МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE\perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2\leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 18$, $1\leqslant y\leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

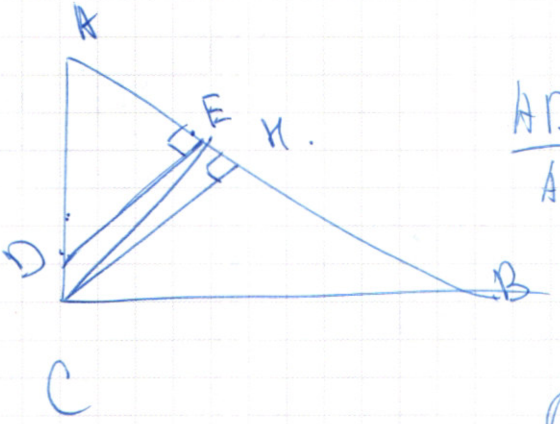
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\frac{AD}{AC}$

$\frac{2}{\sqrt{3}}$

CH =

AED $2\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot\sqrt{7} = \frac{\cancel{77}}{\sqrt{3}}$

$AC = \sqrt{7}$

CH = 2.

$BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$

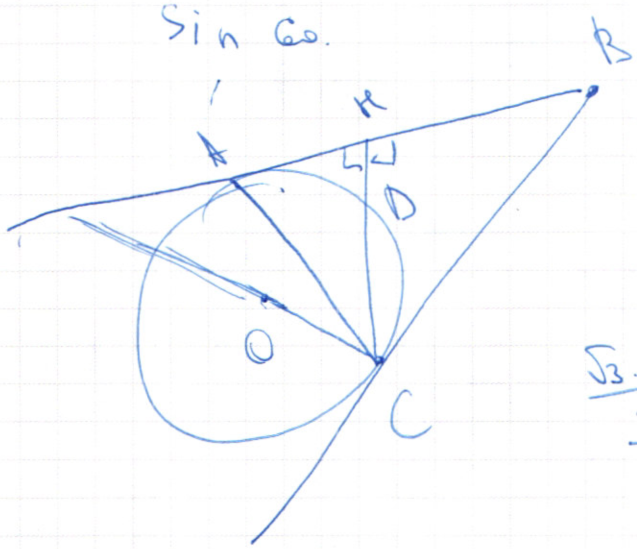
$\angle CED = 30^\circ$

Sin 120.

$AB = \cancel{49}\ 7 + 4\frac{7}{3}$

Sin 60.

$\frac{28+21}{3}$ $\quad 4\frac{7}{3}$



$\frac{7}{\sqrt{3}}$

$\frac{\sqrt{3}\cdot 7}{3}$

$\frac{CH}{2R}$

$\cancel{CH = CB}$

$\sqrt{HD\cdot CH}$.

$\frac{AB + \cancel{AH}}{AB} = \frac{CH}{2R + x} = \frac{CB}{CB + y}$

$\frac{CH}{2R + \frac{y^2}{2R}} = \frac{CB}{CB + y}$

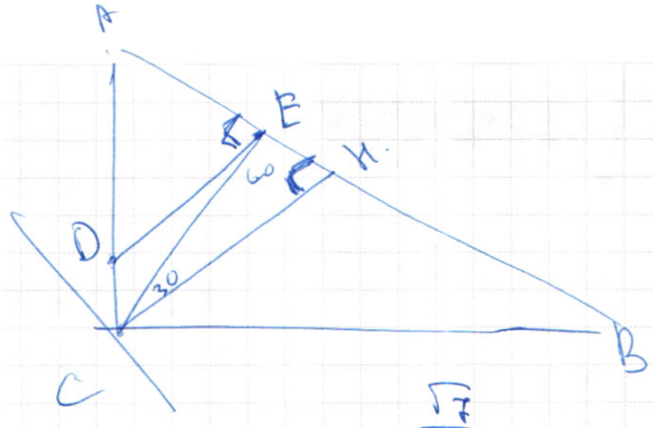
$y^2 = 2R\cdot x$

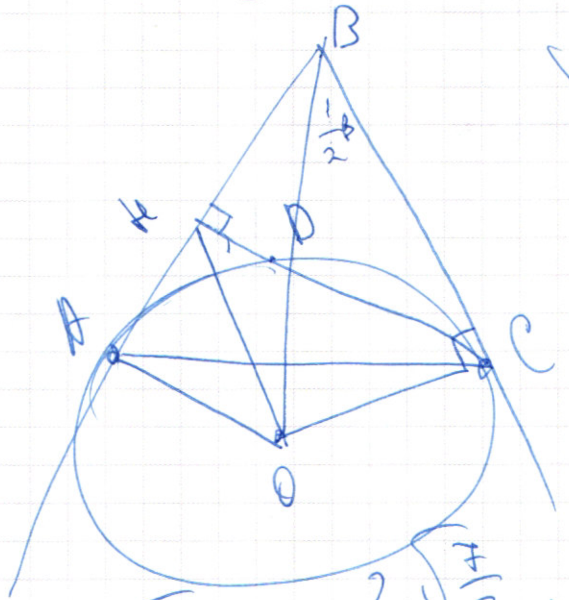
$x = \frac{y^2}{2R}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$F(x/y)<0.$





$\sqrt{7}$

$\frac{AE}{AE+\sqrt{3}} = \frac{DE}{CH}$

$\frac{HD \cdot AB}{2} = 6.$

$2\sqrt{\frac{7}{3}}$

$HD = \frac{12}{AB}$

$\frac{2\sqrt{\frac{7}{3}}}{\sqrt{7}}$

$\frac{7}{\sqrt{3}}$

$\frac{CO}{AH} = \frac{CB}{CH}$

$HD \cdot HC = AH^2$

~~HD·D~~

$\frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{4}{}$

$\frac{4}{\sqrt{\frac{12 \cdot HC}{AB}}} = \frac{CB}{CH.}$ $\frac{4}{3}.$

$\frac{CH}{\sin 60} = \frac{EH}{\sin 30}$

$\sqrt{3}$

$\frac{AE}{AE+\frac{CH}{\sqrt{3}}} = \frac{DE}{CH}$ $\frac{CH}{EH} = \frac{CH}{DE}$

$\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{\frac{HC}{AB}}} = \frac{CB}{CH.}$

$CH \cdot AE = DE \cdot AE + DE \cdot \frac{CH}{\sqrt{3}}$

$EH = \frac{CH}{\sqrt{3}}$

$\sqrt{\frac{HC \cdot AB}{AB \cdot HC}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{CB}{CH.}$

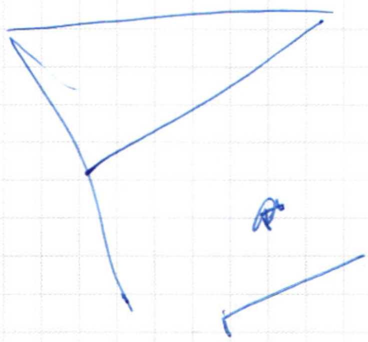
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

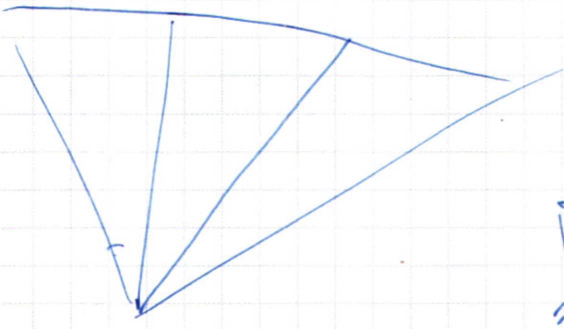
$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4-2x-y| > 4. \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \le 0. \end{cases}$$

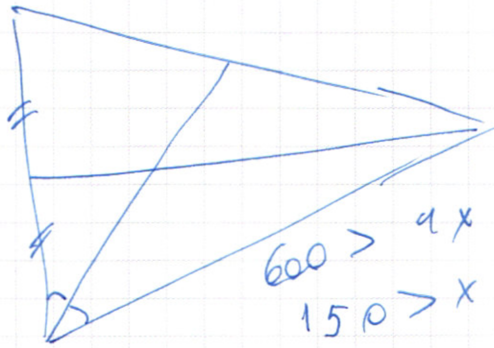
$x^2 + y^2 \le 2x + 4y$ $\quad 2x \ge x^2 \quad 2 > x$

$4y \ge y^2 \quad 4 \ge y$

$x = 0 \quad y = 0.$

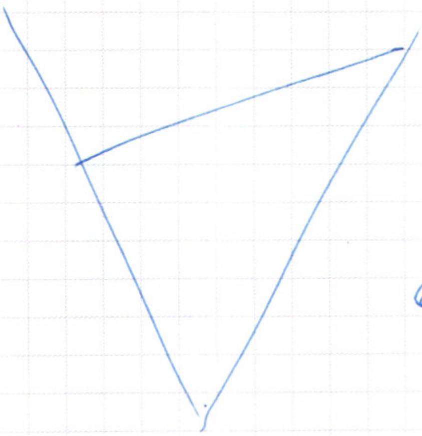






$600 > 4x$

$150 > x$

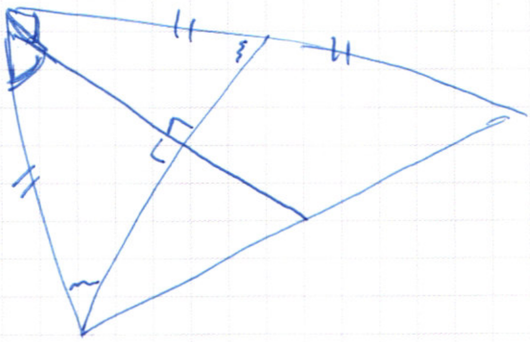


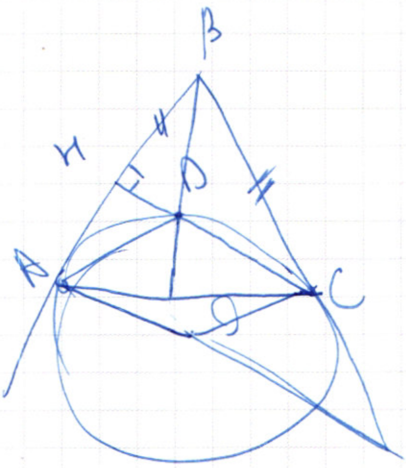
$3x > 600 - 3x$

$600 - 2x > 2x$

$6x > 600$

$x > 100$



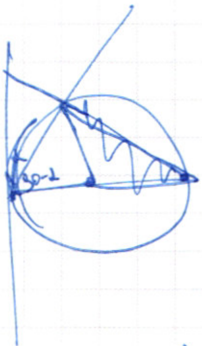


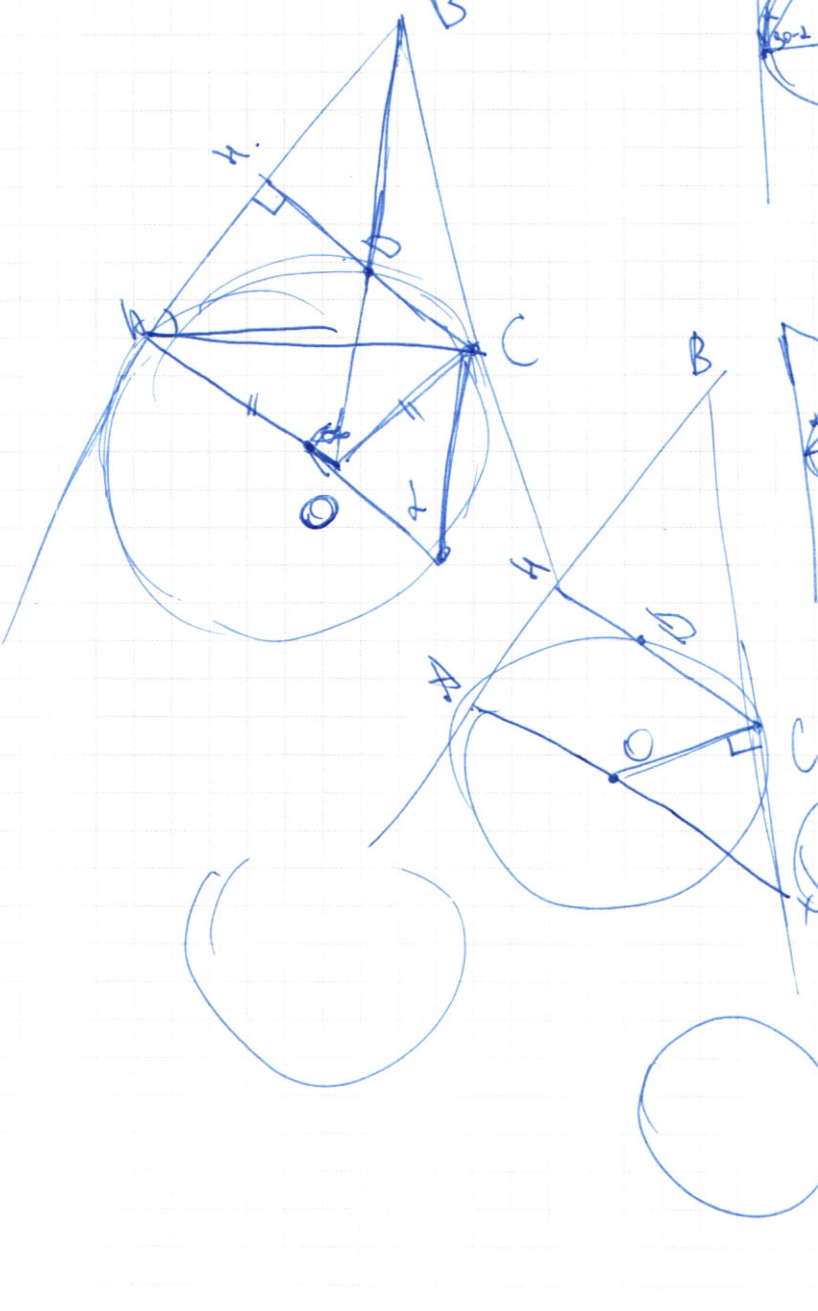
$\frac{AB}{KH}$

$\frac{AB \cdot CH}{2} = 6$

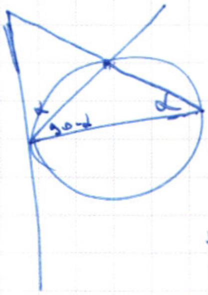
$CH \cdot HD = AH^2$

~~ABCDH.~~

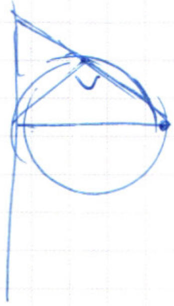




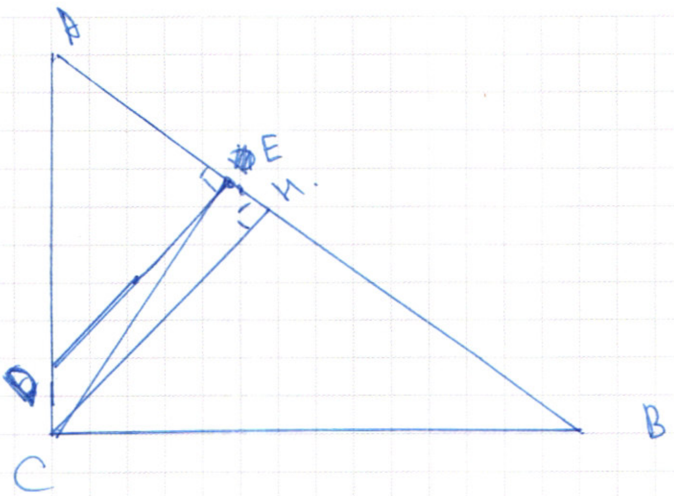
$ABB = 6.$



$\frac{HB}{AB} = \frac{\cancel{AB}BC}{BC+CX}$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Дано:
$\angle CED = 30^\circ$
$AC = \sqrt{7}$
$BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$

① Проведем высоту CH.

② По теореме Пифагора. $AB^2 = CB^2 + AC^2$

$AB^2 = 7 + 4\frac{7}{3} = \frac{49}{3}$ $\quad AB = \frac{7}{\sqrt{3}}$

$S_{п/у\,\Delta} = \frac{CB \cdot AC}{2} = \frac{CH \cdot AB}{2} \Rightarrow CB \cdot AC = CH \cdot AB$

$CH = \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} \cdot \sqrt{7}}{\frac{7}{\sqrt{3}}} = 2.$

③ Так как $\angle DEC = 30^\circ$; $\angle AED = 90$ т.к. $DE \perp AB \Rightarrow$

$\angle CEH = 90 - 30 \Rightarrow \angle CEH = 60$

$\angle ECH = 90 - \angle CEH. = 30^\circ$

④ По теореме синусов в Δ EHC $\quad \frac{EH}{\sin ECH} = \frac{HC}{\sin CEH}$

$\angle CEH = 60°$ $\sin \angle CEH = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\angle ECH = 30°$ $\sin ECH = \frac{1}{2}$

$$\frac{EH}{\frac{1}{2}} = \frac{CH}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$EH = \frac{CH}{\sqrt{3}}$ $EH = \frac{2}{\sqrt{3}}.$

(5) $\triangle AHC \sim \triangle ACB$ $\angle A$ общий
$\angle C = 90 = \angle AHC. \Rightarrow$

$\frac{AH}{AC} = \frac{CH}{CB}$ $AH = \frac{AC \cdot CH}{CB} = \frac{\sqrt{7} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}.$

(6) $\triangle AED \sim \triangle AHC$ $\angle A$ общий
$\angle AED = 90 = \angle AHC \Rightarrow$

$\frac{AE}{AH} = \frac{AD}{AC}$ $\frac{\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = \frac{AD}{AC} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$AE = AH - EH.$

(7) S_{AED} $\triangle AED \sim \triangle ACB$ т.к. $\angle A$ общий
$\angle C = 90 = \angle AED \Rightarrow$

$k = \frac{AE}{AC} = \frac{\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{7}}.$ $S_{AED} = k^2 \, S_{ABC}$

k - коэффициент подобия

$S_{ABC} = \frac{BC \cdot AC}{2} = \sqrt{7} \cdot 2\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$

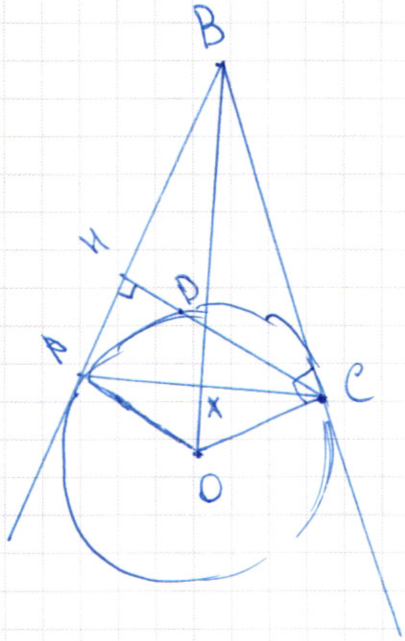
$S_{AED} = \left(\frac{\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{7}}\right)^2 \cdot \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{3 + \frac{4}{3} - 4}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$
$S_{AED} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 8
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



① Проведем радиус OC и OA и отрезок AC, и OB.

② Заметим что △ ABC р/б (т.к. BC = AB т.к. касательные из одной точки)

③ BO бис-са ∠ABC т.к △ OBC и △ ABO равны. (BC = AB ; OC = AO ; ∠BCO=90 | ∠BAO=90)

④ X - пересечение AC и OB. BX высота т.к. OB и бис-са в р/б △ $\Rightarrow \frac{1}{2}\angle B + \angle A = 90$ (сумма острых углов п/у △)

$\angle A = 90 - \frac{1}{2} B$

⑤ △ ABO ∠BAO=90 (AB касательная) $\angle ABO = \frac{1}{2}\angle B \Rightarrow$

$\angle AOB = 90 - \frac{1}{2}\angle B \Rightarrow \angle AOB = \angle A$

⑥ △ AHC ∽ △ ABO т.к. ∠AHC=90=BAO
∠A = ∠AOB.

$$\frac{AB}{CH} = \frac{AO}{AH}.$$

⑦ ст. точки H $AH^2 = DH \cdot CH$.

⑧ $S_{ABD} = \dfrac{AB \cdot DH}{2} = 6$ т. к. DH высота $\triangle ABD$

$DH = \dfrac{12}{AB}$

$AH^2 = \dfrac{12 \cdot CH}{AB}$.

$AO = 4$

$\dfrac{4}{\sqrt{\frac{12\, CH}{AB}}} = \dfrac{AB}{CH}$ $\cdot$ $\dfrac{4}{2\sqrt{3}\sqrt{\frac{CH}{AB}}} = \dfrac{AB}{CH}$.

$\dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\dfrac{AB}{CH}} = \dfrac{AB}{CH}$.

$\sqrt{\dfrac{AB}{CH}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ $\dfrac{AB}{CH} = \dfrac{4}{3}$

Ответ: $\dfrac{4}{3}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x||x-2|} \le 0$$

О.Д.З.

$2x^2-4x+|x|(x-2) \neq 0$

$2x(x-2)+|x|(x-2) \neq 0$

$x \neq 0 \quad x \neq 2$

$2x(x-2) \neq |x||x-2|$

$4x \neq 2x^2+|x||x-2|$

$4 \neq 2x+|x-2|$

1) $x \ni (0;2)$

$4 \neq x+2$

$x \neq 2$

2) $x \ni (2;\infty)$

$4 \neq 3x-2$

$x \neq 2.$

$x^2-6x+10-2|x-3|$

$\cancel{(x-3)^2}$

$(x^2-6x+9)+1-2|x-3|$

$(x-3)^2+1-2|x-3|$

$(|x-3|-1)^2$

≥ 0

1) $(|x-3|-1)^2=0$

$|x-3|=1.$

$x=2 \quad x=4$

$x \ni \varnothing$

2) $(|x-3|-1)^2>0$

тогда

$2x^2-4x+|x||x-2|<0.$

$-2(x)(x-2) > |x||x-2|$

1) $x>2$

$-2(x)(x-2) > (x)(x-2)$

$-2>0$ противоречие $x \ni \varnothing$

2) $2>x>0$

$-2x(x-2) > x(-x+2) \quad 2>0$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

3) $x < 0$

$-2x(x-2) > -x(-x+2)$

$-2 > 0 \quad x \ni \varnothing$

Ответ: $x \ni (0;2) \cup [4]$

№3

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

О.Д.З.

$\sqrt{xy} \geq 0$

$xy \geq 0.$

$x-2y \geq 0.$

1) $x-2y=\sqrt{xy}$

$x^2+4y^2-4xy=xy$

$x^2+4y^2-5xy=0.$

$D=25y^2-16y^2=9y^2$

$\sqrt{D}=3y$

$x_1=\frac{3y+5y}{2}=4y \qquad x_2=\frac{5y-3y}{2}=y$

2) $x+y^2=5$

I) $y^2+4y=5$

$y^2+4y-5=0.$

$D=16+20$

$\sqrt{D}=6$

$y_1=\frac{6-4}{2}=1 \qquad y_2=\frac{-6-4}{2}=-5$

II) $y^2+y=5$

$y^2+y-5=0$

$D=1+20$

$\sqrt{D}=\sqrt{21}.$

$y_1=\frac{\sqrt{21}-1}{2} \qquad y_2=\frac{-\sqrt{21}-1}{2}.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

I) $y_1 = 1$ $\quad y_2 = -5$

$x_1 = 4$ $\quad x_2 = -20.$

$x - 2y = -10.$

противоречие $x \ni \varnothing$ т.к. $x - 2y \geq 0.$

II) $y_1 = \frac{\sqrt{21} - 1}{2}$ $\quad y_2 = \frac{-\sqrt{21} - 1}{2}$

$x_1 = \frac{\sqrt{21} - 1}{2}$ $\quad x_2 = \frac{-\sqrt{21} - 1}{2}$

$x - 2y = -\frac{\sqrt{21} - 1}{2}$

$-\frac{\sqrt{21} + 1}{2} < 0$

т.к.

$-\sqrt{21} + 1 < 0.$

$-\sqrt{21} < -1$

$\sqrt{21} > 1$

$21 > 1.$

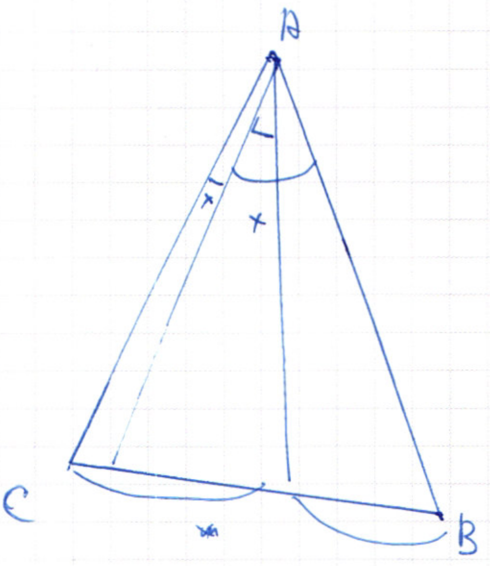
~~прот~~ => противоречие

т.к

$x - 2y \geq 0.$

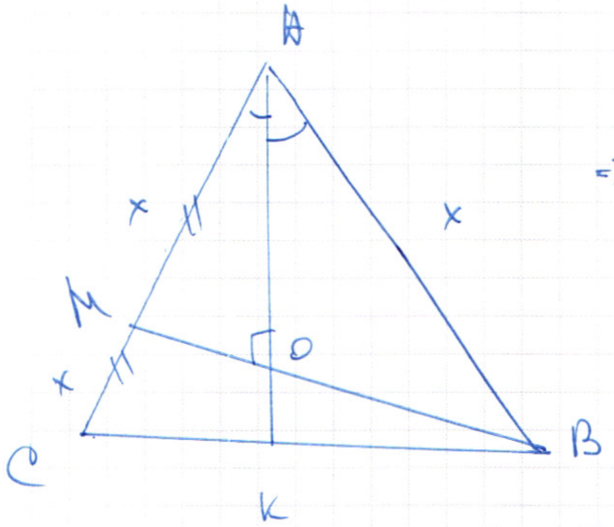
Ответ: $\left(\frac{-\sqrt{21} - 1}{2}; \frac{-\sqrt{21} - 1}{2}\right)$ $(4; 1)$

№2



1) Предположим что есть вариант Δ где бис-са ⊥ медиане выходящей из той же вершины что и она.

Тогда $\angle x > 90 \Rightarrow$
$2x > 180$ противоречие т.к. $2x$ угол треугольника.



$\Rightarrow$ бис-са может быть ⊥ только медиане выходящей из другой вершины.

AK бис-са BM медиана
заметим что AO высота и бис-са в Δ ABM $\Rightarrow$ ABM р/б Δ $\Rightarrow$
$AB = AM \Rightarrow AB = \frac{1}{2} AC$. пусть $AB = x$ $AC = 2x$

$CB = P - AC - AB$ т.е. $CB = 600 - 3x$

тогда по нер-ва треугольника
$CB + AB > CB$
$3x > 600 - 3x \Rightarrow x > 100$

$CB + AB > CB$

$600 - 2x > 2x \Rightarrow x < 150 \Rightarrow x$ может быть от 101 до 149 вариантов $149 - 101 + 1 = 49$

остальные длина сторон восстанавливаются однозначно

Ответ: 49 треугольников.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x||x-2|} \leq 0$$

$2x^2-4x+|x||x-2| \neq 0.$

$2x(x-2)+|x|(x-2) \neq 0.$

$(x-3)^2-2|x-3|+1.$

$x=4$

$\cancel{x=2}$

$x-3$

$(|x-3|-1)^2 \geq 0.$

$2x^2-4x+|x||x-2| \leq 0.$

$2(x)(x-2)+|x||x-2| < 0.$

$-2(x)\cancel{(x-2)} > |x||x-2|$

1) $|x|=(x)$ $(x-2)=|x-2|$

$\cancel{x-2>}$

$-2>0$

2) $|x|=-x$ $(x-2)=|x-2|$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

$xy \geq 0.$

$x-2y \geq 0.$

$\cancel{x-2y-\sqrt{xy}=0.}$

$\cancel{x+y^2=5}$

$4x = 2x^2+|x|(x-2)$

$4x = |x|(|x-2|+|x|)$ $-\frac{\sqrt{21}+1}{2})$

$x^2+4y^2-5xy=0.$

$\left(\frac{\sqrt{21}+1}{2}\right)^2 + \left(\cancel{\frac{\sqrt{21}+1}{2}}\right)$

$D=25y^2-16y^2$

$\sqrt{D}=3y$

$\frac{21+2\sqrt{21}+1}{4}$ -

$\cancel{\frac{3y+5}{2}}$ $-3\cancel{y+5}$

$\frac{3y+5y}{2}=4y$ $\frac{-3y+5y}{2}=1y.$

1

$y^2+4y-5=0$

$D=16+20$

$y^2+y-5=0$

$D=1+20$

$\sqrt{21}.$

$\frac{6-4}{2}=1$ $\frac{-6-4}{2}=-5$

4. $x=-20.$

y $\frac{\sqrt{21}-1}{2}$ $-\frac{\sqrt{21}-1}{2}$

$\frac{\sqrt{21}-1}{2}$ $\frac{-\sqrt{21}-1}{2}.$

$|x|=(x-2)$

$x=|x-2|$

1

$\frac{\sqrt{21}+1}{2}$ $\frac{\sqrt{21}+1}{2}.$