МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 16

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\left(\frac{(x-1)^2+9}{|x-1|}-6\right)(|x-3|+|x|-3) \leqslant 0.$$

2. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2-16y^2}=32, \\ 4y+\sqrt{x^2-16y^2}=23. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Биссектрисы внутреннего и внешнего угла A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках M и N соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника AMN, касается стороны AB в точке A. Найдите радиус окружности, угол ACB и площадь треугольника ABN, если известно, что $AB=\sqrt{5}$, $BM=2$.

4. [5 баллов] Вписанная окружность остроугольного треугольника ABC касается сторон AC и AB в точках E и D. Точка Y – основание перпендикуляра, опущенного из точки E на AB, а X – вторая точка пересечения EY со вписанной окружностью треугольника ABC. Найдите радиус этой окружности, если площадь треугольника AXD равна 5, а $2AD=3EY$.

5. [5 баллов] На доске выписано $6n$ последовательных натуральных чисел ($n \in \mathbb{N}$). Из них выбираются три попарно различных числа, среди которых ровно одно кратно 2 и ровно одно кратно 3. Известно, что можно составить ровно 5 900 таких троек. Чему равно n?

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} 4y+7x \geqslant |4y-7x|, \\ y \leqslant -3x+15, \\ x^2-10y+y^2+15 \geqslant 0 \end{cases}$$

7. [5 баллов] Найдите количество шестизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые две последовательные степени числа десять равна 1356.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №2

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2-16y^2} = 32 \\ 4y + \sqrt{x^2-16y^2} = 23 \end{cases}$$

→ Запишем ОДЗ для x и y, потому что присутствуют корни (а они всегда ≥ 0):

$x \leq 32$; $4y \leq 23$

$x^2-16y^2 \geq 0$

Произведём операцию вычитания второго уравнения из первого

$$x + \sqrt{x^2-16y^2} - (4y + \sqrt{x^2-16y^2}) = 32-23$$

$\Downarrow$

$x-4y=9 \quad x=4y+9$

Также проведём операцию сложения уравнений в системе и заменим „одинокий" x из первого ур-я на $4y+9$

$$4y+9+4y+2\sqrt{x^2-16y^2} = 32+23$$

$$2\sqrt{x^2-16y^2} = 55-9-8y = 46-8y$$

$$\sqrt{x^2-16y^2} = 23-4y$$ заменим оставшийся x

$$\sqrt{(4y+9)^2-16y^2} = 23-4y$$

$$\sqrt{72y+81} = 23-4y$$ возведём обе части в квадрат, но потом у нас появятся лишние корни и все корни придётся проверить.

продолж. на стр. 2

Получится

$72y+81=(23-4y)^2$

$72y+81=529-184y+16y^2$

$16y^2-256y+448=0 \quad /:16$

$y^2-16y+28=0$

по т. Виета: $y_1+y_2=16 \quad y_1\cdot y_2=28$

$y_1=14 \quad y_2=2$

по условию ОДЗ: $4y\le 23$

y_1 мы можем отбросить (этот корень образовался при возведении в квадрат)

значит $y=2$

тогда $x=4y+9=8+9=17$

Проверка: подставим x и y в систему

$\begin{cases} 17+\sqrt{17^2-64}=32 \\ 8+\sqrt{17^2-64}=23 \end{cases} \quad \begin{cases} 17+15=32 \\ 8+15=23 \end{cases} \Rightarrow$ всё сошлось

Ответ: $y=2$; $x=17$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №7

Для начала рассмотрим возможные степени десятки:

10^0 и 10^1 — нельзя, т.к. сумма будет ≤ 9

10^1 и 10^2 — нельзя, т.к. сумма будет ≤ 108

10^2 и 10^3 — нельзя, т.к. сумма будет ≤ 1098

10^3 и 10^4 — можно, т.к. сумма будет ≤ 10998

10^4 и 10^5 — бессмысленно, т.к. это будут частные случаи деления на 10^3 и 10^4

Рассмотрим остатки от 10^4 и 10^3

цифры в разрядах сотен тысяч и десятков тысяч нам не важны

Рассмотрим 4 „нижних" разряда:

1) Заметим, что цифра в разряде тысяч либо ноль, либо единица

2) Если в разряде тысяч стоит ноль, то остаток от деления на 10^4 и 10^3 будет одинаковый (x), тогда ~~~~

$2x = 1356 \quad x = 678$

и число будет иметь формат $\overline{ab0678}$

вариантов расстановки a и b у нас 90 $\Rightarrow$ 90 таких чисел

продолж на стр 4

3) Если в разряде тысяч стоит единица (больше единицы число стоять не может, т.к. сумма остатков 1356 (по усл.)), то сумму остатков от деления на ~~на~~ 10^3 и 10^4 можно представить, как: $1000+x+x=1356$

$2x=356 \quad x=178$

и получается число формата $cd1178$ вариантов расстановки cd тоже 90 ($c-10$; $d-9$; $c \times d$)

$\Rightarrow$ уже 180 нужных чисел

4) 10^4 и 10^5 и более брать бессмысленно, т.к. в разряде десятков тысяч обязан будет стоять ноль, а в разрядах ниже будет всё так, как при 10^3 и 10^4

$\Rightarrow$ эти случаи мы разобрали выше

Ответ: $90+90=180$; 180 таких чисел

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5

Заметим, что среди любых 6 чисел (натуральных), идущих подряд (последовательных:

~~Одно~~

Три числа $\vdots 2$ → Два числа $\vdots 2$ и $\not\vdots 3$

→ Одно число $\vdots 2$ и $\vdots 3 \Rightarrow \vdots 6$

Два числа $\vdots 3$ → Одно число $\vdots 3$ и $\not\vdots 2$

~~Одно число~~

Два числа $\not\vdots 2$ и $\not\vdots 3$ (одновременно оба условия)

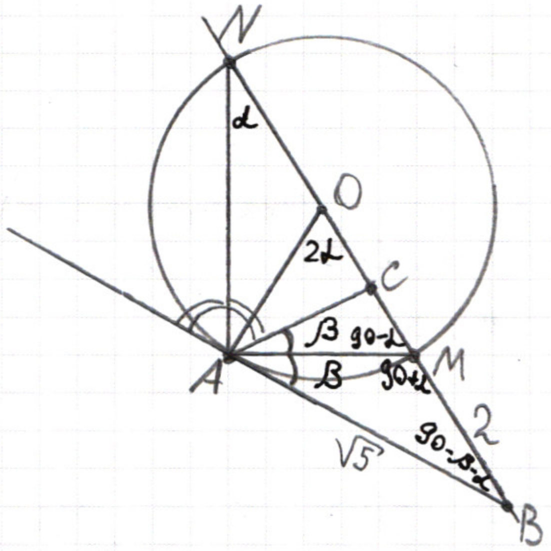
Проблема в том, что из необходимых нам чисел; меньше всего чисел $\vdots 3$ и $\not\vdots 2$ – всего 1 на 6 последовательных чисел. По другим числам всё ~~хо~~ лучше: чисел $\vdots 2$ и $\not\vdots 3$ 2 на 6 пос-ых, чисел $\not\vdots 2$ и $\not\vdots 3$ тоже 2 на 6 пос-ых.

Итак. Если у нас чисел $\vdots 3$ и $\not\vdots 2$ 1 на 6 пос-ых, то для составления 5900 троек нам нужно минимум $5900 \cdot 6$ последовательных чисел $\Rightarrow$ для $6n$ $n = 5900$

Ответ: 5900

Задача №3

Найти: r : $\angle ACB$, $S_{\triangle ABN}$



Решение:

1) $NAM = 90°$ (угол между внутренней и внешней биссектрисой одного угла)

2) т.к $\triangle NAM$ – п/у, то центр окружности лежит на гипотенузе и делит её пополам $\Rightarrow r = \frac{1}{2} NM$

Проведём OA,

Отметим $\angle ANM = \alpha$ и $\angle CAM = \angle MAB = \beta$

тогда $\angle AMN = 90° - \alpha$

$\angle AMB = 180° - \angle AMN = 180° - (90° - \alpha) = 90° + \alpha$

тогда $\angle ABM = 180° - \angle MAB - \angle BMA =$

$= 180° - \beta - 90 - \alpha = 90 - \beta - \alpha$

$OA = OM$ $(r) \Rightarrow \triangle AOM$ – р/б

$\angle OAM = \angle OMA = 90° - \alpha$, тогда $AOM = 180 - 2(90 - \alpha) =$

$= 2\alpha$

$\angle OAB = 180° - \angle AOB - \angle ABO = 180° - 2\alpha - (90 - \beta - \alpha) =$

$= 90 - \alpha + \beta$

, но AB – касательная и по её св-ву также

$\angle OAB = 90°$

$90° = 90° - \alpha + \beta \Rightarrow \alpha = \beta$

продолжение на стр 7

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle ACB = \angle ACM$

$\angle AMC = 90 - \alpha = 90 - \beta$

$\angle ACM = 180^\circ - \angle CAM - \angle AMC = 180^\circ - \beta - (90 - \beta) =$
$= \underline{90^\circ}$ (Ответ на один из вопросов)

по „золотому" св-ву биссектрисы:

$\dfrac{AB}{BM} = \dfrac{AC}{CM}$ $\quad AC = \sqrt{5}\cdot x \quad CM = 2x$

По т. Пифагора:

$AB^2 = AC^2 + CB^2$

$5 = 5x^2 + 4x^2 + 8x + 4$

$9x^2 + 8x - 1 = 0$

$x > 0$

$x_1 = \dfrac{1}{9} \quad x_2 = -1 \Leftarrow$ отбрасываем

$CM = 2x = \dfrac{2}{9} \quad AC = \sqrt{5}x = \dfrac{\sqrt{5}}{9}$

$\triangle ACB \sim \triangle OCA$ (по трём углам ($\angle OCA = \angle ACB = 90^\circ$ и $\angle AOC = \angle BAC = 2\alpha$)) $\Rightarrow \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{OC}{AC}$

$OC = \dfrac{AC^2}{BC} = \dfrac{5}{81} : \dfrac{20}{9} = \dfrac{5\cdot 9}{81\cdot 20} = \dfrac{1}{36}$

$r = OC + CM = \dfrac{1}{36} + \dfrac{2}{9} = \dfrac{1}{36} + \dfrac{8}{36} = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$ (ответ на один из вопросов)

продолж. на стр. 8

по т. Пифагора:

$$AM^2 = AC^2 + CM^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{9}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^2 =$$

$$= \frac{5}{81} + \frac{4}{81} = \frac{9}{81} = \frac{1}{9} \qquad AM = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

по т. Пифагора:

$$AN^2 = NM^2 - AM^2 = \frac{1}{4}^{9} - \frac{1}{9}^{4} = \frac{5}{36}$$

$$AN = \sqrt{\frac{5}{36}} = \frac{\sqrt{5}}{6}$$

$$S_{ABN} = \cancel{S_{NA}}\ S_{NAM} + S_{CAB} - S_{CAM} =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{6} +} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{9} \cdot \frac{\sqrt{5}}{9} -$$

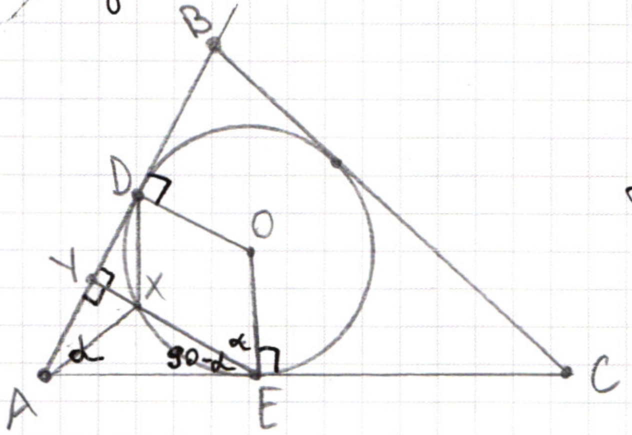
$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{9} \cdot \frac{2}{9} = \frac{\sqrt{5}}{36} + \frac{10\sqrt{5}}{81} - \frac{\sqrt{5}}{81} = \frac{\sqrt{5}}{36} + \frac{\cancel{9}^{1}\sqrt{5}}{\cancel{81}_{9}} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{36} + \frac{4\sqrt{5}}{36} = \frac{5\sqrt{5}}{36}$$

Ответ: $r = \frac{1}{4}$, $\angle ACB = 90^\circ$, $S_{ABN} = \frac{5\sqrt{5}}{36}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №4



Найти: r

Решение:

т.к AC и AB касательные к окр. $\Rightarrow \angle OEA = \angle ODA = 90°$

~~$\angle DEX = \alpha \Rightarrow \angle AEY = 90 - \alpha$~~

~~$\angle YAE = \alpha$~~

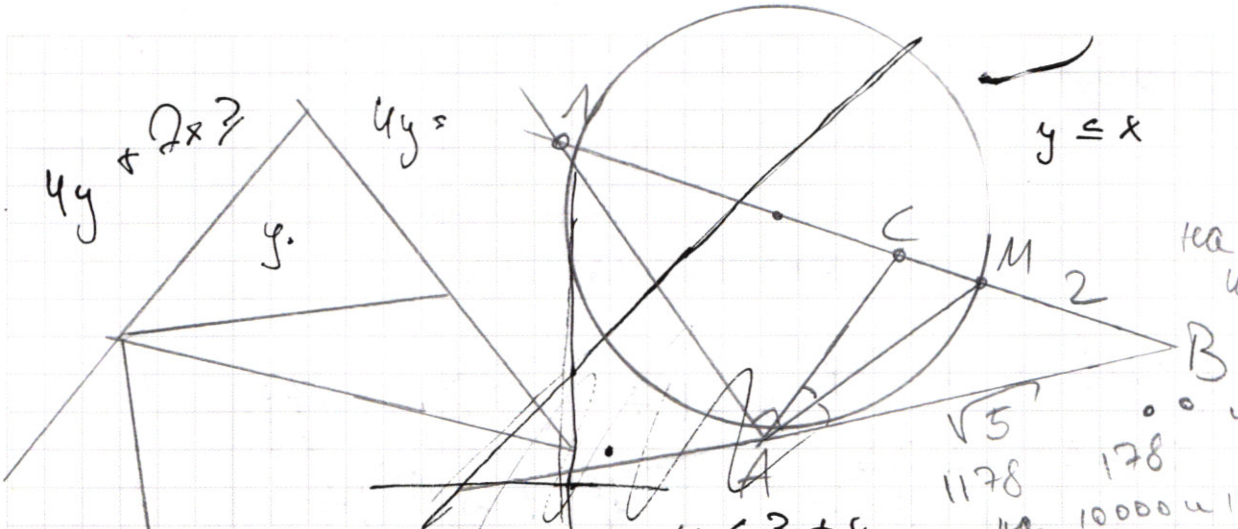
$AE = AD$ (по св-ву степени точки)

по т. Пифагора

$AY^2 = AX^2 - XY^2 = AE^2 - EY^2 = AD^2 - EY^2 = 1{,}25 EY^2$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



$4y + 7x ?$

$4y =$

$y \le x$

на 1000 и 10000

$\sqrt{5}$

1178 178

на 10000 и 100000

$y \le 3 + x$

$\frac{2}{3}$ четных

$\frac{1}{3}$ тройных

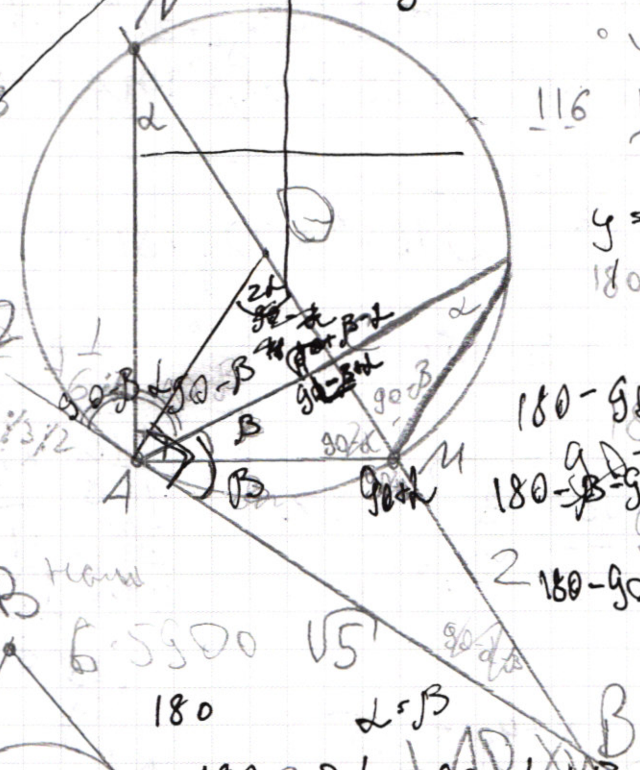
116 117 118 119 120 121

1000 и 10000

$y = 3x + 18$

$90 + \alpha + \alpha +$

$90 - 2\alpha = 180$:(



$\frac{2}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6}$

2950 · 3

$180 - 90 + \beta - \alpha$

$180 - \beta = 90 + \beta - \alpha$

$180 - 90 - \alpha - \beta$

$x = 8 \quad y = 14$

$\frac{2}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6}$

6 5500 $\sqrt{5}$

180 $\alpha = \beta$

$y = \frac{-7x}{4}$ $x = 4$

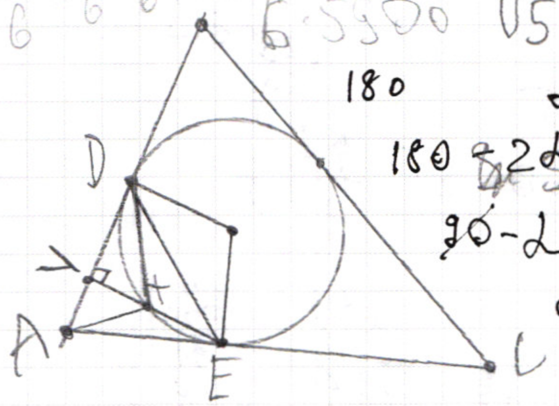
$180 = 2\alpha - 90 + \alpha + \beta$

$90 - \alpha + \beta = 90$

111780

$\alpha = \beta$ $y = 1$ $x = 18$

$14x = 9 \le$



1178 00

$99 + 9$ $4y + 7x = |4y - 7x|$ $x = 0$ $y = \sim$

999 и 99 $y \ge 0$ $x \ge 0$ $y < 0$ $x \le 0$

$9999 + 999$ $y \ge 0$ $x \le 0$ $x =$ $y < 0\ x > 0$

10998 $y > 0$ $x < 0$

$y \le 0$ $x < 0$ $4y + 7x = -4y - 7x$

$4y + 7x = 4y + 7x$ $x \in$ .. $8y = -14x$

$4y + 7x = -4y + 7x$ $8y = 0$ $-4y = -7x$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2-10y+y^2+15=0$ $15-10y\geq 0$ $x=17$ $y=2$

$x-4y=32-23$

$x-4y=9$ $3-2y\geq 0$ $y^2-16y+28=0$

$y<0$ $x\geq 0$ $-2y\geq -3$ $2y\leq 3$ $\begin{cases} y_1+y_2=16 \\ y_1\cdot y_2=28 \end{cases}$ $y_1=14$ $y_2=2$

$2;-2$

$x=4y+9$ $289-64=228$ $y\leq 1{,}5$ тогда $x_1=65$ $x_2=17$

проверка

$\sqrt{(4y+9)^2-16y^2}=\sqrt{16y^2+72y+81-16y^2}=$

$-8+14$ $=\sqrt{72y+81}=3\sqrt{8y+9}$ 65^2

$-8-$

$4y+9+3\sqrt{8y+9}=32$

$8y\geq -14$ $4y+3\sqrt{8y+9}=32$

$-16\geq -28$

$2\sqrt{\ldots}+x+4y=55$

$2\sqrt{\ldots}+4y+9=\cancel{55}=55$

$2\sqrt{\ldots}=46-8y$

$\sqrt{72y+81}=23-4y$

$72y+81=(23-4y)^2$ $:100$

$72y+81=529-184y+16y^2$ $:1000$

$x^2+y^2\geq 10y-15$ $y=2$ $x=20$

$\cancel{72y-448=16y^2}$

$400+4\geq 2$ $16y^2+448-256y=0$ $y^2+28-16y$

$28\cdot 16=168\cdot$ … $=448$; $17\cdot 17=289$; $23\cdot 23=529$; $46\cdot 4=184$; $529-81=448$; $184+72=256$; $448:4=112$; $112:2=56$; $56:2=28$

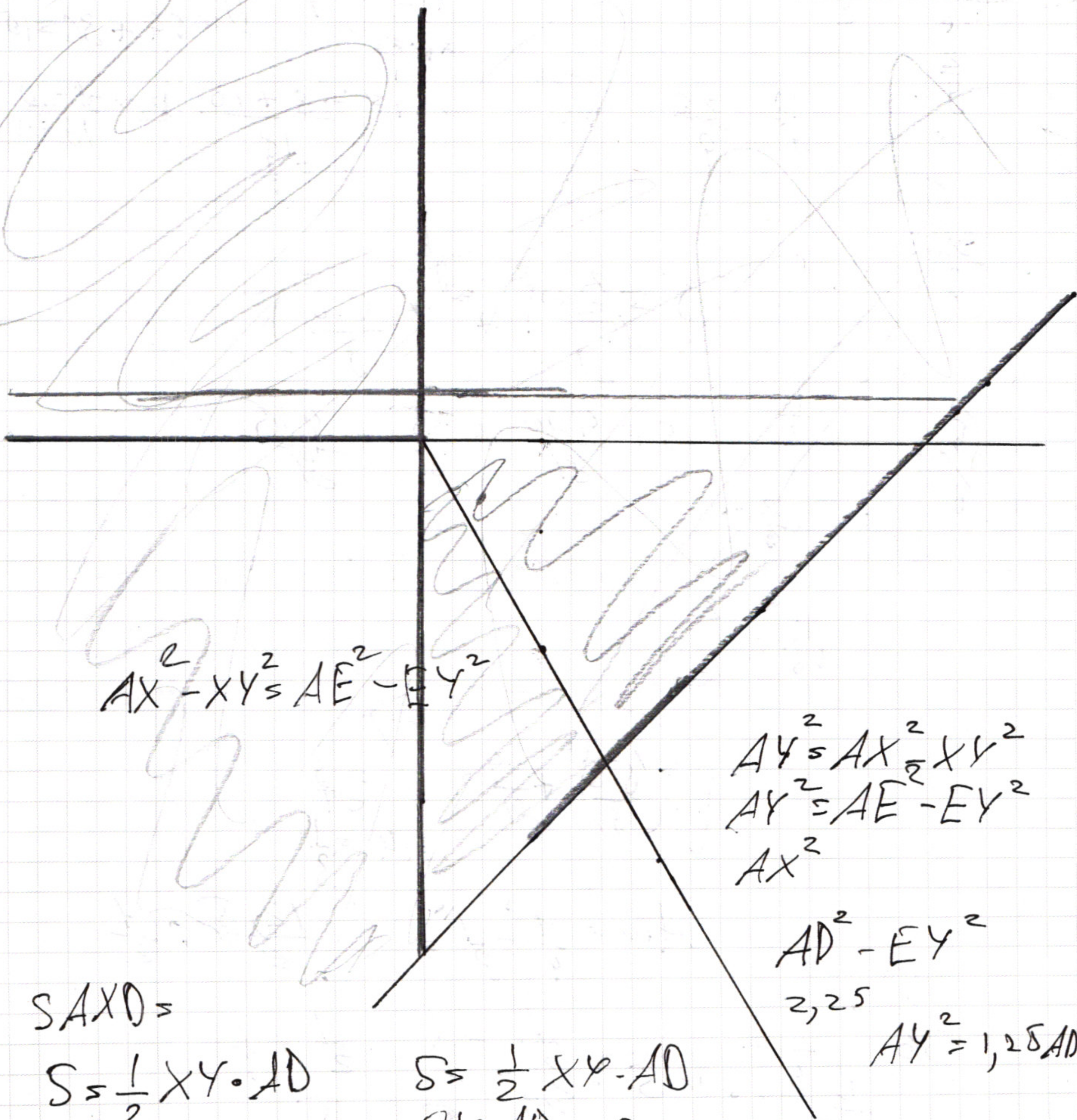
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$AX^2 - XY^2 = AE^2 - EY^2$

$AY^2 = AX^2 - XY^2$

$AY^2 = AE^2 - EY^2$

AX^2

$AD^2 - EY^2$

2,25

$AY^2 = 1,25AD^2$

$S_{AXD} =$

$S = \frac{1}{2} XY \cdot AD$

$S = \frac{1}{2} XY \cdot AD$

$XY \cdot AD = 10$

$AD = 1,5 EY$

$AD =$

$AE = AD$

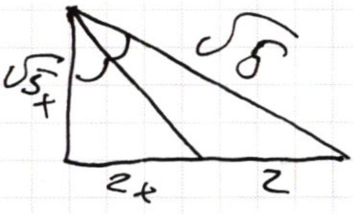
$XY \cdot EY = \frac{10 \cdot 2}{3}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$5 = (2x+2)^2 + 5x^2$

$5 = 4x^2 + 8x + 4 + 5x^2$

$9x^2 + 8x - 1 = 0$

$\cancel{x_1 + x_2 = -\frac{8}{9}}$

$D = 64 + 36 = 10^2$

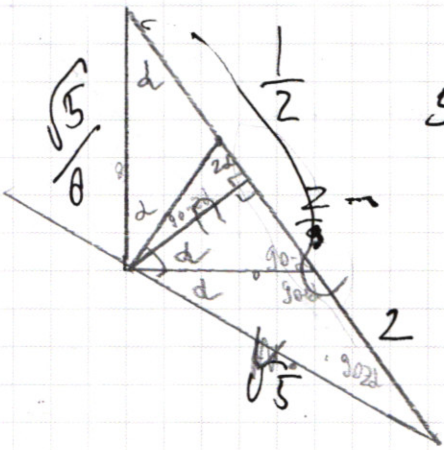
$\frac{2}{9}$

$\frac{18}{9}$ $\frac{20}{9}$ $\sqrt{8}$ $x_1 = \frac{-8+10}{18} = \frac{1}{9}$ $x_2 = \frac{-8-10}{18} = -1$

$\frac{\sqrt{5}}{9}$

$5 = \left(\frac{20}{9}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{9}\right)^2$ $\frac{20}{9}$

$5 = \frac{400}{81} + \frac{5}{81} = \frac{405}{81}$



$2\,0\,2\frac{2}{9}$

$\frac{1}{36} + \frac{5}{9}$

$\frac{AC}{BC} = \frac{OC}{AC}$ $OC = \frac{AC^2}{BC}$

$\frac{5}{81} : \frac{20}{9} = \frac{5 \cdot 9}{81 \cdot 20} = \frac{1}{36}$

$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{9}\right)^2 + \frac{4}{81}}$ $= \frac{9}{81}$

$AM = \frac{1}{3}$

$AN^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} =$ $\frac{12,5}{6} : \frac{1}{2}$

$\frac{5}{36}$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ $\cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

$\frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot 2,5}{6}$

$\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$

$\frac{10\sqrt{5}}{81}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)