0

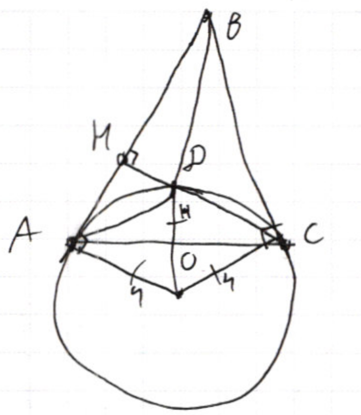
$(y-1)(y+5)(y^2+y-5)$



☑ черновик ☐ чистовик Страница № 12

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



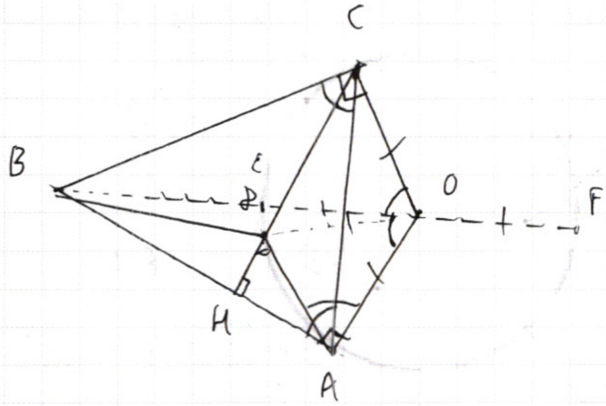
$AB : CH$

$S_{ABD} = 6 \Rightarrow AB \cdot HD = 12$

$R = 4$

$AH^2 = HD \cdot HC$

$AB = BC$



$S_{ABC} = \frac{1}{2} CH \cdot AB \qquad CH = \frac{2S_{ABC}}{AB}$

$\frac{AB}{CH} = \frac{AB^2}{2S_{ABC}}$

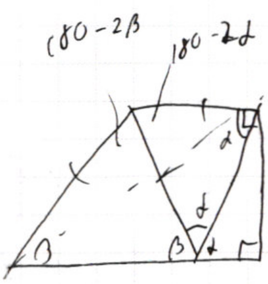
$AH^2 = HD \cdot HC$

$AB^2 = BE \cdot BF = BE \cdot (8 + BE) =$

$= BE^2 + 8BE$

$\triangle DHA \sim \triangle OAB \sim \triangle OBC$

$AB = \frac{12}{HD}$



$S_{ABC} = \frac{6HC}{HD}$

$\frac{HC}{HD} =$

$= \frac{HC^2}{AH^2}$

$S_{ABC} =$

$S_{ABC} = S_{ABCB} - S_{AOC} =$

$= \frac{1}{2} BO \cdot CA - S_{AOC}$

$\beta + 360 - 2\beta - 2\alpha = 180$

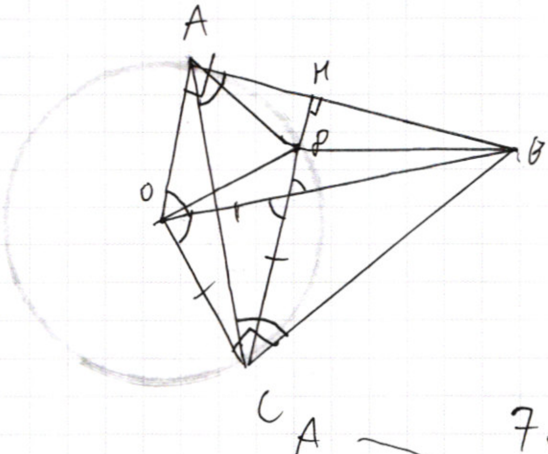
$\beta + 2\alpha = 180$

$\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{HC}{HD}$

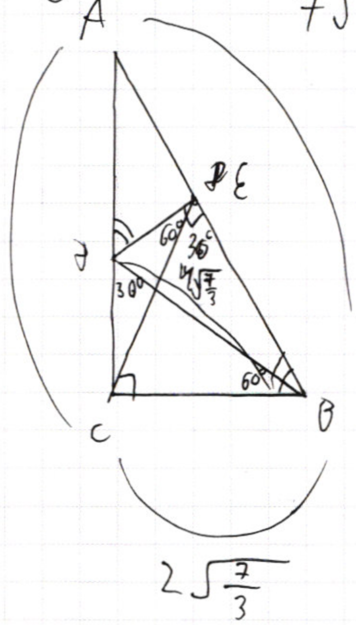
$\frac{AB^2}{HC} = \frac{HD}{16} \qquad \frac{AB}{HC} = \frac{HD}{AB \cdot 16} \qquad \frac{AH}{AB} = \frac{DH}{OA}$

$S_{ABC} = 6\frac{HC^2}{AH^2}$

$\frac{HC}{AB^2} = \frac{HD}{16} \qquad \frac{\sqrt{HD \cdot HC}}{AB} = \frac{DH}{4}$



$7\sqrt{\frac{1}{3}}$



$AD : AC\,?$

S_{AED} -?

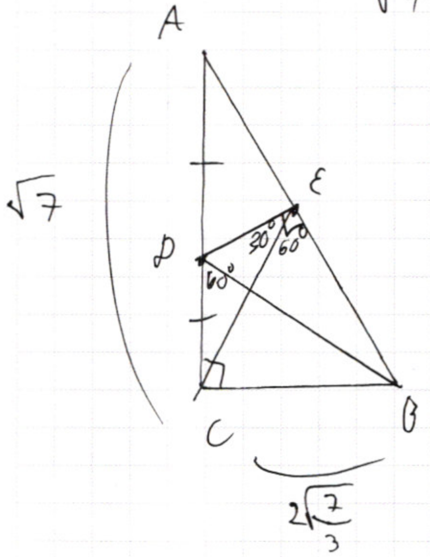
$AC = \sqrt{7}$

$BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$

$AD \cdot AC = AE \cdot AB$

$AD \cdot \sqrt{7} = AE \cdot 7\sqrt{\frac{1}{3}}$

$\sqrt{7}$



$\cos 30^\circ = \frac{DC}{BC}$

$DC = \frac{\cancel{2}\sqrt{7/\cancel{3}} \cdot \sqrt{3}}{\cancel{2}} = \sqrt{7}$

$AB = \sqrt{7 + \frac{28}{3}} = \sqrt{\frac{49}{3}} = 7\sqrt{\frac{1}{3}}$

$tg\, 60^\circ = \frac{BC}{CD}$

$CD = \frac{BC}{tg\, 60^\circ} = \frac{\sin 60^\circ \cdot 2\sqrt{7}}{\cos 60^\circ \cdot \sqrt{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{7}}{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{AE \cdot AB}{AC^2}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{1}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|2x|+|y|+|4-2x-y|>4$

$x^2-2x-4y+y^2\le 0$

$(x-\sqrt{2})^2-2+(y-2)^2-4\le 0$

$(x-\sqrt{2})^2+(y-2)^2\le 6$

$f(\frac{m}{n}) \Leftarrow \frac{m}{n}>1$ $\quad m>n \quad f(m)\ \cancel{+}\ f(n)$

$\vee$ 0

$y=x$

$f(a)+f(\frac{1}{b})=$ $\quad y=2x$

$=f(\frac{a}{b})$ $\quad |y|=2x$

$f(b)+f(\frac{1}{a})=$ $\quad |y|=|x|$

$=f(\frac{b}{a})$

$f(\frac{9}{8})=f(8)\ \cancel{+}\ f(9)=$

$=f(2)+f(2)+f(2)\ \cancel{+}\ f(3)\ \cancel{+}\ f(3)=$

$=\cancel{1}1$

~~$f(8)=4$~~

$f(6)=5$ $\quad f(8)=6$

$f(9)=6$

$f($

10 14 20

17+16+15+14+12+12+7+10+10+7+3+7+1+4+5+5+2

33 48 62 74 86 93 103 113 120 123 130 131 135 140 197

$f(3)=f(2)+f(1,5)$

$f(1,5)=1$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=p$ етр.

$f(x/y)<0$ $\quad 1\le x\le 18$

$1\le y\le 18$

$f(1)=f(2)+f(0,5)$

$f(2)=2$

$f(3)=3$

$f(0,5)=-f(2)$

$f(0,5)<0$

$f(\frac{a}{b})+f(\frac{b}{a})=$ $\quad 5=f(6)=f(3)+f(2)=5$

$\boxed{f(1)=0}$

$2=f(2)=f(2)+f(1)=2$

$=f(1)$ $\quad \overset{\shortparallel}{0}$

$f(x)<0$

$x<1$

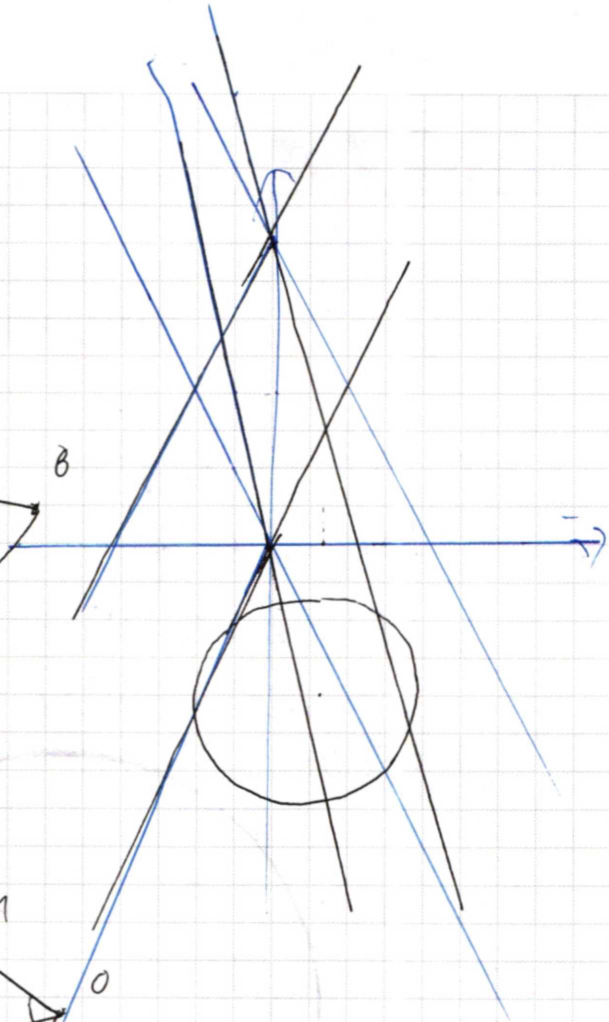
$f(\frac{a}{b})=-f(\frac{b}{a})\quad 0=f(1)=f(a)+f(\frac{1}{a})$

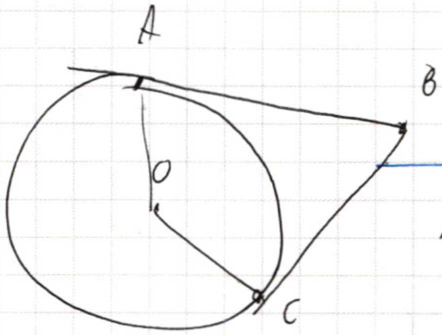
$f(a)>0$

$f(\frac{1}{a})<0$

33 48 62 74 86 93 103 113 120 130 140 147

$(7+16+15+14+12+12+7+10+10+7+3+7+1+4+5+5+7+2=$

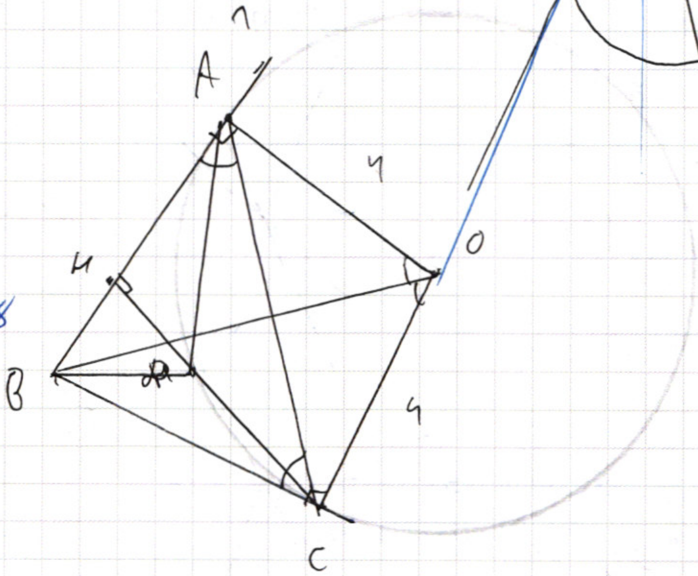




$|4-2x-y| = 4$

$$\left[\begin{aligned} 4-2x-y &= 4 \\ 4-2x-y &= -4 \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} y &= -2x \\ y &= -2x+8 \end{aligned}\right.$$



$MD = \dfrac{12}{AB}$

$AB \cdot MD = 12$

$\sqrt{MD} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{AB}}$

$BA = BC$

$MA^2 = MD \cdot MC$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} MC \cdot AB$

$\dfrac{MD}{MC} = \dfrac{6}{S_{ABC}}$

$\triangle AMC \sim \triangle OAB$

$\dfrac{AM}{OA} = \dfrac{AB}{MC}$ // $\dfrac{AM}{4} = \dfrac{AB}{MC}$

$12MC^3 = AB^3$

$\dfrac{\sqrt{MC} \cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{AB}}$ // $\dfrac{\sqrt{MD \cdot MC}}{4}$

$\dfrac{12MC}{AB} = \dfrac{AB^2}{MC^2}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №16 (Нумеровать только чистовики)