МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE\perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED=45°$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6, \\ x^2-2x-3y+y^2\leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 19$, $3\leqslant y\leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) $\triangle AED$:

// $\angle A$ из теор. sin в $\triangle ABC$:

$$\frac{CB}{\sin A} = AB$$

$$\sin A = \frac{CB}{AB} = \frac{\sqrt{29}}{14,5} = \frac{2\sqrt{29}}{29}$$

$$AD = DE \cdot \cos \angle ADE = DE \cdot \cos \angle B \quad (\text{из. п.3})$$

т.к. $\angle B = \angle AED$

$$\cos \angle B = \sqrt{1 - \sin^2 \angle B} = \sqrt{1 - \frac{25 \cdot 29}{29^2}} = \frac{2\sqrt{29}}{29}$$

по осн. триг. тожд.

$\Downarrow$

$$AD = \frac{2\sqrt{29} \cdot DE}{29}$$

$$AE = AD \cdot \sin ADE = \frac{2\sqrt{29} \cdot DE}{\cancel{29}} \cdot \frac{5\sqrt{29}}{29} = \frac{10DE}{29}$$

6) $$\sin \angle ADE = \sin (\underbrace{180^\circ - \angle ADE}_{\angle CDE}) = \sin \angle B = \frac{5\sqrt{29}}{29}$$

$\triangle CDE$, по теор. sin:

$$\frac{CE}{\sin CDE} = \frac{DE}{\sin DCE} = \frac{DC}{\sin CED}$$

$$CD = \frac{\sin 45^\circ \cdot CE}{\sin CDE} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 5\sqrt{2}}{\frac{5\sqrt{29}}{29}} = \sqrt{29}$$

$\Downarrow$

$$AD = AC - CD = \frac{5\sqrt{29}}{2} - \sqrt{29} = \frac{3\sqrt{29}}{2}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{\frac{3\sqrt{29}}{2}}{\frac{5\sqrt{29}}{2}} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

7) из п. 3: $$S_{AED} = \frac{AD^2 \cdot S_{ABC}}{AB^2} = \frac{9 \cdot \cancel{29} \cdot 5 \cdot \cancel{29}}{\cancel{4} \cdot (\frac{29}{2})^2} = 45$$

Ответ: $S_{AED} = 45$; $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$.

Задача №7.

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $a; b$ – любые $\boxed{\text{положит.}}$ рац. числа

$f(p) = p$, где p – простое число

$3 \leq x \leq 19$, $3 \leq y \leq 19$

$\boxed{f(x/y) < 0}$ $x; y$ – ?

Функция f делает из числа сумму его простых делителей, т.е. она раскладывает число на простые множители, а потом их складывает

$\Rightarrow$ т.к. все числа положительны, то $f(\ldots) > 0$

$\Rightarrow$ для $f(x/y) < 0$ не будет никаких пар (0 пар)

Ответ: 0.

Задача №6.

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6 & (2) \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0 & (1) \end{cases}$$

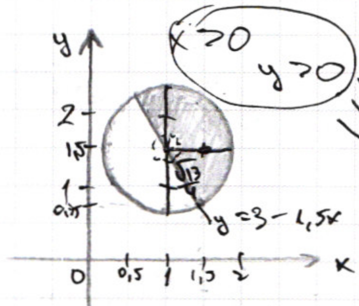
S – ?

// (1): $x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 3y + \underbrace{(1,5)^2}_{2,25} \leq 3,25$

$(x-1)^2 + (y-1,5)^2 \leq \left(\frac{\sqrt{13}}{4}\right)^2$ – окружность

$R = \frac{\sqrt{13}}{4}$ $O(1; 1,5)$



$x > 0$
$y > 0$

// (2): $|3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6$

$y \leq 1,5 + \frac{\sqrt{13}}{4}$

$x \leq 1 + \frac{\sqrt{13}}{4}$

$3x + 2y > 6$, т.к. если $3x + 2y \leq 6$, то $\underbrace{|3x| + |2y|}_{x} + |6 - x| = 6$

$\boxed{6 - x + x = 6}$

$S_{иск.} = S_{з.ф.}$

см. стр. 7.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow \quad S_{иск.} = S_{з.ф.} = \frac{1}{2} S_{\text{кр.}} = \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{13}{16} = \frac{13\pi}{8}$

Ответ: $\frac{13\pi}{8}$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача N° 1.

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\le 0$$

IV, III, II, I; 0, 1, 3, x

I
$$\begin{cases} x\ge 3 \\ \dfrac{x^2-2x+5-4x+4}{4x^2-12x+x^2-3x}\le 0\end{cases} \quad \begin{cases} x\ge 3 \\ \dfrac{(x-3)^{\cancel{2}}}{5x\cancel{(x-3)}}\le 0\end{cases}$$

① $\varnothing$; $x\in(0;3)$

ОДЗ: $\begin{cases}x\ne 0\\ x\ne 3\end{cases}$

II
$$\begin{cases} 1\le x<3 \\ \dfrac{x^2-2x+5-4x+4}{4x^2-12x+3x-x^2}\le 0\end{cases} \quad \begin{cases} 1\le x<3 \\ \dfrac{(x-3)^{\cancel{2}}}{3x\cancel{(x-3)}}\le 0\end{cases} \quad \boxed{x\in[1;3)}$$ ②

ОДЗ: $\begin{cases}x\ne 0\\ x\ne 3\end{cases}$

III
$$\begin{cases} 0< x<1 \\ \dfrac{x^2-2x+5+4x-4}{4x^2-12x-x^2+3x}\le 0\end{cases} \quad \begin{cases} 0\le x<1 \\ \dfrac{(x+1)^2}{3x(x-3)}\le 0\end{cases} \quad \boxed{x\in(0;1)}$$ ③

ОДЗ: $\begin{cases}x\ne 0\\ x\ne 3\end{cases}$

IV
$$\begin{cases} x<0 \\ \dfrac{x^2-2x+5+4x-4}{4x^2-12x+x^2-3x}\le 0\end{cases} \quad \begin{cases} x<0 \\ \dfrac{(x+1)^2}{5x(x-3)}\le 0\end{cases} \quad \boxed{x=-1}$$ ④

ОДЗ: $\begin{cases}x\ne 0\\ x\ne 3\end{cases}$

$\Downarrow$ ①: $\varnothing$ (нет. реш.) $\Rightarrow$ не учитываем!

$$\left[\begin{array}{ll} x\in[1;3) & ② \\ x\in(0;1) & ③ \\ x=-1 & ④ \end{array}\right. \Rightarrow x\in\{-1\}\cup(0;3)$$

Ответ: $x\in\{1\}\cup(0;3)$.

Задача N° 3.

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9\end{cases}$$ ①

Заметим, что в ур-ии ① $y-2x\ge 0$, т.к. $y-2x=\sqrt{xy}$, а $\sqrt{b}$ всегда ≥ 0.

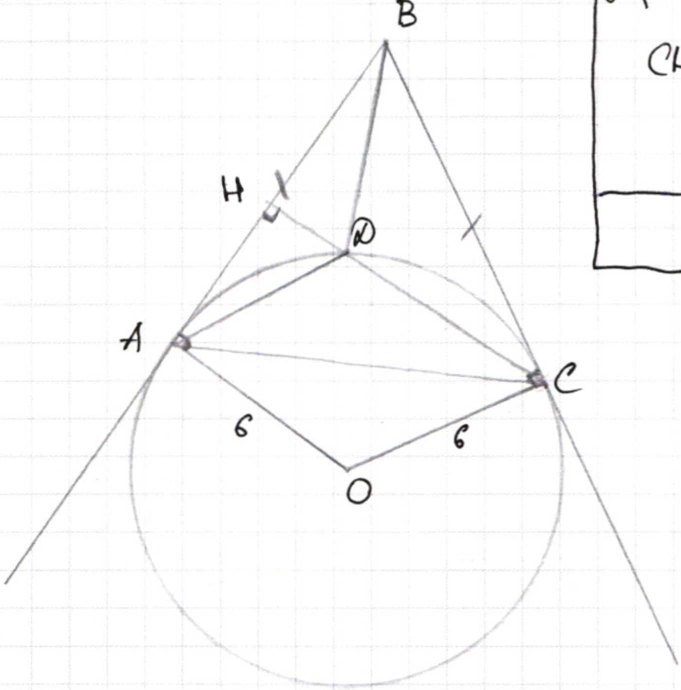
Итак, $y-2x\ge 0 \Rightarrow y\ge 2x$

Возведём ① в квадрат получим систему:

см. на след. листе. продолж. на стр. 2.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Задача №:4.



Дано:

Окр. с ц. O, AB и BC - кас, (·)A и (·)C - т. кас.
CH - выс. △ ABC,
CH ∩ окр. = D

$S_{ABO} = 15$, $R = 6$

$\frac{AB}{CH}$ - ?

Решение:

1) AB = BC (по теор.) - отрезки касат., провед. из одной точки (·B)

2) $S_{ABO} = 15 = \frac{1}{2} \cdot HD \cdot AB$

$\Downarrow$

$AB \cdot HD = 30$

$AB = \frac{30}{HD}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy \\ y\geq 2x \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \quad \begin{cases} y\geq 2x \\ y^2-xy-4xy+4x^2=0 \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \quad \begin{cases} y\geq 2x \\ y(y-x)-4x(y-x)=0 \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y\geq 2x \\ (y-4x)(y-x)=0 \quad ② \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \xrightarrow{1}$$

// ②: $(y-4x)(y-x)=0$

$$\left[\begin{array}{l} y=x \\ y=4x \end{array}\right.$$

$\downarrow 2$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=4x \end{array}\right. \\ y\geq 2x \\ 2y+x^2=9 \quad ③ \end{cases}$$

выполн. только, когда $y=x=0$, но если подставлять эти знач. в ур-ие ③: $0+0=9$ – неверно

выполн. всегда, кроме отриц. знач. $\Rightarrow \boxed{x\geq 0}$ – усл. ⊛

// Остаётся только 1 случай:

$$\begin{cases} y=4x \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=4x \\ 8x+x^2-9=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=4x \\ x^2+8x-9=0 \quad ④ \end{cases}$$

// ④: $x^2+8x-9=0$

$D=64+36=100$

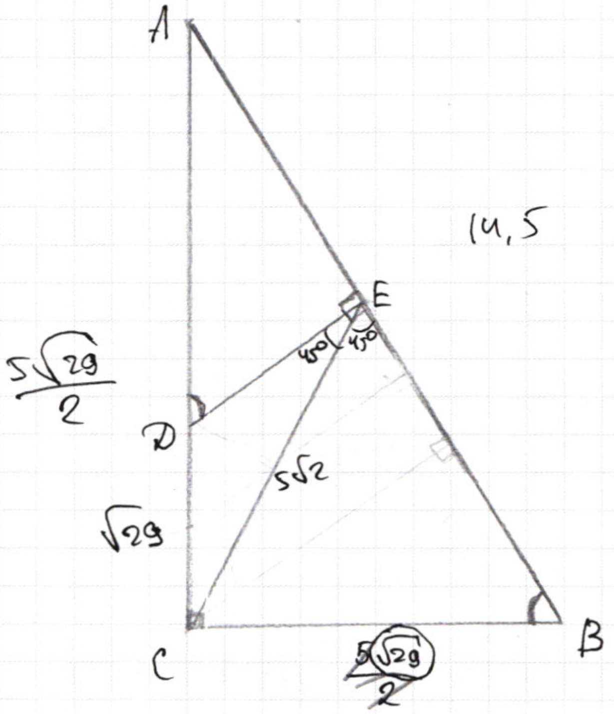
$x_{1,2}=\frac{-8\pm 10}{2}$ $\quad \left[\begin{array}{l} x=-9 \\ x=1 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} y=4x \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-9 \end{array}\right. \end{cases}$ $\boxed{x\geq 0}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-9 \\ y=-36 \end{cases} \end{array}\right.$

– не подх. по усл. ⊛

#ответ даю в виде: $(x;y)$

Ответ: $(1;4)$.

Задача №5.



Дано:

ΔABC – прямоуг.

$D \in AC$, $E \in AB$

$DE \perp AB$

$BC = \sqrt{29}$; $AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$; $\angle CED = 45^0$

S_{AED} – ? $\frac{AD}{AC}$ – ?

Решение:

1) ΔABC – п/у., по т. Пифагора:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$AB = \sqrt{(\sqrt{29})^2 + \left(\frac{5\sqrt{29}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{29 \cdot 29}{4}} =$$

$$= \frac{29}{2} = 14,5.$$

2) $$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} =$$

$$= \frac{5\sqrt{29} \cdot \sqrt{29}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \cdot 29}{4}$$

3) $\Delta AED \sim \Delta ABC$ (по I пр.): $\angle A$ – общий, $\angle E = \angle C = 90^\circ$ $\Rightarrow$ $\boxed{\angle B = \angle ADE}$

$\Downarrow$

$\frac{AD}{AB} = k$, по теор.: $\frac{S_{AED}}{S_{ABC}} = k^2 = \frac{AD^2}{AB^2}$

4) по теор. sin в ΔABC:

$$\frac{AC}{\sin B} = AB \Rightarrow \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{5\sqrt{29}}{2 \cdot 14,5} = \frac{5\sqrt{29}}{29}$$

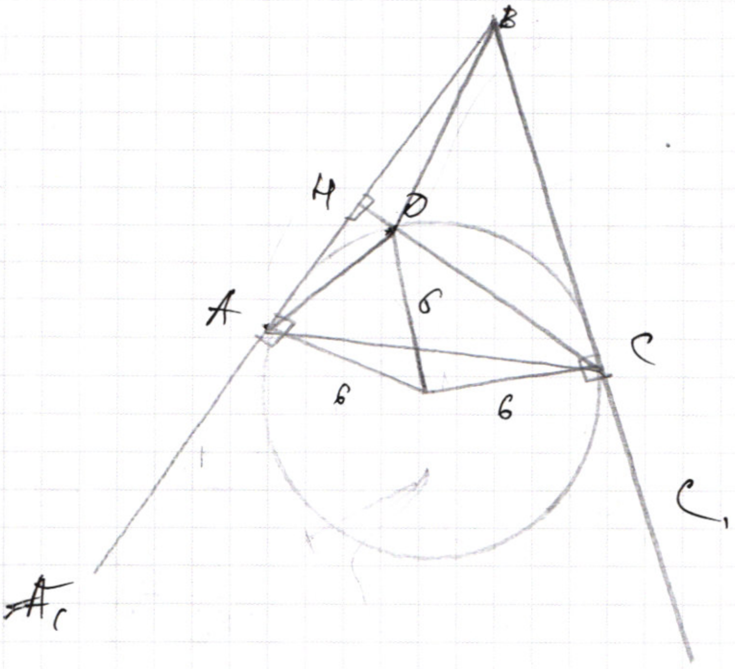
ΔCEB, по теор. sin:

и $\angle CED = \angle CEB = 45^0$
$\angle CEB = 180^0 - 90^0 - 45^0 = 45^0$

$$\frac{CB}{\sin CEB} = \frac{CE}{\sin B}$$

$$CE = \frac{\sin B \cdot CB}{\sin CEB} = \frac{5\sqrt{29} \cdot \sqrt{29}}{29 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 5\sqrt{2}$$

см на стр.5.



$AB = BC$

$\frac{AB}{CH} - ?$

$S_{AHO} = 15.$

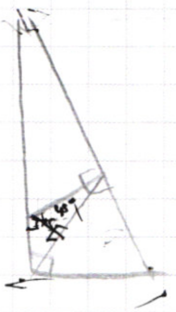
$\frac{HO \cdot AB}{2} = 15$

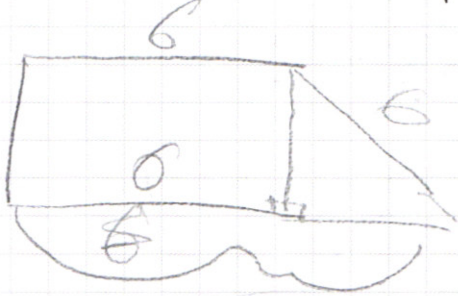
$HO \cdot AB = 30$

$AB = \frac{30}{HO}$

$\frac{30}{HO} : HO$

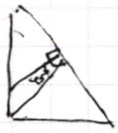
$\frac{2\sqrt{29}}{29}$





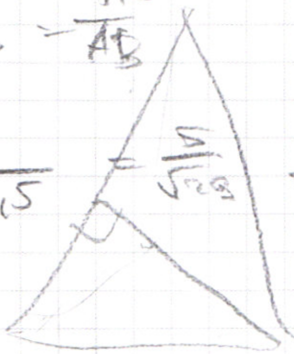
$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

$\frac{AC}{\sin AB} = AB$



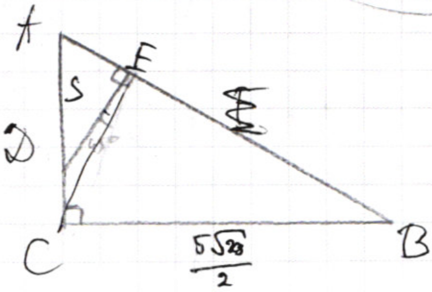
$\sin AB = \frac{AC}{AB}$

$\frac{5\sqrt{29}}{2 \cdot 14{,}5} = \frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{5\sqrt{29}}{29}$

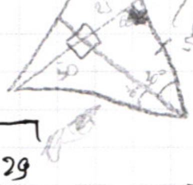


S −?

8
29
×29
261
58
116



$\frac{AD}{DC} - ?$



841

$AC = \sqrt{29}$

$AB^2 = \sqrt{29 + \frac{25 \cdot 29}{4}}$

$\frac{725}{4} + 29 =$

$AB = \frac{29}{2} = 14{,}5$

$AB^2 = 29 +$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\dfrac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x||x-3|} \le 0$

IV III II I, 0 1 3 x

I $\begin{cases} x \ge 3 \\ \dfrac{x^2-2x+5-4x+4}{4x^2-12x+x^2-3x} \le 0 \end{cases}$

$\Downarrow$ $\dfrac{x^2-6x+9}{5x^2-15x} \le 0$

$\dfrac{(x-3)^{\cancel{2}}}{5x\cancel{(x-3)}} \le 0$

ОДЗ: $x \ne 3$, $x \ne 0$

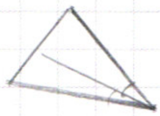
$+ \quad - \quad +$; 0, 3, x

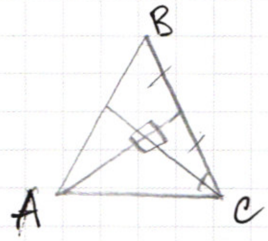
II $\begin{cases} 1 \le x < 3 \\ \dfrac{(x \cancel{2} - 3)^2}{4x^2-12x - x^2+3x} \le 0 \end{cases}$

III $\begin{cases} 0 \le x < 1 \\ \dfrac{x^2-2x+5+4x-4}{4x^2-12x-x^2+3x} \end{cases}$

IV $\begin{cases} x < 0 \\ \dfrac{(x+\cancel{2})^2}{5\cancel{x}(x-3)} \end{cases}$

2. $P_{ABC} = 300$





$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy$

3. $\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy} \quad |\cdot 2 \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$ $\quad y = \dfrac{9-x^2}{2}$

$\dfrac{9-x^2}{2} - 2x = \sqrt{\dfrac{9-x^2x}{2}}$

$y^2 - 5xy + 4x^2 = 0$

$y^2 - xy - 4xy + 4x^2 = 0$

$y(y-x) - 4x(y-x) = 0$

$(y-4x)(y-x) = 0$

$x^2 + 4x = 9 - 2\sqrt{xy}$

$y - 2x \ge 0$

$\begin{cases} 2y - 4x = 2\sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$ $\ominus$

$y \ge 2x$

$2y \ge 4x$