

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy}, \\ 2y + x^2 = 9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.
5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{29}$, $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45^\circ$.
6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6, \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leq x \leq 19$, $3 \leq y \leq 19$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3x+2y+6-3x-2y > 6 \\ x^2-2x-3y+y^2 \leq 0 \end{cases}$$

$$(x-1)^2 - 1 + y^2 - 3y + \frac{9}{4} - \frac{3}{4} \leq 0$$

$$(x-1)^2 + (y-\frac{3}{2})^2 \leq \frac{13}{4}$$

$$(x-1)^2 + (y-\frac{3}{2})^2 \leq \frac{13}{4}$$

$$(x-1)^2 + (y-\frac{3}{2})^2 \leq \frac{13}{4}$$

$$1.1) \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 6-3x-2y \geq 0 \\ 2y+3x \leq 6 \end{cases}$$

$$3x+2y+6-3x-2y > 6$$

$$6 > 6$$

∅

$$2.1) \begin{cases} x \leq 0, y \geq 0 \\ 6-3x-2y \geq 0 \end{cases}$$

$$-3x+2y+6-3x-2y > 6$$

$$-6x+6 > 6$$

$$-6x > 0$$

$$x < 0$$

$$1) \begin{cases} x \leq 0, y \geq 0 \\ 3x+2y \leq 6 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x \geq 0, y < 0 \\ 3x+2y \leq 6 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x < 0, y < 0 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 6-3x-2y < 0 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x < 0, y \geq 0 \\ 3x+2y > 6 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x \geq 0, y < 0 \\ 3x+2y > 6 \end{cases}$$

$$1.2) \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 6-3x-2y \leq 0 \\ 3x+2y-6+3x+2y > 6 \end{cases}$$

$$6x+4y > 12$$

$$3x+2y > 6$$

$$2.2) \begin{cases} x < 0, y \geq 0 \\ 6-2y-3x < 0 \end{cases}$$

$$-3x+2y-6+3x+2y > 6$$

$$4y > 12$$

$$y > 3$$

$$6-2y-3x < 6-2 \cdot 3-3x = -3x < 0$$

$$3.1) \begin{cases} x \geq 0, y < 0 \\ 6-3x-2y \geq 0 \end{cases}$$

$$3x-2y+6-3x-2y > 6$$

$$-4y > 0$$

$$y < 0$$

$$4) \begin{cases} x < 0, y < 0 \\ 6-3x-2y \geq 0 \end{cases}$$

$$-3x-2y+6-3x-2y > 6$$

$$-6x-4y > 0$$

$$3x+2y < 0$$

$$3.2) \begin{cases} x \geq 0, y < 0 \\ 6-3x-2y < 0 \end{cases}$$

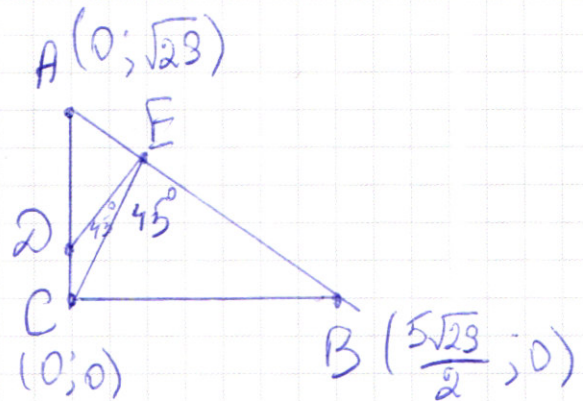
$$3x-2y-6+3x+2y > 6$$

$$6x > 12$$

$$x > 2$$

$$6-3x-2y < 6-3 \cdot 2-2y = -2y < 0$$

$$\begin{cases} x < 0, y \geq 0 \\ x \geq 0, y < 0 \\ x < 0, y < 0 \\ x \geq 0, y \geq 0, 3x + 2y > 6 \\ (x-1)^2 + (y-1.5)^2 \leq 3.25 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ x \geq 0, y \geq 0, 3x + 2y > 6 \\ (x-1)^2 + (y-1.5)^2 \leq 3.25 \end{cases}$$

$$R = \sqrt{3.25}, \text{ центр } (1, 1.5)$$

$$3x + 2y > 6$$

$$2y > 6 - 3x$$

$$y > \frac{6-3x}{2} = 3 - 1.5x$$

$$\left(x - 5 - \sqrt{\frac{725}{4}}\right) \leq 0$$

$$x \geq 5 + \frac{\sqrt{725}}{2} = 17.5$$

$$\frac{\sqrt{725}}{2} = 12.5$$

$$\sqrt{725} = 25$$

$$S = S_{\text{кр}} / 2 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi \cdot (\sqrt{3.25})^2}{2}$$

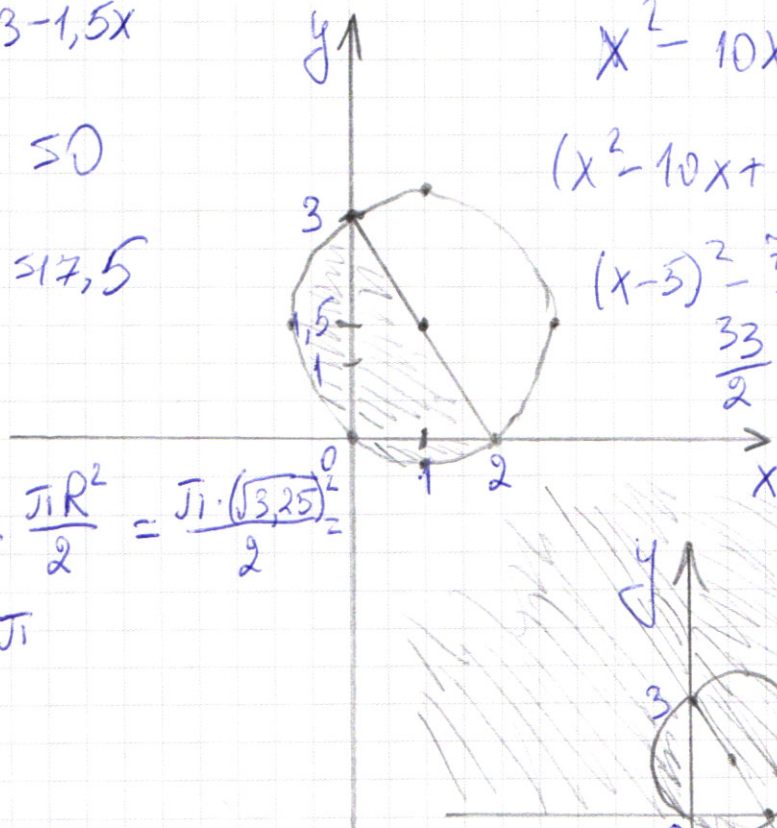
$$= \frac{3.25 \pi}{2} = \frac{13}{8} \pi$$

$$2y > 6 - 3x$$

$$y > 3 - 1.5x$$

$$\frac{140}{8} = \frac{35}{2}$$

$$x \cdot \frac{35^2}{4} - 40 \cdot \frac{35}{2} - 525 =$$

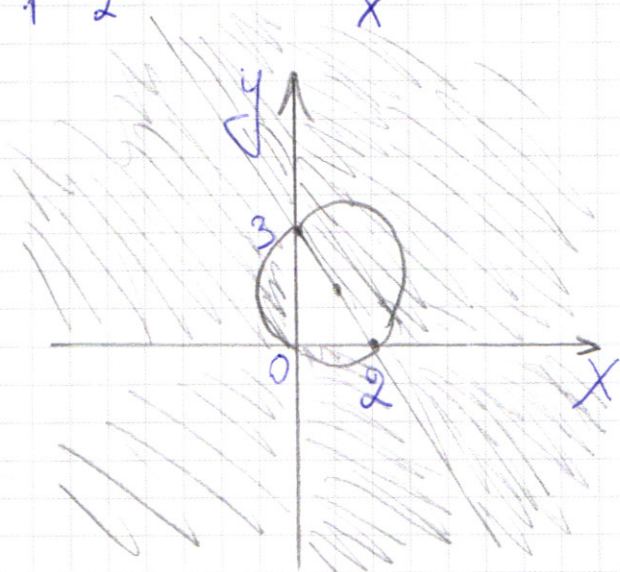


$$x^2 - 10x - \frac{525}{4} = 0$$

$$(x^2 - 10x + 50) - 50 - \frac{525}{4} = 0$$

$$(x-5)^2 - \frac{725}{4} = 0$$

$$\frac{33}{2} \quad \frac{35}{2}$$



$$\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$$(y-2x)^2 = xy$$

$$2y+x^2=9$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy$$

$$2y+x^2=9$$

$$y^2 - 5xy + 4x^2 = 0$$

$$2y+x^2=9$$

$$(y-x)(y-4x) = 0$$

$$2y+x^2=9 \quad (1)$$

$$y=x \rightarrow (1)$$

$$2x+x^2=9$$

$$x^2+2x-9=0$$

$$(x+1)^2-10=0$$

$$(x+1-\sqrt{10})(x+1+\sqrt{10})=0$$

$$\begin{cases} x=\sqrt{10}-1 & y=\sqrt{10}-1 \\ x=-\sqrt{10}-1 & y=-\sqrt{10}-1 \end{cases}$$

$$\sqrt{10}-1 \geq 2 \cdot (\sqrt{10}-1) \text{ - верно}$$

Значит $(\sqrt{10}-1; \sqrt{10}-1)$ - точка.

$$-\sqrt{10}-1 \geq 2 \cdot (-\sqrt{10}-1) \text{ - верно}$$

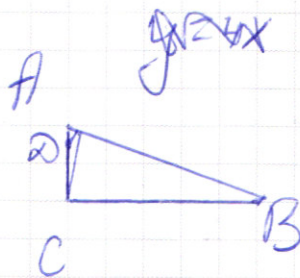
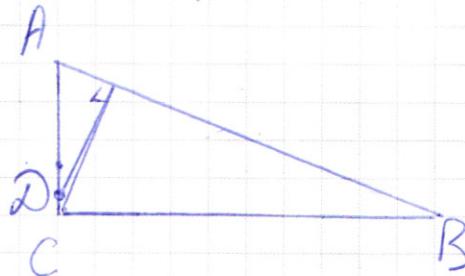
Значит $(-\sqrt{10}-1; -\sqrt{10}-1)$ - точка.

$$\begin{cases} y-2x \geq 0 \\ y \geq 2x \end{cases}$$

$$-\sqrt{10}-1 - 2(-\sqrt{10}-1) =$$

$$5\sqrt{10}$$

$$-x = \sqrt{x}$$



$$y=4x \rightarrow (1)$$

$$2(4x)+x^2 \geq 9$$

$$8x+x^2=9$$

$$x^2+8x+16=9+16$$

$$(x+4)^2-5^2=0$$

$$(x+4-5)(x+4+5)=0$$

$$(x-1)(x+9)=0$$

$$\begin{cases} x=1 & y=4 \cdot 1=4 \\ x=-9 & y=4 \cdot (-9)=-36 \end{cases}$$

$$4 \geq 1+2 \text{ - верно}$$

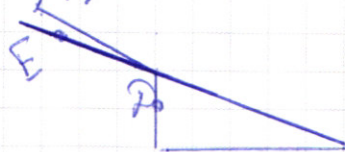
$$-36 \geq 2 \cdot (-9) \text{ - неверно}$$

Значит $(1; 4)$ - точка.

$$-36 \geq 2 \cdot (-9) \text{ - неверно}$$

Значит $(-9; -36)$ - точка.

Ответ: $(-\sqrt{10}-1; -\sqrt{10}-1), (1; 4)$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3|} \leq 0$$

$$x \geq 3$$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4(x-1)}{4x^2 - 12x + x(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{4x^2 - 12x + x^2 - 3x} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{5x^2 - 15x} \leq 0 \quad | \cdot 5$$

$$\frac{(x-3)^2}{x(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{(x-3)^2}{x(x-3)} \leq 0$$

$$1 \leq x \leq 3$$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4(x-1)}{4x^2 - 12x + x(3-x)} \leq 0$$

$$\frac{(x-3)^2}{4x^2 - 12x + 3x - x^2} \leq 0$$

$$\frac{(x-3)^2}{3x^2 - 9x} \leq 0 \quad | \cdot 3$$

$$\frac{(x-3)^2}{x(x-3)} \leq 0$$

$$x \in [1; 3)$$

(AB): $\sqrt{29} - 0,4x \quad 0 \leq x < 1$
(DE): $k = 2,5 \quad \frac{x^2 - 2x + 5 - 4(1-x)}{4x^2 - 12x + x \cdot (3-x)} \leq 0$
(DE): $y = d + 2,5x \quad \frac{x^2 - 2x + 5 - 4 + 4x}{4x^2 - 12x + 3x - x^2} \leq 0$

$$y = \sqrt{29} - 0,4x \quad \frac{x^2 + 2x + 1}{3x^2 - 9x} \leq 0 \quad | \cdot 3$$

$$d + 2,5x = \sqrt{29} - 0,4x$$

$$2,9x = \sqrt{29} - d \quad \frac{(x+1)^2}{x(x-3)} \leq 0$$

$$x = \frac{\sqrt{29} - d}{2,9}$$

$$y = d + 2,5 \cdot \frac{\sqrt{29} - d}{2,9} = \frac{0,4d + 2,5\sqrt{29}}{2,9}$$

$$x \in (0; 1]$$

(CE): $y = kx \quad \frac{x^2 + 2x + 1}{4x^2 - 12x - 3x + x^2} \leq 0$

$$\frac{0,4d + 2,5\sqrt{29}}{2,9} \leq k \leq \frac{\sqrt{29} - d}{2,9} \quad \frac{(x+1)^2}{5x^2 - 15x} \leq 0 \quad | \cdot 5$$

$$k = \frac{0,4d + 2,5\sqrt{29}}{\sqrt{29} - d} \quad \frac{(x+1)^2}{x(x-3)} \leq 0$$

$$x \in \{-1\}$$

Ответ: $x \in (0; 3) \cup \{1\}$

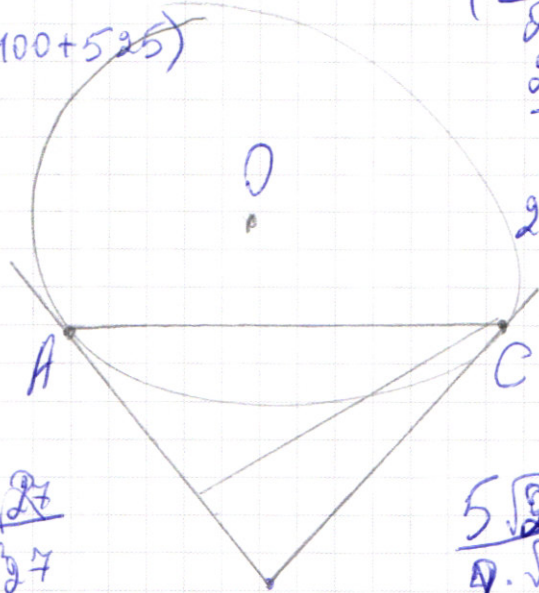
$$D = 1600 + 4 \cdot 4 \cdot 525 = 16(100 + 525)$$

$$\left(\frac{5\sqrt{29}}{2}\right)^2 = 25 \cdot \frac{58}{27} + BE^2 - 2 \cdot \frac{25 \cdot 58}{27} BE \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{25 \cdot 29}{4} - \frac{25 \cdot 29 \cdot 2}{27} BE^2 - \frac{25 \cdot 58 \sqrt{2}}{27} BE$$

$$25 \cdot 29 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{27}\right) = BE^2 - \frac{25 \cdot 29 \cdot 2\sqrt{2}}{27} BE$$

$$25 \cdot 29 \cdot \frac{19}{108} = BE^2 - \frac{25 \cdot 29 \cdot 2\sqrt{2}}{27} BE$$



$$\begin{array}{r} \frac{27}{2} \\ \times \frac{27}{4} \\ \hline 108 \end{array}$$

$$725$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 29 \\ \hline 145 \\ + 58 \\ \hline 725 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -725 \quad | \quad 4 \\ \hline 4 \\ \hline 32 \\ -32 \\ \hline \end{array}$$

$$- \frac{5}{4} \quad B$$

$$AB \cdot DH = 30$$

$$AO \perp CH$$

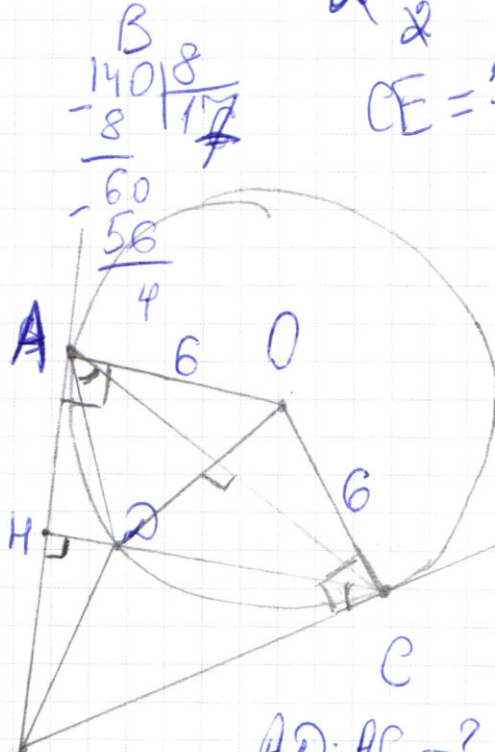
$$29 + \frac{25 \cdot 29}{4} = 29 \cdot \frac{29}{4}$$

$$AB = \sqrt{\frac{29 \cdot 27}{4}}$$

$$\frac{5\sqrt{29}}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{CE}{\sqrt{27}}$$

$$CE = \frac{5\sqrt{58} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{27}} = 5\sqrt{\frac{58}{27}}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 12 \\ \times 13125 \\ \hline 52500 \end{array}$$



$$AB \cdot CH = ?$$

$$S_{ABD} = 15$$

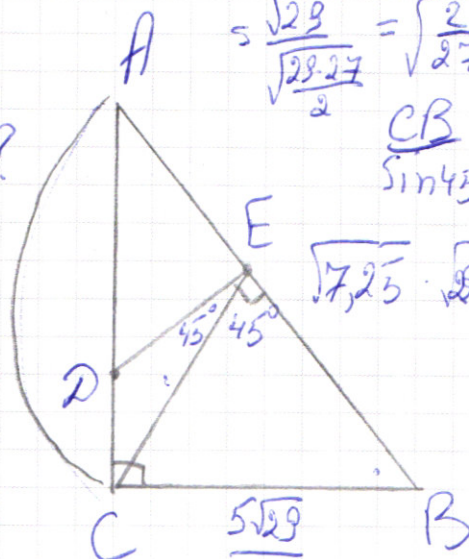
$$R = 6$$

$$\sin \angle ABC = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{29 \cdot 27}} = \sqrt{\frac{2}{27}}$$

$$\frac{CB}{\sin 45^\circ} = \frac{CE}{\sqrt{\frac{2}{27}}}$$

$$AD : AC = ?$$

$$S_{AED} = ?$$



$$AP, AB, BC, CE$$

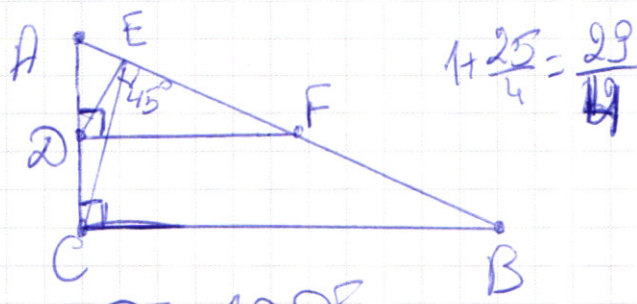
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(ВН): $k = \frac{d - \sqrt{29}}{0,4d + 2,5\sqrt{29}}$

$y = kx + m$

$0 = k \cdot \frac{d - \sqrt{29}}{0,4d + 2,5\sqrt{29}} \cdot \frac{5\sqrt{29}}{2} + m$

$m = \frac{(\sqrt{29} - d) \cdot 5\sqrt{29}}{(0,4d + 2,5\sqrt{29}) \cdot 2}$

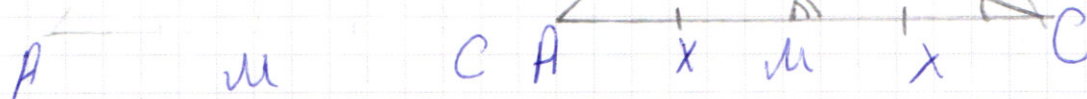


$2DE = \frac{AD \cdot DF}{AF}$

$\sqrt{29}^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \sqrt{29}^2 = \frac{\sqrt{29}^2}{4}$

(ВН): $y = \frac{d - \sqrt{29}}{0,4d + 2,5\sqrt{29}} x + \frac{(\sqrt{29} - d) \cdot 5\sqrt{29}}{(0,4d + 2,5\sqrt{29}) \cdot 2}$

$y = 0,4d + 2,5\sqrt{29}$



$(x, 2x, 300 - 3x)$

$x \in \mathbb{N}, 2x \in \mathbb{N}, 300 - 3x \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow x \text{ от } 1 \text{ до } 99$

$x \in \mathbb{N} \Rightarrow 2x \in \mathbb{N}$

$300 - 3x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{N}$

$x < 2x + 300 - 3x$

$2x < x + 300 - 3x$

$300 - 3x < x + 2x$

$2x < 300$

$4x < 300$

$6x > 300$

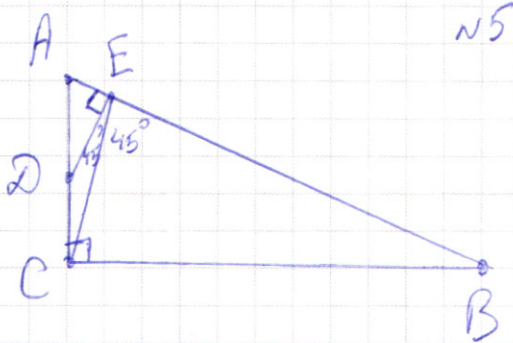
$x < 150$

$x < 75$

$x > 50$

$x \in \mathbb{N}, x \in [51; 74]$. Всего $74 - 51 + 1 = 24$ числа.

Ответ: 24.



$$AC = \sqrt{29}$$

$$BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$$

$$\angle CED = 45^\circ$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \quad \text{— по т. Пифагора}$$

$$AB^2 = (\sqrt{29})^2 + \left(\frac{5\sqrt{29}}{2}\right)^2 = 29 + \frac{25 \cdot 29}{4} = 29 \cdot \left(1 + \frac{25}{4}\right) = 29 \cdot \frac{29}{4}$$

$$AB = 29 \frac{1}{2}$$

$$\sin \angle CBA = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{29}}{29 \frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{29}}{29}$$

по т. синусов:

$$\frac{BC}{\sin 45^\circ} = \frac{CE}{\sin \angle CBA}$$

$$CE = \frac{BC \cdot \sin \angle CBA}{\sin 45^\circ} = \frac{\frac{5\sqrt{29}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{29}}{29}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 5\sqrt{2}$$

по т. косинусов:

$$CB^2 = CE^2 + EB^2 - 2 \cdot CE \cdot EB \cdot \cos 45^\circ$$

$$\left(\frac{5\sqrt{29}}{2}\right)^2 = (5\sqrt{2})^2 + EB^2 - 2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot EB \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{25 \cdot 29}{4} = 25 \cdot 2 + EB^2 - 10EB$$

$$EB^2 - 10EB + 50 - 181,25 = 0$$

$$EB^2 - 10EB - 131,25 = 0 \quad | \cdot 4$$

$$4EB^2 - 40EB - 525 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 40^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-525) = 1600 + 16 \cdot 525 = 16 \cdot (100 + 525) = 16 \cdot 625 =$$

$$= (4 \cdot 25)^2 = 100^2$$

$$EB = \frac{40 + 100}{8} = \frac{140}{8} = 17,5 > AB \Rightarrow E \notin AB \quad \text{такого не бывает. Ответ: может быть}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4) \quad x < 0, \quad y < 0$$

$$6 - 3x - 2y \geq 6 > 0$$

$$-3x - 2y + 6 - 3x - 2y > 6$$

$$-6x - 2y > 0$$

$$3x + 2y < 0 \quad \text{— вертикаль}$$

x, y — любые

$$\left\{ \begin{array}{l} x < 0, \quad y < 0 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 6 - 3x - 2y < 0 \\ x < 0, \quad y \geq 0, \quad 6 - 3x - 2y \geq 0 \\ x \leq 0, \quad y > 3 \\ x \geq 0, \quad y < 0, \quad 6 - 3x - 2y \geq 0 \\ x > 0, \quad y < 0, \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0 \end{array} \right.$$

$$x^2 - 2x + y^2 - 3y \leq 0$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 3y + 2,25) \leq 3,25$$

$$(x-1)^2 + (y-1,5)^2 \leq 3,25 \quad \text{— круг, } R = \sqrt{3,25}, \text{ центр — } (1; 1,5).$$

Окружность проходит через точки $(0; 0), (0; 3), (2; 0)$

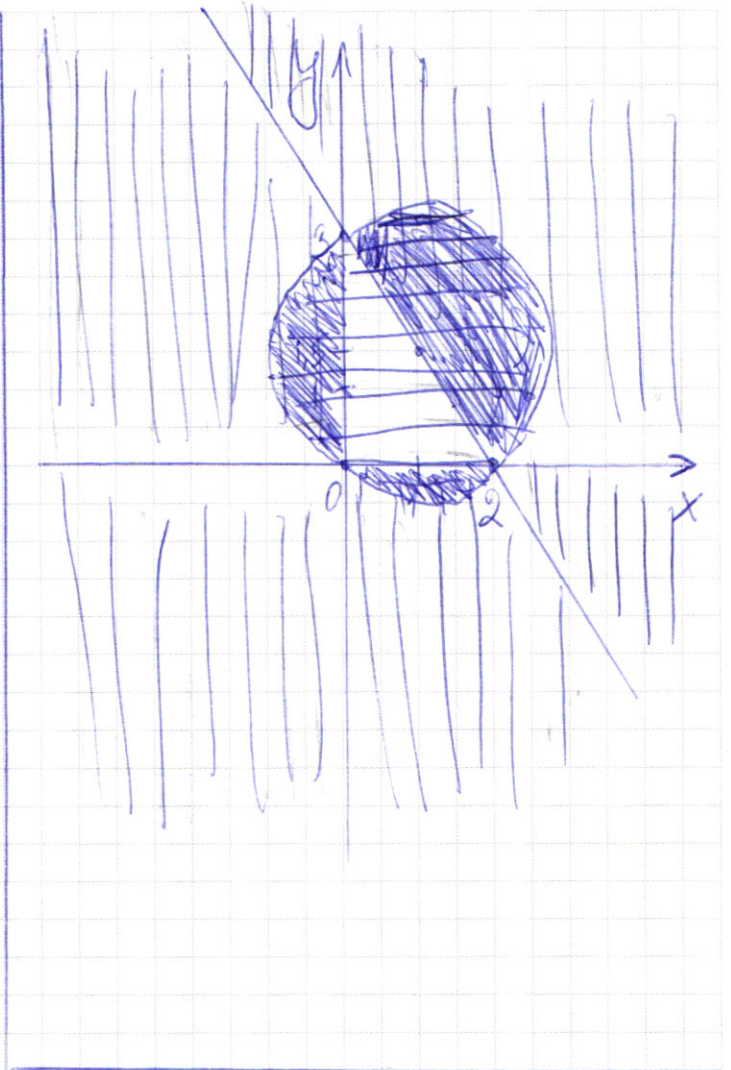
Вертикальной штриховкой отмечено $|3x| + |2y| + 6 - 3x - 2y > 6$

Горизонтальной штриховкой отмечено $x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0$

Закрашено все пересечение

$$S = S_{\text{кр}} - S_{\text{тр}} = \pi \sqrt{3,25}^2 - \frac{3 \cdot 2}{2} = 3,25\pi - 3$$

Ответ: $3,25\pi - 3$.



$$\sqrt{10} - 1 \geq 2 \cdot (\sqrt{10} - 1)$$

$$1 \geq 2 \quad \text{неверно}$$

Значит $(\sqrt{10} - 1; \sqrt{10} - 1)$ - нест.

$$-\sqrt{10} - 1 \geq 2 \cdot (-\sqrt{10} - 1)$$

$$1 \leq 2 \quad \text{верно}$$

Значит $(-\sqrt{10} - 1; \sqrt{10} - 1)$ - корни

Ответ: $(-\sqrt{10} - 1; -\sqrt{10} - 1), (1; 4)$.

$$4 \geq 1 \cdot 2 \quad \text{верно}$$

Значит $(1; 4)$ - корни

$$-36 \geq 2 \cdot (-9)$$

$$4 \leq 2 \quad \text{неверно}$$

Значит $(-9; -36)$ - нест.

нб

$$\begin{cases} |3x+2y|+6-3x-2y > 6 & (1) \\ x^2-2x-3y+y^2 \leq 0 & (1) \end{cases}$$

$$1.1) x \geq 0, y \geq 0, 6-3x-2y \geq 0 \quad 1.2) x \geq 0, y \geq 0, 6-3x-2y < 0$$

$$3x+2y+6-3x-2y > 6$$

$$6 > 6$$

\emptyset

$$3x+2y-6+3x+2y > 6$$

$$6x+4y > 12$$

$$3x+2y > 6 \quad \text{верно}$$

x, y - любые

$$2.1) x < 0, y \geq 0, 6-3x-2y \geq 0$$

$$-3x+2y+6-3x-2y > 6$$

$$-6x > 0$$

$$x < 0 \quad \text{верно}$$

x, y - любые

$$2.2) x < 0, y \geq 0, 6-2y-3x < 0$$

$$-3x+2y-6+3x+2y > 6$$

$$4y > 12$$

$$y > 3$$

$$6-2y-3x < 6-2 \cdot 3-3x = -3x < 0$$

$$3.1) x \geq 0, y < 0, 6-3x-2y \geq 0$$

$$3x-2y+6-3x-2y > 6$$

$$-4y > 0$$

$$y < 0 \quad \text{верно}$$

x, y - любые

$$3.2) x \geq 0, y < 0, 6-3x-2y < 0$$

$$3x-2y-6+3x+2y > 6$$

$$6x > 12$$

$$x > 2$$

$$6-3x-2y < 6-3 \cdot 2-2y = -2y < 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \quad (1)$$

$$1) \quad y-2x < 0 \\ \sqrt{xy} < 0$$

∅

$$2) \quad y-2x > 0$$

$$(y-2x)^2 = xy$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy$$

$$y^2 - 5xy + 4x^2 = 0$$

$$y^2 - xy - 4xy + 4x^2 = 0$$

$$y(y-x) - 4x(-x+y) = 0$$

$$(y-x)(y-4x) = 0$$

$$\begin{cases} y=x \\ y=4x \end{cases}$$

$$2.1) \quad y=x \rightarrow (1)$$

$$2x+x^2=9$$

$$(x^2+2x+1)=10$$

$$(x+1)^2-10=0$$

$$(x+1-\sqrt{10})(x+1+\sqrt{10})=0$$

$$\begin{cases} x=\sqrt{10}-1, & y=\sqrt{10}-1 \\ x=\sqrt{10}-1, & y=-\sqrt{10}-1 \end{cases}$$

$$2.2) \quad y=4x$$

$$2(4x)+x^2=9$$

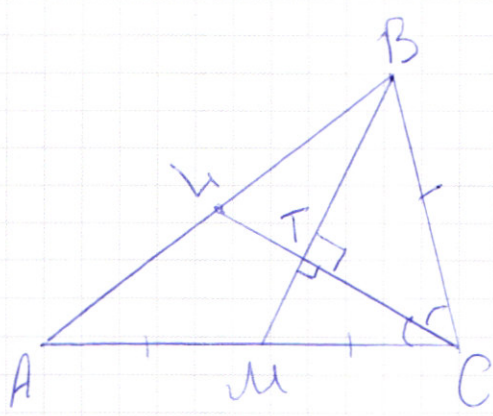
$$8x+x^2=9$$

$$(x+4)^2=25$$

$$(x+4)^2-5^2=0$$

$$(x-1)(x+9)=0$$

$$\begin{cases} x=1, & y=4 \cdot 1=4 \\ x=-9, & y=4 \cdot (-9)=-36 \end{cases}$$



1) рассмотрим $\triangle BTC$ и $\triangle MTC$

они при-угонные
 $\triangle BTC$ - общая

$\angle MCT = \angle BCT$ - по опред. биссектрисы.
 $\Rightarrow \triangle BTC = \triangle MTC$ по ^{гипотенузе} стороне и остому углу.
 $MC = BC$ - как соотв. элем. равные \triangle ков. $AC = 2MC = 2BC$

Значит все такие \triangle ки имеют длины стороны $x, 2x$ и $300 - 3x$

$\Rightarrow x \in \mathbb{N}, 0 < x < 100$, при $x = 0$ одна сторона будет 50
 и при $x = 100$ одна сторона будет 0 .

Также должно выполняться нерав-ва \triangle ка:

$x < 2x + 300 - 3x$	$2x < x + 300 - 3x$	$300 - 3x < x + 2x$
$2x < 300$	$4x < 300$	$6x > 300$
$x < 150$	$x < 75$	$x > 50$

$x \in \mathbb{N}, x \in [51; 74]$. Всего $74 - 51 + 1 = 24$ \triangle ка.

при таких x все стороны разные, а значит мы посчитали каждый \triangle к ровно по одному разу.

($x = 2x, x = 0$; $x = 300 - 3x, x = 75$; $300 - 3x = 2x, x = 50$)

Ответ: 24.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3|} \leq 0$$

1) $x \geq 3$

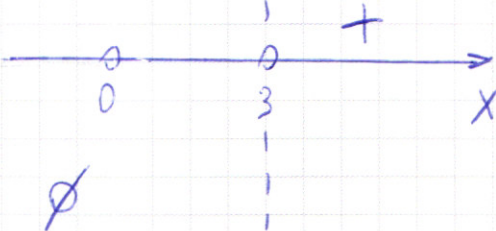
$$|x-3| = x-3, |x-1| = x-1, |x| = x$$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4(x-1)}{4x^2 - 12x + x(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{4x^2 - 12x + x^2 - 3x} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{5x^2 - 15x} \leq 0 \quad | \cdot 5$$

$$\frac{(x-3)^2}{x(x-3)} \leq 0$$



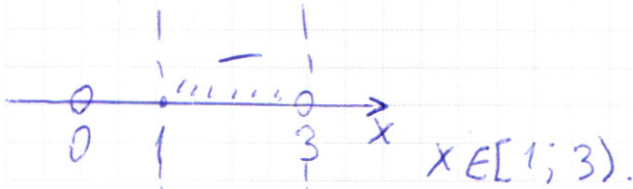
2) $1 \leq x < 3$

$$|x-3| = -x+3, |x-1| = x-1, |x| = x$$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4(x-1)}{4x^2 - 12x + x(3-x)} \leq 0$$

$$\frac{(x-3)^2}{4x^2 - 12x + 3x - x^2} \leq 0$$

$$\frac{(x-3)^2}{3x(x-3)} \leq 0$$



$x \in [1; 3)$

3) $0 \leq x < 1$

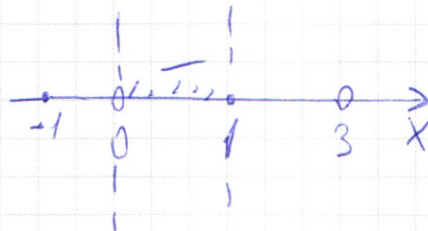
$$|x-3| = -x+3, |x-1| = -x+1, |x| = x$$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4(1-x)}{4x^2 - 12x + x(3-x)} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4 + 4x}{4x^2 - 12x + 3x - x^2} \leq 0$$

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{3x(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{(x+1)^2}{x(x-3)} \leq 0$$



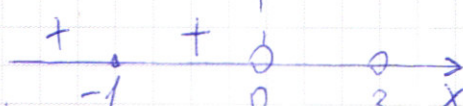
$x \in [0; 1)$

4) $x < 0$

$$|x-3| = 3-x, |x-1| = 1-x, |x| = -x$$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 + 4(x-1)}{4x^2 - 12x + (-x)(-x+3)} \leq 0$$

$$\frac{(x+1)^2}{5x(x-3)} \leq 0$$



$x \in \{-1\}$

Ответ: $x \in \{-1\} \cup [0; 3)$