

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x - 3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x - 2|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy}, \\ x + y^2 = 5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках S и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.
5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{7}$, $BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30^\circ$.
6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4, \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 18$, $1 \leq y \leq 18$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$N/1 \quad \frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x-3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x-2|} < 0$$

$$\frac{(x-3)^2 + 1 - 2|x-3|}{2x(x-2) + |x(x-2)|} < 0$$

$$1) (x-3)^2 + 1 - 2|x-3| = 0$$

$$1) x < 3 \Rightarrow (x-3)^2 + 1 + 2(x-3) = 0$$

$$(x-3)^2 + 2(x-3) + 1 = 0$$

$$(x-3+1)^2 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0$$

$$x = 2; \quad 2 < 3$$

$$2) x \geq 3 \Rightarrow (x-3)^2 + 1 - 2(x-3) = 0$$

$$(x-4)^2 = 0$$

$$x = 4; \quad 4 > 3$$

$$2) 2x(x-2) + |x(x-2)| = 0$$

$$1) x \in (0; 2) \Rightarrow 2x(x-2) - x(x-2) = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 2$$

$$2) x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty) \Rightarrow 2x(x-2) + x(x-2) = 0$$

$$3x(x-2) = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 2$$



$$x \in (0; 2)$$

$$\text{Ответ: } (0; 2)$$

$$f(x, y) = |2x| + |y| + |4 - 2x - y|$$

1) Прямые $x=0$, $y=0$, $y=-2x+4$ разбивают плоскость Oxy на 7 частей.

$$\text{I } x \geq 0, y \geq 0, y \leq -2x+4; f(x, y) = 2x + y + 4 - 2x - y = 4$$

$$\text{II } x \geq 0, y \geq 0, y > -2x+4; f(x, y) = 2x + y + 2x + y - 4 = 4x + 2y - 4$$

$$\text{III } y > -2x+4, \text{ т.е. } f(x, y) > 4x + 2(-2x+4) - 4 = 4x - 4x + 8 - 4 = 4$$

$$\text{IV } x \leq 0, y \geq 0, y \leq -2x+4; f(x, y) = -2x + y + 4 - 2x - y = -4x + 4; x \leq 0 \Rightarrow -4x \geq 0 \Rightarrow -4x + 4 \geq 4 \Rightarrow f(x, y) \geq 4$$

$$\text{V } x < 0, y \geq 0, y > -2x+4; f(x, y) = -2x + y - 4 + 2x + y = 2y - 4. y > 4 \Rightarrow 2y > 8 \Rightarrow 2y - 4 > 4 \Rightarrow f(x, y) > 4$$

$$\text{VI } x \leq 0, y \leq 0, x^2 + y^2 > 0; f(x, y) > |4 - 2x - y| > 4$$

$$\text{VII } x \geq 0, y < 0, y \leq -2x+4; f(x, y) = 2x - y + 4 - 2x - y = -2y + 4 > 4$$

$$\text{VIII } x > 0, y \leq 0, y > -2x+4; f(x, y) = 2x - y - 4 + 2x + y = 4x - 4 > 4$$

Зн. наименьшее значение функции достигается на всей плоскости в трех областях с вершинами $(0; 0)$, $(0; 4)$, $(2; 0)$.

$$2) x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq (\sqrt{5})^2 - \text{круг}$$

$$3) S = \pi \cdot (\sqrt{5})^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = (5\pi - 4) \text{ (ед.}^2) \quad \text{Ответ: } (5\pi - 4) \text{ ед.}^2$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x \neq f(ab) = f(a) + f(b)$$

$$1) f(b) = f(1) + f(b) \Rightarrow f(1) = 0$$

$$2) f\left(\frac{1}{b}\right) + f(b) = f(1) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{b}\right) = -f(b)$$

$$3) f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$$

Пусть $x = p_1 p_2 p_3 \dots p_n$, $y = p_{n+1} p_{n+2} \dots p_{n+k}$ — разложение чисел x и y на простые множители.

$$\text{Тогда } f(x) = f(p_1) + \dots + f(p_n) = p_1 + p_n, f(y) = p_{n+1} + \dots + p_{n+k}.$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Rightarrow f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow f(x) < f(y) \Rightarrow p_1 + p_2 + \dots + p_n < p_{n+1} + p_{n+2} + \dots + p_{n+k}$$

Для $x \in \mathbb{N}$, где $1 \leq x \leq 18$ можно найти всевозможные значения y , например, выписав значения $f(n)$ для $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n \leq 18$.

Сумма количества полученных для каждого случая значений будет равна 145.

Ответ: 145.



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{1} \quad \frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x-3|}{2x^2 - 4x + |x(x-2)|} \leq 0$$

$$\frac{(x-3)^2 + 1 - 2|x-3|}{2x(x-2) + |x(x-2)|} \leq 0$$

$$1) (x-3)^2 + 1 - 2|x-3| = 0$$

$$1) x < 3 \Rightarrow (x-3)^2 + 1 + 2(x-3) = 0$$

$$(x-3)^2 + 2(x-3) + 1 = 0$$

$$(x-3+1)^2 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0$$

$$x-2=0$$

$$\underline{x=2} ; \underline{2 < 3}$$

$$\sqrt{11} \quad x \geq 0, y < 0, y > -2x+4$$

$$2x-y-4+2x+y > 4$$

$$4x > 8 \Rightarrow x > 2$$

$$\sqrt{111} \quad x < 0, y < 0, y > -2x+4$$

$$-2x-y-4+2x+y > 4$$

$$-4 > 4 \Rightarrow \emptyset$$

$$2) x \geq 3 \Rightarrow (x-3)^2 + 1 - 2(x-3) = 0$$

$$(x-3)^2 - 2(x-3) + 1 = 0$$

$$(x-3-1)^2 = 0$$

$$(x-4)^2 = 0$$

$$x-4=0$$

$$\underline{x=4} ; \underline{4 > 3}$$

- $\sqrt{14}$
- $x=1: 17$
- $x=2: 16$
- $x=3: 15$
- $x=4: 14$
- $x=5: 12$
- $x=6: 12$
- $x=7: 7$
- $x=8: 10$
- $x=9: 10$
- $x=10: 7$
- $x=11: 2$
- $x=12: 7$
- $x=13: 1$
- $x=14: 3$
- $x=15: 4$
- $x=16: 4$
- $x=17: 0$
- $x=18: 4$

$$2) 2x(x-2) + |x(x-2)| = 0$$

$$1) x \in (0; 2) \Rightarrow 2x(x-2) - x(x-2) = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 2$$

$$\sqrt{17} \quad f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Rightarrow f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) < f(y) \Rightarrow p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n <$$

$$< p_{n+1} + p_{n+2} + \dots + p_{n+k}$$

$$0 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 5 \quad 6 \quad 6 \quad 7 \quad 11 \quad 7$$

$$1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 13;$$

$$13; 13; 13; 13; 13; 13; 13;$$

$$13; 14; 15; 16; 17; 18;$$

$$\sqrt{18}$$

$$17+16+15+14+12+12+10+10+$$

$$+7+7+7+7+4+4+4+3+2+1=$$

$$= 145$$

$$2) x \in (-\infty; 2] \cup [2; +\infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x(x-2) + x(x-2) = 0$$

$$3x(x-2) = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 2$$

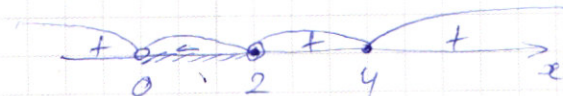
$$\sqrt{18}$$

$$80 + 7 \cdot 4 + 6 + 5 + 4 \cdot 4 +$$

$$+ 3 + 2 \cdot 3 + 1 = 80 + 11 \cdot 4 +$$

$$+ 6 + 5 + 3 \cdot 3 + 1 = 80 + 44 +$$

$$+ 11 + 10 = 90 + 55 = 145$$



$$x \in (0; 2)$$

$$2) x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 1+4$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq (\sqrt{5})^2$$

$$y^4 - 5y^3 - 6y^2 + 25y + 25 = y^4 - 6y^2 + 9 - 5(y^2 - 5) + 16 =$$

$$= (y^2 - 3)^2 - 5y(y^2 - 3) + 10y + 16$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{3} \begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-4xy+4y^2=xy \\ x+y^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-5xy+4y^2=0 \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=5-y^2 \\ (5-y^2)^2+5(5-y^2)y+4y^2=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2-5xy-4x=0$$

IV $x < 0, y < 0, y \leq -2x+4$
 $-2x-y+4-2x-y > 4$
 $-4x-2y+4 > 4 \Rightarrow -4x-2y > 0 \Rightarrow 2y+4x < 0$
 $2y < -4x \Rightarrow y < -2x$
 #V $x \geq 0, y \geq 0, y > -2x+4$
 $2x+y-4+2x+y > 4$
 $4x+2y > 8 \Rightarrow 2y > 8-4x \Rightarrow y > 4-2x$
 VI $x < 0, y \geq 0, y > -2x+4$
 $-2x+y-4+2x+y > 4$
 $2y > 8 \Rightarrow y > 4$

$$\begin{aligned} -25-10y^2+y^4+25y-5y^3+4y^2 &= 0 \\ -y^4-5y^3-6y^2+25y+25 &= 0 \end{aligned}$$

$$1) |2x+y| + |4-2x-y| > 4$$

I $x \geq 0, y \geq 0, y \leq -2x+4$
 $2x+y+4-2x-y > 4$
 $4 > 4 \Rightarrow \emptyset$

II $x < 0, y \geq 0, y \leq -2x+4$
 $-2x+y+4-2x-y > 4$
 $-4x+4 > 4 \Rightarrow -4x > 0 \Rightarrow x < 0$

III $x \geq 0, y < 0, y \leq -2x+4$
 $2x-y+4-2x-y > 4$
 $-2y+4 > 4 \Rightarrow -2y > 0 \Rightarrow y < 0$

$$\sqrt{7} \quad f(ab) = f(a) + f(b) \quad ?$$

$$1) f(b) = f(1) + f(b) \Rightarrow f(1) = 0$$

$$2) f\left(\frac{1}{b}\right) + f(b) = f(1) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{b}\right) = -f(b)$$

$$3) f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) \quad ?$$

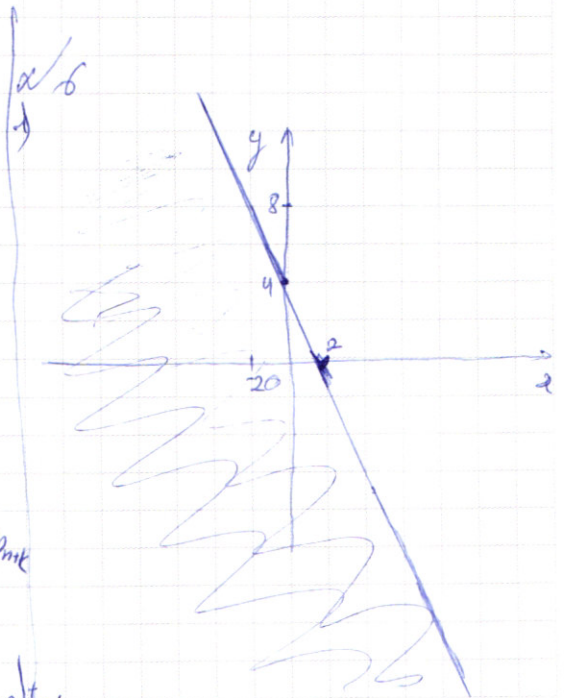
$$4) f(p) = p; \quad p - \text{простое}, \quad p \neq 1 \Rightarrow p > 1$$

$$5) x, y \in \mathbb{N} \setminus \{1\}; \quad x = p_1 p_2 p_3 \dots p_n, \quad y = p_{n+1} p_{n+2} \dots p_{n+k}$$

$$f(x) = f(p_1 p_2 p_3 \dots p_n) = f(p_1) + f(p_2) + f(p_3) + \dots + f(p_n) =$$

$$= p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n; \quad f(y) = f(p_{n+1} p_{n+2} \dots p_{n+k}) = f(p_{n+1}) + f(p_{n+2}) + \dots + f(p_{n+k}) =$$

$$= p_{n+1} + p_{n+2} + \dots + p_{n+k}$$

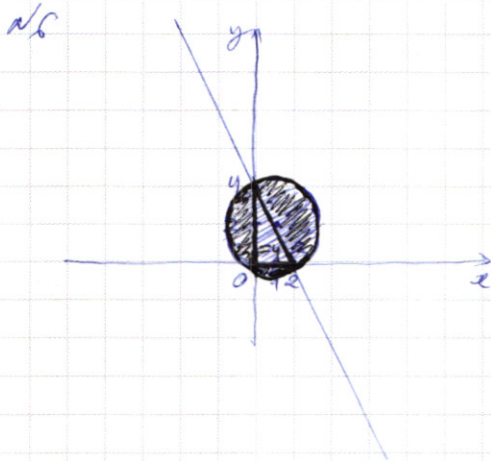




черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

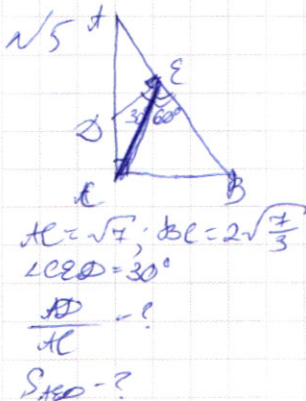
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{aligned} & \rightarrow |2x| + |y| + |4 - 2x - y| = 4 \\ & \text{I } x \geq 0, y \geq 0, y \leq -2x + 4 \\ & 2x + y + 4 - 2x - y = 4 \\ & 4 = 4 \\ & \text{II } x \leq 0, y \geq 0, y \leq -2x + 4 \\ & -2x + y + 4 - 2x - y = 4 \\ & -4x + 4 = 4 \Rightarrow -4x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ & \text{III } x \geq 0, y \leq 0, y \geq -2x + 4 \\ & 2x - y + 4 - 2x - y = 4 \\ & -2y = 0 \Rightarrow y = 0 \\ & \text{IV } x \leq 0, y \leq 0, y \geq -2x + 4 \\ & -2x - y + 4 - 2x - y = 4 \\ & -4x - 2y = 0 \Rightarrow 2y = -4x \Rightarrow \\ & \Rightarrow y = -2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{V } x \geq 0, y \geq 0, y \geq -2x + 4 \\ & 2x + y - 4 + 2x + y = 4 \\ & 4x + 2y = 8 \Rightarrow \\ & \Rightarrow 2y = 8 - 4x \Rightarrow y = 4 - 2x \\ & \text{VI } x \leq 0, y \geq 0, y \geq -2x + 4 \\ & -2x + y - 4 + 2x + y = 4 \\ & 2y = 8 \Rightarrow y = 4 \\ & \text{VII } x \geq 0, y \leq 0, y \geq -2x + 4 \\ & 2x - y - 4 + 2x + y = 4 \\ & 4x = 8 \Rightarrow x = 2 \\ & \text{VIII } x \leq 0, y \leq 0, y \geq -2x + 4 \\ & -2x - y - 4 + 2x + y = 4 \\ & -4 = 4 \end{aligned}$$

$$S = S_k - S_m; S = \pi \cdot (\sqrt{5})^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = (5\pi - 4) \text{ (ед.}^2\text{)}$$



$$\rightarrow BE^2 = AE^2 + CE^2 - 2AE \cdot CE \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow BE^2 = AE^2 + CE^2 - AE \cdot CE$$

$$AE^2 = AE^2 + CE^2 - 2AE \cdot CE \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow AE^2 = AE^2 + CE^2 + AE \cdot CE$$

$$2) \begin{cases} BE^2 + CE^2 - BE \cdot CE = \frac{28}{3} \\ AE^2 + CE^2 + AE \cdot CE = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BE^2 - AE^2 - CE \cdot (AE + BE) = \frac{4}{3} \\ AE + BE = \frac{7\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$AE + BE = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

$$AB = \sqrt{7 + \frac{28}{3}} = \sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)