МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE\perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED=45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6, \\ x^2-2x-3y+y^2\leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 19$, $3\leqslant y\leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

© МФТИ, 2022

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1| \ (1)}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3| \ (2)} \leq 0$$

(1) $x^2-2x+5-4|x-1| = (x^2-2x+1)-1+5-4|x-1| = (x-1)^2+4-4|x-1|$.

Примем $y=|x-1|$. Тогда $(x-1)^2 = |x-1|^2 = y^2$.

$\Rightarrow y^2+4-4y = (x-1)^2+4-4|x-1|$

Найдем ~~дискриминант~~ и корни $y^2-4y+4=0$.

$D = b^2-4ac = 16-4\cdot4=0$.

~~Значит, график параболы y^2-4y+4 можно~~

Заметим, что $y^2-4y+4=(y-2)^2 \geq 0$

Значит, числитель дроби ≥ 0. Получается, что знаменатель дроби <0.

(2) $4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|<0$.

~~Д-м, что $|a|\cdot|b|=|ab|$:~~
~~1) $a\geq0; b\geq0$: $|a|\cdot|b|=ab$, $|ab|=ab$ 2) $a<0; b<0$: $|a|\cdot|b|=ab$~~

$|a|\cdot|b|=|ab| \Rightarrow |x|\cdot|x-3| = |x(x-3)| = |(x^2-3x)|$.

Тогда: $4\cdot(x^2-3x)+|x^2-3x|<0$.

1) при $x^2-3x=0$:

$0<0$, решений нет, такой случай невозможен

2) при $x^2-3x>0$:

$$\begin{cases} x^2-3x>0 \\ 4\cdot(x^2-3x)+(x^2-3x)<0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-3x>0 \\ 5(x^2-3x)<0 \end{cases} \quad \varnothing$$

получили противоречие, это невозможно.

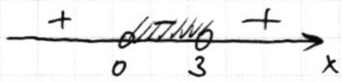
3) значит, $x^2-3x<0$.

Тогда: $4(x^2-3x)-(x^2-3x) = 3(x^2-3x)<0$ – получили верное неравенство.

Найдем x методом интервалов:

$x^2-3x = x(x-3) < 0$

$x=0;\ x=3;\ a=1>0.$

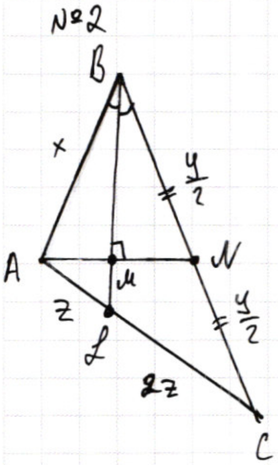


Т.е. $x \in (0;3)$

Ответ: $x \in (0;3)$; $0<x<3$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2



$\triangle ABM$ и $\triangle BMN$ – прямоугольные – равные

(т.к. BM – общая; $\angle ABM = \angle MBN$ (BL – бисс.)

=> по катету и углу).

Тогда $AB = BN = \frac{1}{2} BC$ (AN – мед.)

$\exists$ $AB = x$; $BC = y$; тогда $x = \frac{1}{2}y$; $y = 2x$.

~~AC=3z~~. $\exists$ $AC = 3z$.

Тогда, по свойству бисс.: $\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC} = \frac{x}{2y} = \frac{1}{2}$.

Т.е. $AL = z$; $LC = 2z$. (т.к. $AC = 3z$).

Значит, $P = \cancel{a+b}\ x + y + 3z = 300$.

$P = x + 2x + 3z = 3x + 3z = 300$. => $(x+z) = 100$.

По неравенству $\triangle$:

1) $x + 3z > y = 2x$
=> $3z > 2x - x = x$
=> $z > \frac{x}{3}$

2) $3z + y = 3z + 2x > x$
=> $3z > -x$.
это неравенство верно, т.к. $z > 0$ и $x > 0$.

3) $y + x = 2x + x > 3z$
=> $3x > 3z$
$x > z$.

$$\begin{cases} x + z = 100 \\ z > \frac{x}{3} \ (1) \\ x > z \ (2) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 100 - z \\ z > 25 \\ z < 50. \end{cases}$$

Т.е. всего вариантов z: $50 - 25 - 1 = 24$. Для каждого z однозначно определен x.
Т.е. вариантов для x: 24.

(1) $z > \frac{x}{3} = \frac{100 - z}{3}$

$3z > 100 - z$

$4z > 100$

$z > 25$

(2) $z < x = 100 - z$

$2z < 100$

$z < 50$.

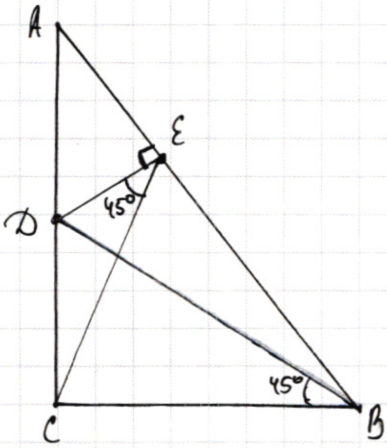
Т.к. каждая из сторон задается x и z, для которых возможно 24 варианта, то

~~осталось только учесть~~ треугольников тоже может быть только 24.

Ответ: 24.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



$\angle DEB = 90°$ и $\angle DCB = 90°$.

Значит, в EDCB сумма прот. ∠ равна 180° и EDCB вписан в окруж.

Проведем BD.

$\angle DEC = \angle DBC$ (вписис., опираются на одну ∪).

$\Rightarrow \triangle DCB$ – прямоугольный и $\angle DBC = 45°$.

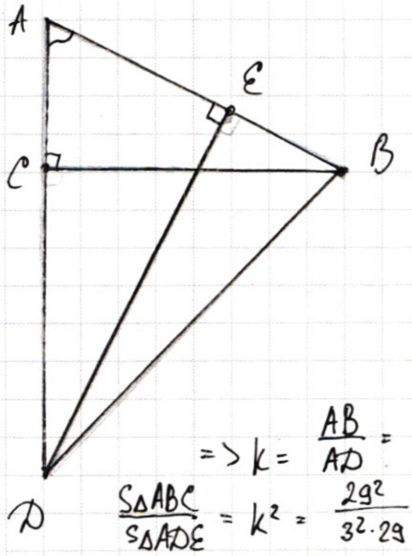
$\Rightarrow \triangle DCB$ – равнобедренный.

$\Rightarrow DC = BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$

$\Rightarrow AD = AC - DC = \sqrt{29} - \frac{5\sqrt{29}}{2} = \frac{2\sqrt{29} - 5\sqrt{29}}{2} < 0$. Значит, построение неверно и D и E будут лежать на продолжениях сторон.

Тогда $AD = DC - AC = \frac{5\sqrt{29} - 2\sqrt{29}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{29}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{3}{2}$



Заметим, что $\triangle ABC \sim \triangle AED$ (∠A – общий; они прямоуг. ⇒ по 2-м ∠).

$\Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = k$

по т. Пифагора для $\triangle ABC$:

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \frac{29}{2}$

$\Rightarrow k = \frac{AB}{AD} = \frac{29}{2} : \frac{3\sqrt{29}}{2} = \frac{29 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot 3\sqrt{29}} = \frac{29}{3\sqrt{29}}$.

$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = k^2 = \frac{29^2}{3^2 \cdot 29} = \frac{29}{9}$ $\Rightarrow S_{\triangle ADE} = \frac{S_{\triangle ABC} \cdot 9}{29}$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{5\sqrt{29}}{2} = \frac{29 \cdot 5}{4}$

$\Rightarrow S_{\triangle ADE} = \frac{\cancel{29} \cdot 5 \cdot 9}{4 \cdot \cancel{29}} = \frac{45}{4}$

Ответ: $S_{\triangle ADE} = \frac{45}{4}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

Пусть числа x и y раскладываются на простые множители как:

$x = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$

$y = y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_m$.

Если x и y − не целые, то ~~$x_1 = x$, $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 1$; $y_1 = y$, $y_2 = y_3 = \ldots = y_m = 1$~~ разложения: $x = x_1$ и $y = y_1$, где $x_1 = x$ и $y_1 = y$.

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right)$ (т.к. $x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}$)

$f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

Заметим, что если α раскладывается по приведенной выше схеме как $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \ldots \cdot \alpha_k$, то: $f(\alpha) = f(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_k) = f(\alpha_1) + f(\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_k) = f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + f(\alpha_3 \cdot \ldots \cdot \alpha_k) + \ldots = \ldots = f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + \ldots + f(\alpha_k)$. ~~Где~~ где $\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_k$, ~~то~~ − простые числа, ~~либо 1~~, либо равны α (>0 по условию) (*)

$f\left(\frac{1}{y}\right) = f\left(1 \cdot \frac{1}{y}\right) = f(1) + f\left(\frac{1}{y}\right)$. Отсюда: $f(1) = 0$.

$f(1) = f\left(y \cdot \frac{1}{y}\right) = f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) = 0$. $\Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$.

$\Rightarrow f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) - f(y_1) - f(y_2) - f(y_3) - \ldots - f(y_m)$.

Из (*): т.к. $f(1) = 0$ и x и $y \in \mathbb{N}$ (натуральные), то для любого x_i и y_i $f(x_i) = x_i$ и $f(y_i) = y_i$ ~~(т.к. ... $f(x_i) = 0$ и f~~, если x_i и y_i − не 1. Но т.к. 1 не простое, то в разложении оно не встретится. Значит, $f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$;

$f(y_1) + f(y_2) + \ldots + f(y_m) = y_1 + y_2 + \ldots + y_m$.

Т.е. $f\left(\frac{x}{y}\right) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n - y_1 - y_2 - \ldots - y_m$.

Распишем разложение и $f(n)$ для каждого $n \in [3; 19]$. Для каждого n посчитаем кол-во m таких, что $f(m) > f(n)$.

n	разложение	$f(n)$	количество m
3	$3=3$	3	16
4	$4=2\cdot 2$	4	15
5	$5=5$	5	13
6	$6=2\cdot 3$	5	13
7	$7=7$	7	8
8	$8=2\cdot 2\cdot 2$	6	11
9	$9=3\cdot 3$	6	11
10	$10=2\cdot 5$	7	8
11	$11=11$	11	3
12	$12=2\cdot 2\cdot 3$	7	8
13	$13=13$	13	2
14	$14=2\cdot 7$	9	4
15	$15=3\cdot 5$	8	5
16	$16=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$	8	5
17	$17=17$	17	1
18	$18=3\cdot 2\cdot 3$	8	5
19	$19=19$	19	0

Сумма чисел в последнем столбике и будет равна количеству пар:

$N=16+15+2\cdot 13+3\cdot 8+2\cdot 11+3+2+4+3\cdot 5+1=128.$

Ответ: 128

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(y-2x)^2 = y^2 - 4x + 4x^2$

$-4x - xy = -x(4+y)$

$y^2 - 4x + 4x^2 = xy$

$(3-x)(3+x)$

$x \ne \sqrt{9-2y}$

$\sqrt{\frac{(9-x^2)x}{2}}$

$(4+y)^2 = 16 + 2\cdot 4\cdot y + y^2 = y^2 + 8y + 16$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} & (1) \\ 2y + x^2 = 9 & (2) \end{cases}$$

$2y = 9 - x^2$

$2y = (3-x)(3+x)$

$x^2 = 9 - 2y$

$(9-x^2)x = (3-x)(3+x)x \ge 0$

(1) $y - 2x = \sqrt{xy}$

(2) $2y + x^2 = 9$

$y = \frac{9-x^2}{2}$

$- \quad + \quad - \quad +$

$-3 \quad 0 \quad 3 \quad x$

$\Rightarrow \frac{9-x^2}{2} - 2x = \sqrt{\frac{(9-x^2)x}{2}}$

$x \cdot y = x \cdot \frac{9-x^2}{2} = \frac{(9-x^2)x}{2}$

$\Rightarrow x \in [-3; 0] \cup [3 + \infty]$

$\frac{9-x^2}{2} - 2x = \frac{9-x^2-4x}{2} = \frac{-x^2-4x+9}{2}$

(1) $y - 2x = \sqrt{xy}$

$y - 2x \ge 0$, $xy \ge 0$! $9 - 2y \ge 0$

$y^2 - 4x + 4x^2 = xy$

$4x^2 + y^2 - x(4+y) = 0$

$4x^2 - x(4+y) + y^2 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (4+y)^2 - 4\cdot 4\cdot y^2 = y^2 + 8y + 16 - 16y^2 = \boxed{-15y^2 + 8y + 16}$

$x_{1,2} = \frac{(4+y) \pm \sqrt{D}}{8} > 0$

$\sqrt{9-2y} =$

$-x^2 - 4x + 9 = 0 \mid \cdot(-1)$

$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\cdot 9\cdot(-1) = 16 + 36 = 52 > 0$. $= 4\cdot 13$

$36 + 16 = 52$

$52 : 4 = 13$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{13}}{2} = 2 \pm \sqrt{13}$

$\Rightarrow x \in (-\infty; 2-\sqrt{13}] \cup [2+\sqrt{13}; +\infty)$

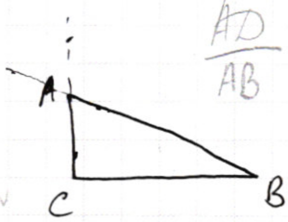
$\sqrt{9} < \sqrt{13} < \sqrt{16}$

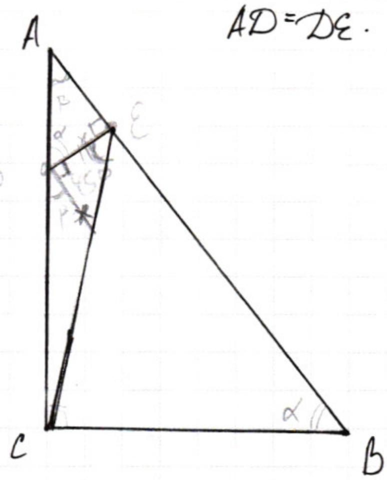
$3 \qquad 4$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$AB = \sqrt{(\sqrt{29})^2 + \left(\frac{5\sqrt{29}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{29^2}{4}} = \frac{29}{2}$$

$$AD = DE \cdot \frac{\sqrt{29}}{5}$$





$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{ED}{BC}$$

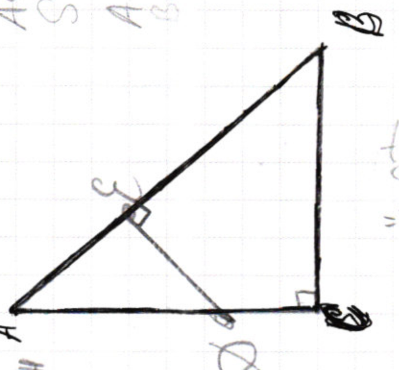
$\frac{AD}{AC}$ - ?

S_{AED} - ?

$AC = \sqrt{29}$

$BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$

$$\frac{AD}{29/2} = \frac{AE}{\sqrt{29}} = \frac{ED}{(5\sqrt{29})/2}$$



$$tg\alpha = \frac{AC}{BC} = \sqrt{29} : \frac{5\sqrt{29}}{2} = \frac{\sqrt{29} \cdot 2}{5\sqrt{29}} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{DE} = \frac{2}{5} \Rightarrow AE = \frac{2DE}{5}$$

$$\frac{AE}{ED} = \frac{2}{5}$$

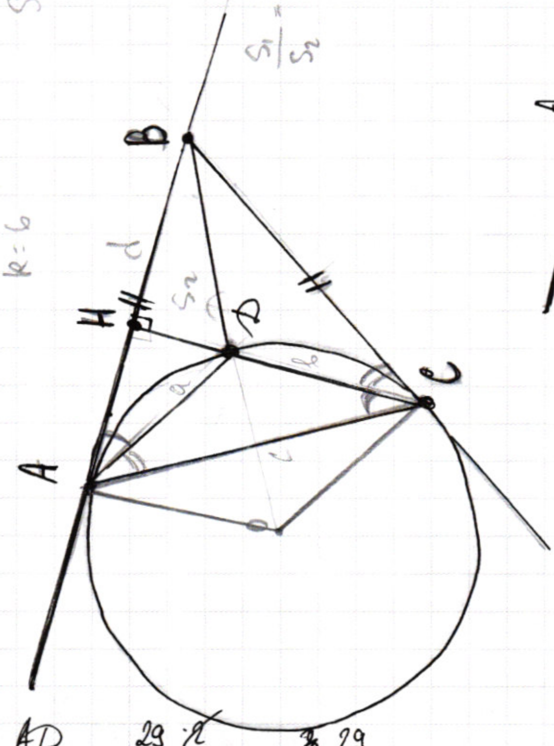
$$\Rightarrow \frac{\frac{\cancel{DE}}{5} \cdot \sqrt{29}}{\cancel{DE}} = \frac{29}{5\sqrt{29}}$$

S_{ABD} $15 = AB \cdot \frac{1}{2} \cdot DH$

$$S_1 = \frac{abc}{4R} \quad \frac{abc}{24}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{b \cdot c}{a \cdot d} = \frac{15}{S_2}$$

$k=6$

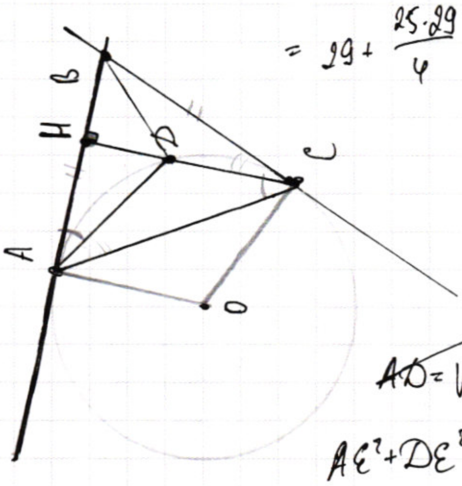


$$(\sqrt{29})^2 + \left(\frac{5\sqrt{29}}{2}\right)^2 =$$

$$= 29 + \frac{25 \cdot 29}{4} = \frac{29 \cdot 4 + 25 \cdot 29}{4} =$$

$$= \frac{29 \cdot 29}{4}$$

$$AD = \sqrt{}$$

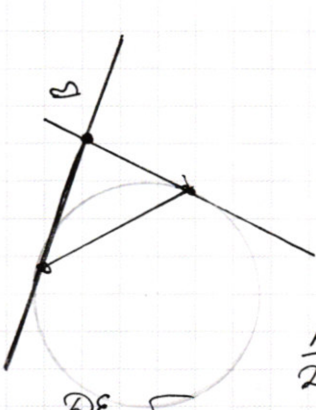


$$AE^2 + DE^2 = \cancel{4}DE^2 + \frac{4DE^2}{25} =$$

$$= \frac{25DE^2 + 4DE^2}{25} =$$

$$= \frac{29DE^2}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{DE}{5}\sqrt{29}} = AD$$

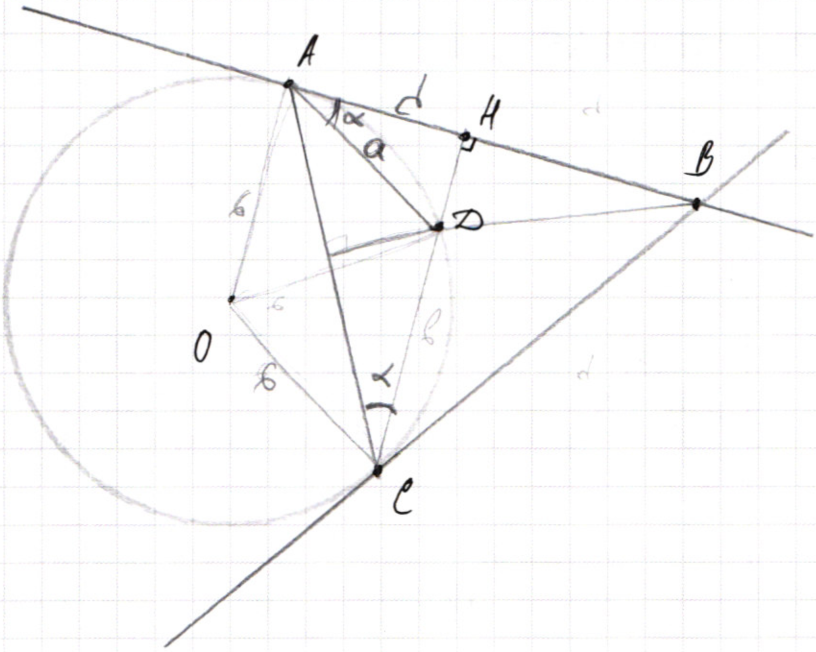


$$\frac{AD}{ED} = \frac{29 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot 5\sqrt{29}} = \frac{29}{5\sqrt{29}}$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{DE \cdot \sqrt{29}}{5}} \quad AD = \frac{DE}{5} \cdot \sqrt{29}$$

$$\frac{AD}{DE} = \frac{29\cancel{1} \cdot \cancel{0,5}}{5\sqrt{29} \cdot \cancel{0,5}}$$

$$\Rightarrow AD = \sqrt{AE^2 + DE^2}$$



$2x+3y \geq |x|^2+|y|^2 \geq 0$

$a\cdot d\cdot \frac{1}{2}\sin\alpha = 15$

$\sin\alpha = \frac{15\cdot 2}{ad} = \frac{30}{ad}$

$\Rightarrow$ ~~B~~

$3|x|+2|y|+|6-(2x+3y)|>6$

$3|x|+2|y|+|6-|x|^2+|y|^2|>6$

$|6-(\underbrace{2x+3y}_{\geq 0})|>6-3|x|-2|y|$

$|3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6$

$x^2-2x-3y+y^2\leq 0$

$3|x|+2|y|+|6-3x-2y|>6$

$|x|^2-2x-3y+|y|^2\leq 0$

$6-(\underbrace{2x+3y}_{>0})$

$2x+3y\geq \underbrace{|x|^2+|y|^2}_{>0}$

$2x+3y>0$

$2x+3y>0$

$\Rightarrow 3y>-2x$

$y>-\frac{2x}{3}$

1) $x>0$

~~$y>0$~~ ?

2) $x<0$

$y>0$

$y<0$

$x>0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

+ 9.30.
4
13.30

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

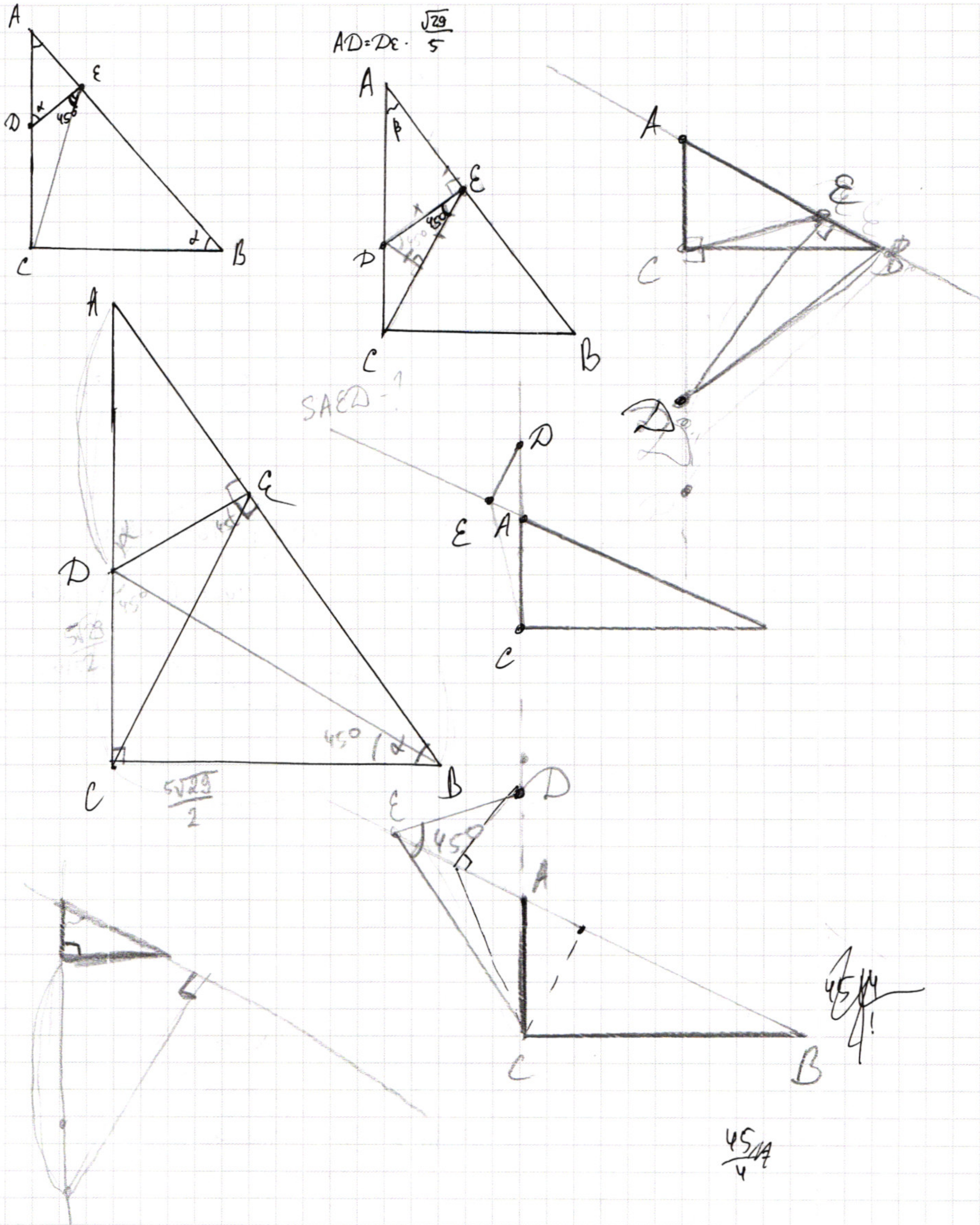
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$AD = DE \cdot \frac{\sqrt{29}}{5}$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$4\cdot(x^2-3x) < -|x|\cdot|x-3|$

$4\cdot x(x-3) < -|x|\cdot|x-3|$

1) при $(x^2-3x)>0$:

$$\begin{cases} x^2-3x>0 \\ 4(x^2-3x) < -(x^2-3x) \end{cases} \qquad \begin{cases} x(x-3)>0 \\ 5(x^2-3x)<0 \end{cases}$$

$4(x^2-3x)<-(x^2-3x)$

$\Rightarrow 4(x^2-3x)+(x^2-3x)<0$

$\Rightarrow 5(x^2-3x)<0$

2) при $(x^2-3x)<0$: (70)

$$\begin{cases} x^2-3x<0 \\ 4(x^2-3x)<-\cdot-(x^2-3x) \end{cases}$$

$4(x^2-3x)<(x^2-3x)$

$3(x^2-3x)<0$

$4-4+5-4\cdot1=1$

$16-24+2\cdot\ldots<0$

$$\begin{cases} x^2-3x<0 \\ 3(x^2-3x)<0 \end{cases}$$

$x^2-3x<0$

$x(x-3)<0$

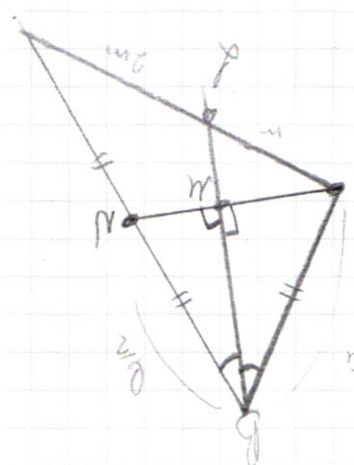
$x\in(0;3)$

$\Delta ABM=\Delta BMN$ (BM-общ., $\angle ABM=\angle MBN$)

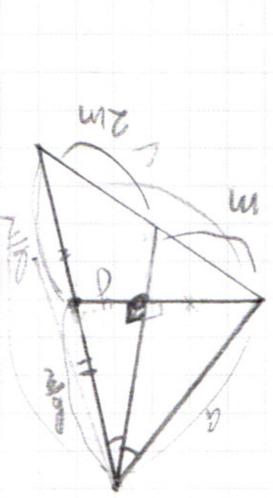
$\Rightarrow a=b/2$, $b=2a$

$\frac{m}{n}=\frac{a}{b}$

$a+b+c=300$, $\Rightarrow a+2a+c=300$, $3a+c=300$



1. $a+b+c=300$
2. $\frac{m}{n}=\frac{a}{b}$, $m+n=c$
3. $a=\frac{b}{2}$



$P=300$

$\checkmark$ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$(y-2)^2 = y^2 - 2\cdot 2\cdot y + 4 = y^2 - 4y + 4$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

$|x|\cdot|x-3|$

$|a|\cdot|b|$ $\quad |ab|$

1) $a>0,\ b>0$: $|a|\cdot|b| = ab$, $|ab| = ab$

2) $a<0,\ b>0$: $|a|\cdot|b| = -a\cdot b = -ab$, $|ab| = -ab$

3) $a<0,\ b<0$: $|a|\cdot|b| = -a\cdot -b = ab$, $|a\,b| = ab$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

№1

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \le 0$$

$(y-2)^2 = y^2 - 4y + 4$

$x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|$

$(x^2-2x+5) = (x^2-2x+1) - 1 + 5 = (x-1)^2 + 4$

$y^2 - 4y + 4 = (y-2)^2$

$\Rightarrow (x-1)^2 + 4 - 4|x-1|$

$(x-1)^2 = (|x-1|)^2$

$\Rightarrow |x-1|^2 + 4 - 4|x-1|$

ОДЗ: $4x^2 - 12x + |x|\cdot|x-3| \ne 0$

$|x|\cdot|x-3| = |x(x-3)| = |x^2-3x|$

$\Rightarrow 4x^2 - 12x + |x^2-3x| \ne 0$

$\Rightarrow 4(x^2-3x) \ne -|x^2-3x|$

это верно всегда при $x^2-3x \ne 0$.

~~$|x-1| = y \ge 0$~~

~~$\Rightarrow y^2 + 4 - 4y$~~

$\Rightarrow$ ≥ 0

$$\frac{|x-1|^2 + 4 - 4|x-1|}{4(x^2-3x) + |x^2-3x|} \le 0.$$

$y^2 - 4y + 4 = 0$

$D = 16 - 4\cdot 4 = 0$

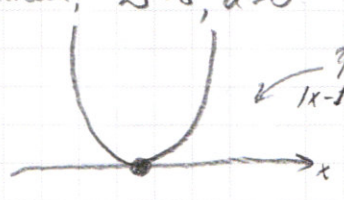
$\Rightarrow y = -b/2a = 4/2 = 2$

$\Rightarrow \boxed{|x-1| = 2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4(x^2-3x) + |x^2-3x| < 0 \\ |x-1| = 2 \end{cases}$$

причем, $D = 0$, $a > 0$

график $|x-1|^2 + 4 - 4|x-1|$.



$\Rightarrow 4(x^2-3x) < -|x^2-3x|$

$|x-1| = 2.$

1) $x - 1 = 2$
$x = 3$.
$4\cdot(3^2 - 3\cdot 3) + |3^2 - 3\cdot 3| = 4\cdot 0 + 0 = 0$ $\varnothing$

$y^2 - 4y + 4 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 16 - 4\cdot 4 = 0$

$y = -b/2a = 4/2 = 2.$

2) $-(x-1) = 2$
$-x + 1 = 2$
$x = 1 - 2 = -1$
$4\cdot(1+3) < -|(-1)^2 - 3\cdot(-1)|$
$4\cdot 4 < -|1+4|$
$16 < -5.$
решений нет.

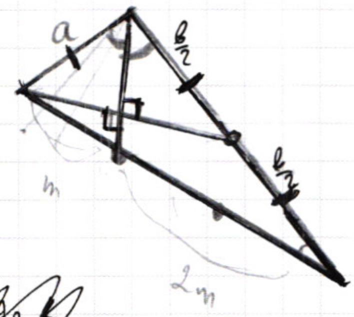
$4(x^2-3x) + |x^2-3x| < 0.$

$\Rightarrow 4\cdot(x^2-3x) < -|x^2-3x|$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$f(ab)=f(a)+f(b)$, $f(p)=p$ - простое

$a+b+c=300$

$a=\frac{b}{2}$

$\cos\alpha = \frac{c^2-3a^2}{2ac}$

$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\alpha$

$b^2=(2a)^2=4a^2$

$3\cdot 10^4 = 5\cdot 10^3$

$c=3m$

$\Rightarrow 3a+3m=300$

$a+m=100$

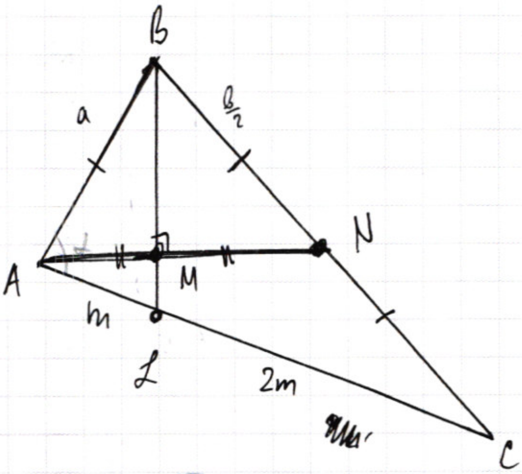
$c^2=(3m)^2=9m^2$

$a=100-m$

$a^2=(100-m)^2=10^4-200m+m^2$

$3\cdot(10^4-200m+m^2)=$

$=3\cdot 10^4-600m+3m^2$



$a+b>c$

$a+2a>3m$

$3a>3m$

$a>m$

$3m+a>2a$

$\Rightarrow 3m>a$

$3m+2a>a$

$3m>-a$

$\cos\alpha = \frac{9m^2-3\cdot 10^4+600m-3m^2}{2\cdot(100-m)\cdot 3m} =$

$= \frac{600m-3\cdot 10^4+6m^2}{6\cdot(100m-m^2)} = \boxed{\frac{m^2-5\cdot 10^3+100m}{100m-m^2}}$

$m=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2\cdot\cos\alpha\cdot 2}$

$\Rightarrow m=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$

$\Rightarrow m=\frac{1}{2}\cdot$

$h=4\cdot\cos 30=\frac{4\sqrt3}{2}=2\sqrt3$.

$\sqrt{2\cdot16+2\cdot16-16\cdot\frac12}\cdot\frac12=$

$=\sqrt{56}\cdot\frac12=\sqrt{7\cdot8}\cdot\frac12$

$\sqrt{3\cdot16}\cdot\frac12=$

$=4\cdot\sqrt3\cdot\frac12=2\sqrt3$.

$16\cdot2=32$, $32+32=64$, $\frac{16}{2}=8$, $64-8=56$

$2\cdot a^2=2\cdot(100-m)^2$

$b^2=4a^2=4\cdot(100-m)^2$

$3(a+m)=300$

$(a+m)=100$

$a+m=100$

100: 1 … 99

$99\begin{cases}1\\ \dots\\ 99\end{cases}$

$16+15=31$, $31+26=57$, $57+24=81$, $81+22=103$, $103+5=108$, $108+4=112$, $112+15=127$, $127+1=128$

$f(3)=3$, $f(4)=4$, $f(5)=5$, $f(6)=5$, $f(7)=7$, $f(8)=6$, $f(9)=6$, $f(10)=7$, $f(11)=11$, $f(12)=7$, $f(13)=13$, $f(14)=9$, $f(15)=8$, $f(16)=8$, $f(17)=17$, $f(18)=8$, $f(19)=19$.

$3=3$, $4=2\cdot2$, $5=5$, $6=2\cdot3$, $7=7$, $8=2\cdot2\cdot2$, $9=3\cdot3$, $10=2\cdot5$, $11=11$, $12=3\cdot2\cdot2$, $13=13$, $14=2\cdot7$, $15=3\cdot5$, $16=2\cdot2\cdot2\cdot2$, $17=17$, $18=2\cdot3\cdot3$, $19=19$

$m=\frac12\cdot\sqrt{2\cdot(10^4-200m+m^2)+2\cdot9m^2-(4\cdot10^4-800m+4m^2)\cdot\frac{m^2-5\cdot10^3+100m}{100m-m^2}\cdot2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \quad (*) \\ 2y+x^2=9 \quad (**) \end{cases}$$

$(y-2x)^2=y^2-4x+4x^2$

$x^2+2y-9 \mid \cdot 4$

$\cancel{4x^2}+8y-36=\cancel{4x^2}+y^2-xy-4x$

$y^2-y(8+x)-4x+36=0$

$\Rightarrow D=(8+x)^2+4(4x+36)=$
$=64+16x+x^2+16x+144=$
$=x^2+32x+208$

$\sqrt{208}=4\sqrt{13}$

$(*)\ y-2x=\sqrt{xy}$

$(**)\ 2y+x^2=9$

$\frac{9-x^2-4x}{2}=\sqrt{xy}$

$$\begin{cases} y^2+4x^2-4x=xy \\ x^2+2y=9 \end{cases}$$

$3x^2+y^2-4x-2y=xy-9$

$2y=(3-x)(3+x)$

$\frac{(3-x)(3+x)}{2}-2x=\sqrt{xy}$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$\Rightarrow x^2+2y=9$

$x^2+2y-9=0$

$y^2-4x+4x^2=xy$

$x^2+2y-9=0$

$4x^2+y^2-x(y+4)=0$

$9-x^2-4x=2\sqrt{xy}$

$xy=(y-2x)^2$

$y=\frac{(y-2x)^2}{x}$

$\frac{(3-x)(3+x)}{2}=\sqrt{xy}$

$\Rightarrow \frac{2(y-2x)^2}{x}+x^2=9$

$\Rightarrow \frac{2(y^2-4x+4x^2)+x^3}{x}=9$

$\frac{(3-x)^2(3+x)^2}{4}=xy$

$2y^2-8x+8x^2+x^3=9x$

$2y^2-8x-9x+8x^2+x^3=0$

$x^3+8x^2-17x+2y^2=0$

$(3-x)^2(3+x)^2=4xy$

$(9-x^2)^2=4xy$

$\Rightarrow f(1)=f\left(\frac{1}{1}\right)$

$f\left(\frac{1}{y}\right)=f(1)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)$ - простое

$f(xy)=f(x)+f(y)$

$f(x/y)=$

$f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0$

$f(x)=f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\ldots+f(x_n)$ простые числа

$\Rightarrow f(x)=x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n$

$f\left(\frac{1}{y}\right)=0$

$f(1)=0$

$f\left(\frac{1}{y}\right)=f(1)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(1)=f\left(\frac{1}{y}\right)\cdot f(y)=$

$=f\left(\frac{1}{y}\right)\cdot(f(y_1)+f(y_2)+f(y_3)+\ldots)=0$ все простые

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right)=0$

$\Rightarrow f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)=x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n \geq 0$

$\boxed{f(x)-f(y)}<0$

$x>y, y>0$