# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство
$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром $O$ касается прямых $AB$ и $BC$ в точках $A$ и $C$ соответственно. Высота $CH$ треугольника $ABC$ пересекает эту окружность в точках $C$ и $D$. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника $ABD$ равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике $ABC$ на катете $AC$ и гипотенузе $AB$ отмечены точки $D$ и $E$ соответственно, такие что $DE\perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника $AED$, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе
$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2\leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа $p$. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 18$, $1\leqslant y\leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leq 0$$

Рассмотрим знаменатель:

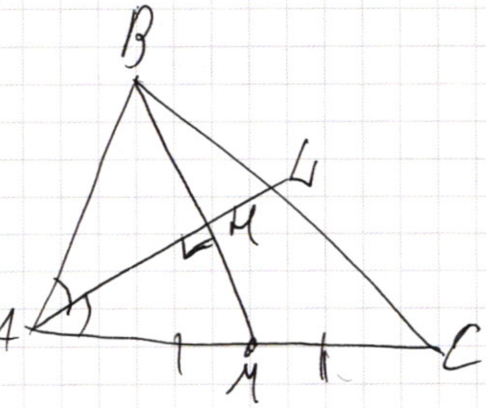
$2(x^2-2x)+|x^2-2x|$. Если $x^2-2x>0$, то знаменатель $>0$, если $x^2-2x<0$, то знаменатель $=x^2-2x<0$. Если $x^2-2x=0$ то знаменатель $=0$, не подходит. Значит по ОДЗ: $x\neq 0$ и $x\neq 2$. Если $x^2-2x>0$, то $x\in(-\infty;0)\cup(2;\infty)$, ~~З~~ числитель тогда должен быть $\leq 0$. Если $x\leq 3$, то числитель $-$ $x^2-6x+10+2x-6=x^2-4x+4=(x-2)^2\leq 0$. Это возможно при $x=2$, но не проходит по ОДЗ. Если $x>3$, $x^2-6x+10-2x+6=x^2-8x+16=(x-4)^2\leq 0$, значит $x=4$. Этот корень подходит. Если $x^2-2x<0$, то $x\in(0;2)$. $x<3$. Числитель должен быть $>0$, но он равен $x^2-6x+10+2x-6=$ $=x^2-4x+4=(x-2)^2>0$, это возможно при любом $x\neq 2$. Значит $x\in(0;2)$ подходит.

Ответ: $x\in(0;2)\cup\{4\}$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№2




Заметим, что $AH$ – высота и биссектриса в $\triangle ABM$, значит он равнобедренный, значит $AB=BM=\frac{1}{2}AC$. Заметим, что любой треугольник с одной стороной вдвое больше другой подходит. (образуется равнобедренный треугольник, в котором проведена биссектриса, значит она и высота) Значит 3-я сторона может быть любая удовлетворяющая неравенству треугольника. Пусть $AB=a$, $AC=2a$, тогда $BC=600-3a$. Значит

$a<600-3a<3a$

$4a<600<6a$

$150>a>100$. Тогда всего возможных $a=150-100-1=49$. Каждое $a$, характеризует все 3 стороны и соответственно треугольник (стороны не могут совпадать, так как если существуют $a_1$ и $a_2$ такие, что:

$\begin{cases} a_1=2a_2 \\ 2a_1=600-3a_2 \\ 600-a_1=a_2 \end{cases}$, то $a_2=200>150$ противоречие

или $\begin{cases} a_1=600-3a_2 \\ 2a_1=a_2 \\ 600-a_1=2a_2 \end{cases}$

$a_1=\frac{600}{7}$ – не целое.).

Ответ: 49.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 ОДЗ: $xy \geq 0$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2y\geq 0 \\ x^2-4xy+4y^2=xy \\ x+y^2=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x\geq 2y \\ x^2-5xy+4y^2=0 \\ x=5-y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq 2y \\ (5-y^2)^2-5(5-y^2)y+4y^2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x\geq 2y \\ y^4-10y^2+25-25y+5y^3+4y^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq 2y \\ y^4+5y^3-6y^2-25y+25=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq 2y \\ (y-1)(y^3+6y^2-25)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq 2y \\ (y-1)(y+5)(y^2+y-5)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[ \begin{array}{l} y=1 \\ y=-5 \\ y=\frac{-1+\sqrt{21}}{2} \\ y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2} \end{array} \right. \\ x\geq 2y \end{cases}$$

если $y=1$, то $x=4$, $x\geq 2y$, по ОДЗ проходит

если $y=-5$, то $x=-20$, $x \ngeq 2y$.

если $y=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$, то $x=\frac{\sqrt{21}-1}{2}$, $x\ngeq 2y$

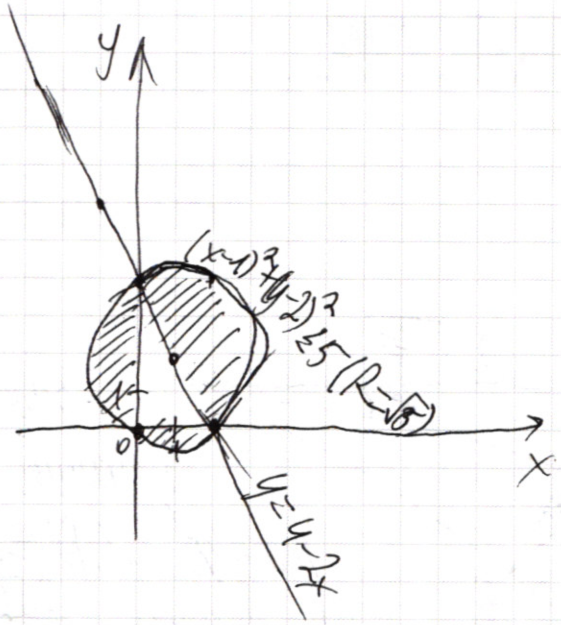
если $y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$, то $x=\frac{-1-2\sqrt{21}}{2}$, $x\geq 2y$, по ОДЗ проходит

Ответ: $(4;1)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}; \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)$.

№6

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y| \geq 4 \\ x^2-2x+1+y^2-4y+4-5 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y| > 4 \\ (x-1)^2+(y-2)^2 \leq 5 \end{cases}$$




если $4-2x-y>0$, то

$|2x|+|y|+4-2x-y>4$

$|2x|-2x+|y|-y>0$.

если $x$ и $y \geq 0$, то $|2x|-2x+|y|-y=0$ (не подходит).

если $x$ или $y<0$, то $|2x|-2x+|y|-y>0$ (подходит).

Если $4-2x-y<0$, то

$|2x|+|y|+2x+y-4>4$

$|2x|+2x+|y|+y>8$. Все подходящие точки $(y>4-2x)$ имеют обе координаты больше 0. Значит:

$|2x|+2x+|y|+y=4x+2y>4x+2(4-2x)=8$. Тогда любые точки

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2 \leq 5 \\ y>4-2x \end{cases}$$, подходят. Тогда получившаяся фигура — круг без треугольника внутри. Её площадь:

$= \pi R^2 - \frac{2 \cdot 4}{2} = 5\pi - 4$.

Ответ: $5\pi-4$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

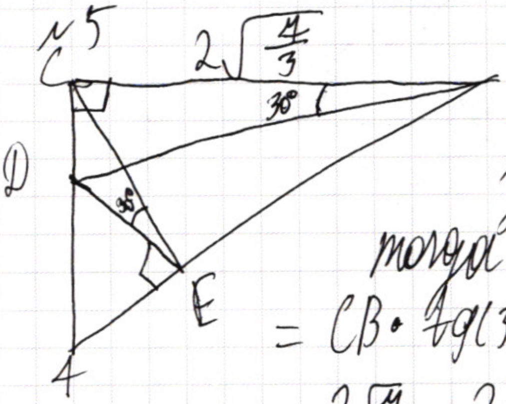
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5




Заметим, что $\angle ACB = 90° = \angle AED$, значит $BEDC$ — вписанный четырёхугольник, тогда $\angle CBD = \angle CED = 30°$. Тогда $CD = CB \cdot tg(30°) = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{7}}{3}$. Тогда $AD = AC - CD = 7 - \frac{2\sqrt{7}}{3} = \frac{21-2\sqrt{7}}{3}$. Значит $\frac{AD}{AC} = \frac{21-2\sqrt{7}}{3 \cdot 7} = \frac{21-2\sqrt{7}}{21} = 1 - \frac{2\sqrt{7}}{21}$. $\Delta AED \sim \Delta ACB$ ($\angle AED = \angle ACB$, ~~Ответ~~ $\angle DAE = \angle CAB$), значит $\cancel{\frac{DE}{AC}}$ $\frac{DE}{CB} = \frac{AE}{AC}$,

$DE = \frac{AE \cdot CB}{AC} = \frac{AE\, 2\sqrt{7}}{\sqrt{3} \cdot 7} = \frac{AE \cdot 2}{\sqrt{21}}$.

$DE^2 + AE^2 = AE^2 + \frac{4AE^2}{21} = \frac{21AE^2 + 4AE^2}{21} = \frac{25AE^2}{21} = AD^2 = \left(\frac{21-2\sqrt{7}}{3}\right)^2$ $\quad AE = \frac{\sqrt{21}(21-2\sqrt{7})}{5 \cdot 3}$

$S_{ADE} = \frac{DE \cdot AE}{2} = \frac{AE^2}{\sqrt{21}} = \frac{21(21-2\sqrt{7})^2}{225\sqrt{21}}$.

Ответ: $S = \frac{21(21-2\sqrt{7})^2}{225\sqrt{21}}$, $\frac{AD}{AC} = 1 - \frac{2\sqrt{7}}{21}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \le 0$

$|2x|+|y|+|4-2x-y|>4$

$\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$, $2x+y+$

$2x^2-4x+|x^2-2x|$

$2(x^2-2x)+|x^2-2x|$

если $x^2-2x\ge 0$, $3(x^2-2x)\ge 0$

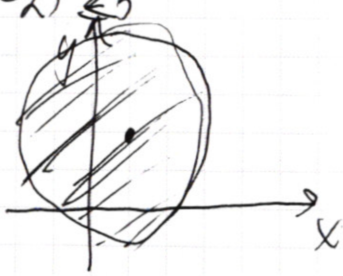
если $x^2-2x\le 0$, $2x^2-4x-x^2+2x=x^2-2x\le 0$

$x^2-2x\ne 0$

$x\ne 0 \quad x\ne 2$

$x^2-2x+1+y^2-4y+4-5\le 0$

$(x-1)^2+(y-2)^2\le 5$




если

$x\in(-\infty;0)\cup(2;\infty)$

$x<3$

$x^2-6x+10+2x-6=x^2-4x+4=(x-2)^2\le 0$

$\cancel{x=2}$

$x>3$

$x^2-6x+10-2x+6=x^2-8x+16=(x-4)^2\le 0$

$x=4$

$x\in(0;2)$

$x<3$

$16-24+10-2=0$

$x^2-6x+10+2x-6=(x-2)^2\ge 0$

$x\in(0;2)$

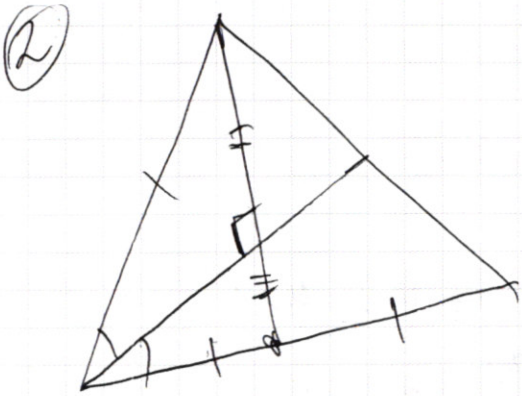
☑ черновик ☐ чистовик

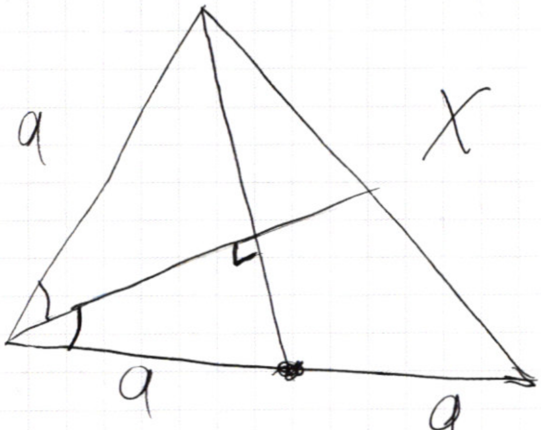
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

②






$a \quad 2a \quad X$

$3a > X > a \qquad 4a < P < 6a$

600

$\cancel{5^4 + 5^4 = 6 \cdot 5^2 + 5 - 25}$

$a > 100$

$a < 150$

3.

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$ ОДЗ: $xy \geq 0$

$x-2y \geq 0$

$101 - 149$

$49$

$\cancel{y^4 + 5y^3 - 6y^2 - 25y + 25 =}$

$= 0$

$\cancel{x^2y + xy^3 = x^2 + 4y^2}$

$\begin{cases} x-2y \geq 0 \\ x^2 - 4xy + 4y^2 = xy \\ x+y^2=5 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+4y^2 = 5xy \\ x+y^2 = 5 \end{cases}$

$x = 5-y^2$

$y^4 - 10y^2 + 25 + 4y^2 =$

$= 25y - 5y^3$

$\cancel{y^2}=2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|2x|+|y|+|4-2x-y|>4$

$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ 4-2x-y>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ 2x+y<4 \end{cases}$ $\cancel{4>4}$ $\begin{cases} x<0 \\ y>0 \\ 2x+y<4 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ y<0 \\ 2x+y<4 \end{cases}$

$y<4-2x$ $\quad$ $y<4-2x$

$-2x+y+4-2x-y>4$ $\quad$ $2x-y+4-2x-y>4$

$\begin{cases} x>0 \\ y<0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ 2x+y>4 \end{cases}$ $2x+y+2x+y-4>4$ $\quad$ $4-2y>4$

$2y+4x-8>0$ $\quad$ $\cancel{4}2y<0$

$y+2x-4>0$

$y>4-2x$ $\quad$ $y>-2x+4$

$\begin{cases} x<0 \\ y<0 \end{cases}$ $-2x-y+4-2x-y=-2y-4x+4>4$

$2y+4x<0$

$\cancel{2y}$ $y<2x$

$(1;4)$

$\cancel{2+4+2}$

$\cancel{x>0}$

$\cancel{1-2-16+16}$

$f(p)=p$ $\quad$ $f(p_1p_2)=f(p_1)+f(p_2)=p_1+p_2$

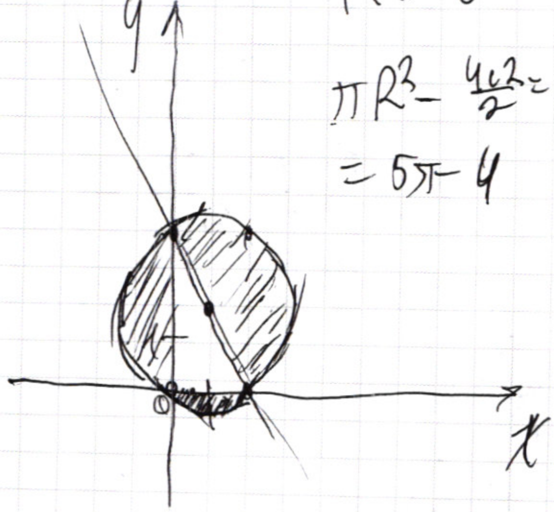
$f(p)=f(p)+f(1)$

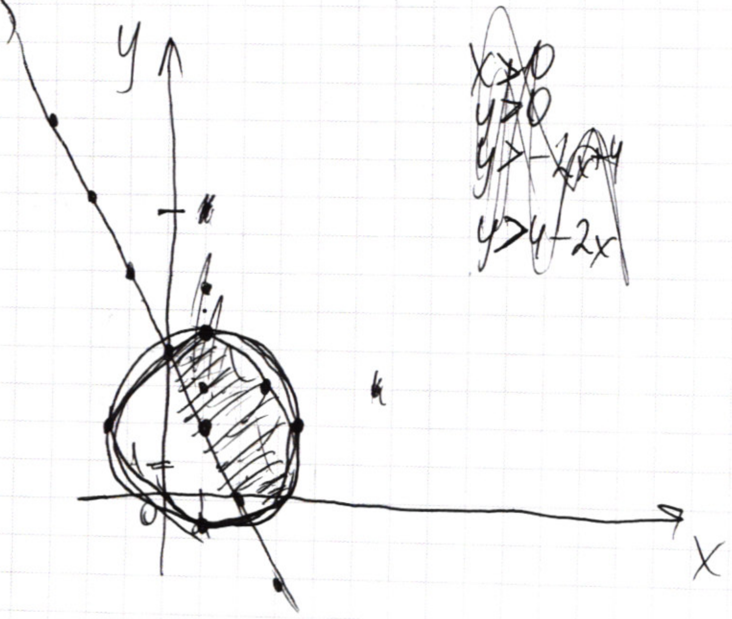
$f(1)=0$

$\pi R^2-\frac{4\cdot 2}{2}=$

$=5\pi-4$

$\cancel{x>0}$
$\cancel{y>0}$
$\cancel{y>-2x+4}$
$\cancel{y>4-2x}$




☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(p_1 P) = f(p_1) + f(P)$

$p_1$

$f(p_2 P) = p_2 + f(P)$

$f(p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} \dots p_n^{k_n}) = k_1 p_1 + \cancel{k_2} p_2 + \cancel{k_3} p_3 + \dots + \cancel{k_n} p_n$

$f(\frac{3}{2}) = f(3) + f(\frac{1}{2}) = 3 + f(\frac{1}{2})$

$\cancel{f(p_1 \dots)}$

$a_1 = 2a_2$

$2a_1 = 600 - 3a_2$

$600 - a_1 = a_2$

$a_2 = 200$

$a_1 = 400$

$a_1 = 600 - 3a_2$

$2a_1 = a_2$

$a_1$

$600 - a_1 = 2a_2$

$a_1 = 600 - 3a_1$

$a_1 = 150$

$2a_1 = 600 - 3a_1$

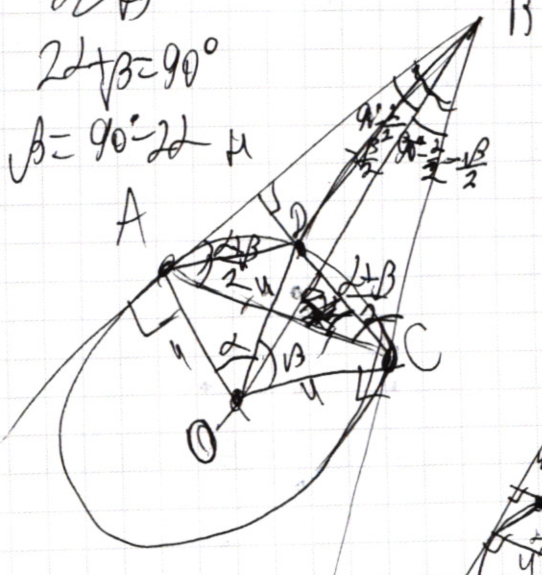
$a_1 = 120$

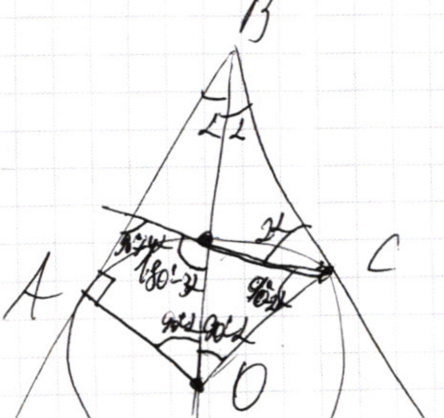
120 240 240

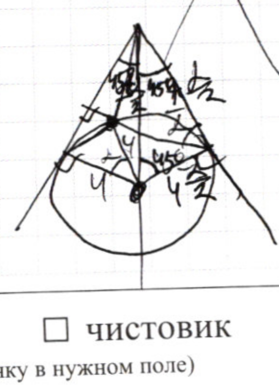
$\cancel{\angle AB}$

$2\alpha + \beta = 90°$

$\beta = 90° - 2\alpha$ и







☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

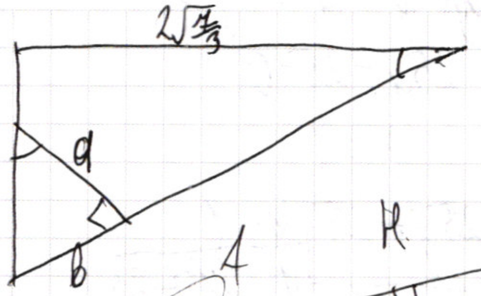
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

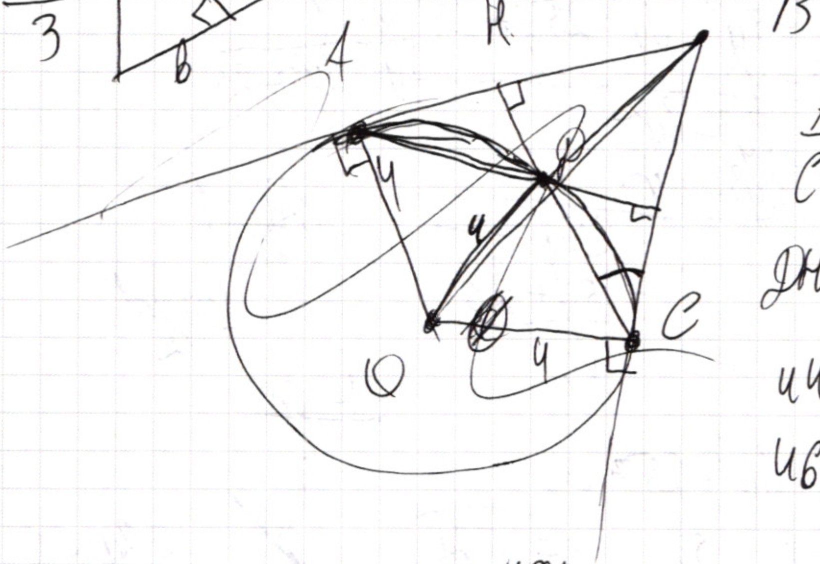
4. 7

$\frac{21-2\sqrt{7}}{3}$




$\frac{b}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$

$b = \frac{a\sqrt{21}}{2}$

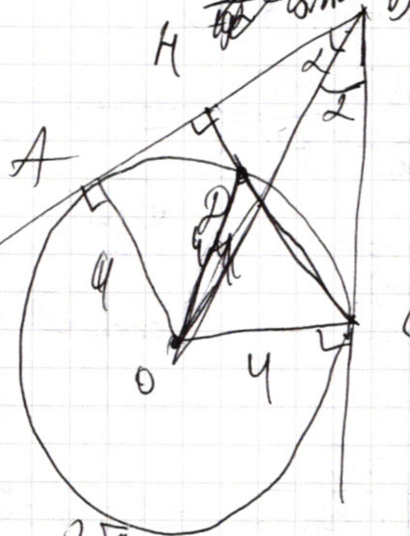



$\frac{AB}{CH} = \frac{BC}{CH} = \frac{1}{\sin\angle ABC}$

$DH \cdot AB = 12$

$441 + 28 - 84\sqrt{7}$

$469 - 84\sqrt{7}$




$AB = \frac{4}{tg 2}$

$\frac{4}{tg 2}$

$\cos 2\alpha = \cancel{\frac{HB\,tg2}{4}} =$

$= \cancel{\frac{HB \sin 2}{4\cos 2}}$

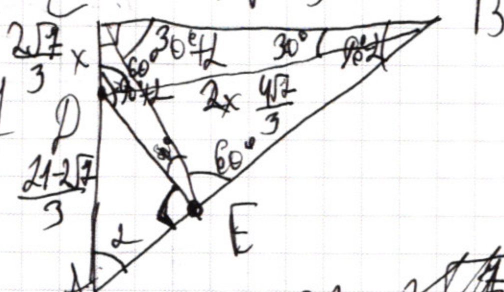
(5)

$\frac{21-2\sqrt{7}}{21} = 1 - \frac{2\sqrt{7}}{21}$

$\frac{4\cdot 7}{9} + \frac{4\cdot 7}{3}\cdot 3 =$

$= \frac{4\cdot 7\cdot 4}{9}$

$2\sqrt{\frac{7}{3}}$




$3x^2 = \frac{4\cdot 7}{3}$

$x = \frac{2\sqrt{7}}{3}$

③.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

$x^2-4yx+4y^2=xy$

$x=5-y^2$

$y^4-10y^2+25-20y+4y^3+4y^2=5y-y^3$

$y^4+5y^3-6y^2-25y+25=0$

$y=1$ $x=4$

$x=5-\frac{11-\sqrt{21}}{2}=$

$=\frac{\sqrt{21}-1}{2}$

$-\frac{y^4+5y^3-6y^2-25y+25}{y^4-y^3} \big| \frac{y-1}{y^3+6y^2-25}$

$-\frac{6y^3-6y^2}{6y^3-6y^2}$

$-\frac{-25y+25}{-25y+25}$

$0$

$\frac{\sqrt{21}-1}{2}$

$\frac{11+\sqrt{21}}{2}$

$y=\frac{\sqrt{21}-1}{2}=$

$=\frac{22-2\sqrt{21}}{4}=$

$\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$

$y^3+6y^2-25=0$

$=\frac{11-\sqrt{21}}{2}$

$y=-5$ $x=-20$ X $x-2y<0$

$-5^3+6\cdot5^2-5^2=-5^3+5^3=0$

$-\frac{y^3+6y^2-25}{y^3+5y^2} \big| \frac{y+5}{y^2+y-5}$

$-\frac{y^2-25}{y^2+5y}$

$-\frac{-5y-25}{-5y-25}$

$0$

$-(6+\sqrt{21})+1+\sqrt{21}=$

$=-5<0$

$\frac{\sqrt{21}+1}{2}$

$\frac{22+2\sqrt{21}}{4}$

$y^2+y-5=0$

$y=\frac{-1\pm\sqrt{1+20}}{2}=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}>0$

$y^2=\frac{21-2\sqrt{21}+1}{2}=11-\sqrt{21}$

$x=\sqrt{21}-6<0$

$\frac{-1-\sqrt{21}}{2}<0$

$y^2=\frac{22+2\sqrt{21}}{2}=11+\sqrt{21}$ $x=-(6+\sqrt{21})$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)