МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45°$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y| > 6, \\ x^2-2x-3y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 19$, $3 \leqslant y \leqslant 19$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

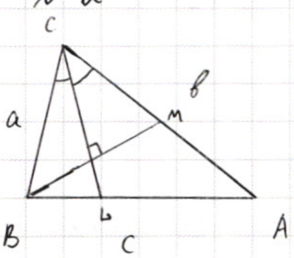
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2



Дано: $\triangle ABC$ со (целыми) сторонами $a, в, c$; $P = 300$; биссектриса $CL \perp$ медиане BM.

Найти: кол-во таких $\triangle$-ков.

Решение:

Т.к. CL - биссектриса и $CL \perp BM$, то $\triangle CBM$ - равнобедренный,

$a = BC = CM = \frac{AC}{2} = \frac{в}{2} \Rightarrow в = 2a \Rightarrow$ если a - целое, то и $в$ - целое.

$P = a + в + c = 300$, $a, в, c$ - натуральные (целые и положительные),

по неравенству треугольника
$$\begin{cases} a + в > c \Leftrightarrow 3a > c \\ a + c > в \Leftrightarrow a + c > 2a \Leftrightarrow c > a \\ в + c > a, \; в > a \; (в = 2a), \text{ поэтому это нер-во выполняется всегда} \end{cases}$$

Это равносильно системе
$$\begin{cases} 3a > c \\ c > a \\ 3a + c = 300 \; (P = a + в + c = 300) \end{cases}$$

Такие условия необходимы для существования нужного $\triangle$-ка.

Заменим $c = 300 - 3a = 3(100 - a)$

Решим систему неравенств:

$$\begin{cases} 3a > c \\ c > a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a > 3(100-a) \\ 3(100-a) > a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 100 - a \\ 300 - 3a > a \end{cases} \begin{cases} a > 50 \\ a < 75 \end{cases}$$

$a \in (50; 75)$, в этом интервале есть ровно $75 - 50 - 1 = 24$ натуральных числа, подходящих для a. Т.к. $в$ определяется через a ($в = 2a$), c тоже определяется ~~то~~ через a ($c = 300 - 3a$), то все стороны определяются через a. А т.к. для a существует 24 подходящих числа, то нужных $\triangle$-ков ровно 24

Ответ: 24 $\triangle$-ка

№ 3

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 4xy + 4x^2 = xy \\ 2y + x^2 = 9 \\ y - 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 5xy + 4x^2 = 0 \\ y = \frac{9 - x^2}{2} \\ y \geq 2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(9-x^2)^2}{4} - 5 \cdot x \cdot \frac{9-x^2}{2} + 4x^2 = 0 \quad \Big| \cdot 4 \\ y \geq 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (9-x^2)^2 - 10x(9-x^2) + 16x^2 = 0 \\ y \geq 2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 81 - 18x^2 + x^4 - 90x + 10x^3 + 16x^2 = 0 \\ y \geq 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 10x^3 - 2x^2 - 90x + 81 = 0 \\ y \geq 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+9)(x^2+2x-9) = 0 \\ y \geq 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+9)(x+1+\sqrt{10})(x+1-\sqrt{10}) = 0 \\ \frac{9-x^2}{2} \geq 2x \end{cases}$$

Откуда $x = -9$; $-1+\sqrt{10}$ - посторонние корни, в качестве x подходят $x = 1$; $x = -1 - \sqrt{10}$, и, соответственно $y = 4$; $y = -1 - \sqrt{10}$

Ответ: $(1; 4)$, $(-1-\sqrt{10}; -1-\sqrt{10})$.

№ 1

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3|} \leq 0$$

$\Rightarrow$ возможны 2 случая: числитель ≥ 0, ~~знаменатель~~ знаменатель < 0 $(\neq 0)$; числитель ≤ 0, и знаменатель > 0 $(\neq 0)$

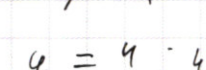
1) $$\begin{cases} x^2 - 2x + 5 - 4|x-1| \geq 0 \\ 4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3| < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 - 4|x-1| + 4 = (|x-1|-2)^2 \geq 0 \text{ при любом } x \\ 4(x)(x-3) + |x| \cdot |x-3| < 0 \end{cases},$$

что равносильно неравенству $4x(x-3) + |x| \cdot |x-3| < 0$ $(x \neq 0)$, $(x \neq 3)$

При $x \in (-\infty; 0)$ $|x| = -x$, $|x-3| = 3-x$:

$4x(x-3) - x(3-x) < 0$

$5x(x-3) < 0$



$x \in (0; 3)$

нет решений на $(-\infty; 0)$

При $x \in (0; 3)$ $|x| = x$ $|x-3| = 3-x$

$4x(x-3) - x(x-3) < 0$

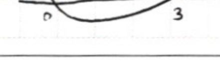
$3x(x-3) < 0$

$x \in (0; 3)$

При $x \in (3; +\infty)$ $|x| = x$ $|x-3| = x-3$

$4x(x-3) + x(x-3) < 0$

$5x(x-3)$



$x \in (0; 3)$

нет решений на $(3; +\infty)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $\begin{cases} x^2 - 2x + 5 - 4|x-1| \le 0 \\ 4x^2 - 12x + |x|\cdot|x-3| > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (|x-2|-2)^2 \le 0 \text{ только при } |x-2|=2 \\ 4x^2 - 12x + |x|\cdot|x-3| > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |x-2| = 2 \Rightarrow x \text{ либо } 0, \text{ либо } 4, \text{ т.к. } x \ne 0, x \text{ может быть только } 4 \\ 4x^2 - 12x + |x|\cdot|x-3| > 0 \end{cases}$

$4\cdot 16 - 12\cdot 4 + 4\cdot 1 = 4(16-4+1) = 4\cdot 13 = 52 > 0$ – верно, т.е. $x=4$ подходит.

Из 1) варианта подходят $x \in (0;3)$, из 2) варианта подходит $x = 4$.

Ответ: $x \in (0;3) \cup \{4\}$.

№7

Заметим, что ~~$f(\frac{1}{a}) = f($~~ $f(a) = f(\frac{1}{a}\cdot a^2) = f(\frac{1}{a}) + f(a^2) = f(\frac{1}{a}) + f(a) + f(a)$, откуда $f(\frac{1}{a}) = -f(a)$ для любого положительного натурального числа a.

Поэтому, чтобы $(3 \le x \le 19,\ 3 \le y \le 19)$, $f(\frac{x}{y})$ было < 0, это значит, что $f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$

Составим таблицу возможных значений $f(a)$ для $3 \le a \le 19$:

a	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$f(a)$	3	4	5	5	7	6	6	7	11	7	13	9	8	8	17	11	19

Пользуясь тем, что $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$, где p_i – простое число, имеем $f(a) =$

$f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots p_n^{\alpha_n}) = f(p_1^{\alpha_1}) + f(p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots p_n^{\alpha_n}) = f(p_1^{\alpha_1}) + f(p_2^{\alpha_2}) + \dots + f(p_n^{\alpha_n}) =$

$= \underbrace{f(p_1) + f(p_1) + \dots + f(p_1)}_{\alpha_1} + \dots + \underbrace{f(p_n) + f(p_n) + \dots + f(p_n)}_{\alpha_n} = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \dots + \alpha_n p_n$ – для заполнения таблицы.

Осталось посчитать, сколько пар $(x;y)$ (натуральных) таких, что $f(x) < f(y)$. Обозначим за $g(x)$ – функция, которая даёт количество $f(a)$ таких, что $3 \le a \le 19$ и $f(a) > f(x)$ – это будет кол-во y таких, что для данного x $f(x) < f(y)$.

Составим таблицу:

x	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
~~g(x) 16~~																	
f(x)	3	4	5	5	7	6	6	7	11	7	13	9	8	8	17	11	19
g(x)	16	15	13	13	8	11	11	8	3	8	2	6	8	8	1	3	0

Сумма всех $g(x)$ для $3 \le x \le 19$ и будет являться количеству всех возможных натуральных пар $(x;y)$, потому что мы посчитали кол-во y, подходящих для каждого x.

$S = 16 + 15 + 13 + 13 + 8 + 11 + 11 + 8 + 3 + 8 + 2 + 6 + 8 + 8 + 1 + 3 + 0 =$

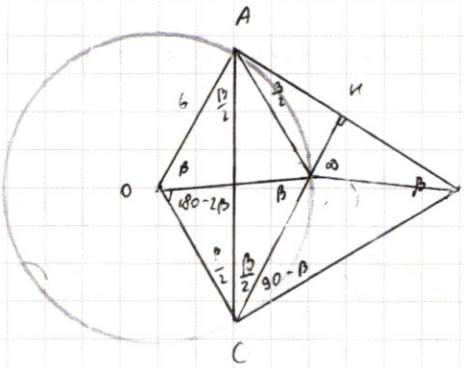
$= 16 + 15 + 13 \cdot 2 + 8 \cdot 5 + 11 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2 + 6 + 1 =$

$= 16 + 15 + 26 + 40 + 22 + 6 + 9 = 31 + 66 + 28 + 9 =$

$= 97 + 37 = 134$ – нужная сумма

Ответ: 134.

№4



Пусть $\angle B = \beta$. Тогда $\angle HCB = 90 - \beta$, т.к. $\angle H = 90°$, тогда $\angle COD = 180 - 2\beta$ как центр. угол, ~~как~~ опирающийся на $\smile CD$.

$\angle AOC = 180 - \beta$, т.к. $ABCO$ – четырехугольник, $\angle B = \beta$, $\angle A = \angle C = 90°$ (касательные). Значит $\angle AOD = \beta$. $\triangle AOD$ и ABC равнобедренные и подобны, т.к. $\angle AOD = \angle ABC = \beta$, углы при основании равны.

$\frac{AB}{AC} = \frac{AO}{AD} = \frac{6}{AD}$. По теореме косинусов $AD = 72 - 72\cos\beta$, $AC = 2AB^2 - 2AB^2\cos\beta$,

поэтому $\frac{AD}{AC} = \frac{6}{AB} = \frac{72(1-\cos\beta)}{2AB^2(1-\cos\beta)} = \frac{36}{AB^2} = \frac{6}{AB}$; $36AB = 6AB^2$
$AB = 6 = R$.

$S_{\triangle ABD} = 15 = \frac{AB \cdot DH}{2} = 3 \cdot DH$, $DH = 5$. $\angle DAH = \angle \frac{AOD}{2} = \frac{\beta}{2}$.

Т.к. $AO = OC = R = AB = BC = 6$, $\angle A = \angle C = 90° \Rightarrow ABCO$ – квадрат. ~~$\angle AOC = 180 - \beta = \angle B = \beta$~~ $\Rightarrow \beta = 90°$. ~~$\frac{AB}{CH} = \frac{1}{\cos\beta} = \frac{BC}{CH} = \frac{1}{\cos 90°} =$~~

$\angle CHB = \angle CBH = 90° \Rightarrow CH = CB = 6$, $\frac{AB}{CH} = \frac{BC}{CH} = \frac{6}{6} = 1$

Ответ: 1.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \le 0$$

$$\begin{cases} x^2-2x+5-4|x-1| \le 0 \\ 4x^2-12x+|x|\cdot|x-3| > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-2x+5-4|x-1| \ge 0 \\ 4x^2-12x+|x|\cdot|x-3| < 0 \end{cases}$$

$4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|=0$

$4(x^2-3x+$

$(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 6$

$4x^2-12x$

$153\ x^2-3x$

$x^2-2x+5-4|x-1|=$

$D=4-20$

$x_0=\frac{2}{2}=1$

$4-4\cdot a=0 \quad a=1$

$x^2-2x+1+4(1-|x-1|)\le 0$

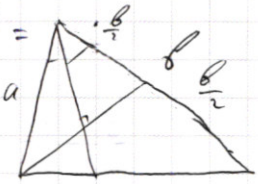
$0\le(x-1)^2\le 4(1-|x-1|)\ ,\ |x-1|=k$

$k^2\le 4-4k$

$k^2+4k-4\le 0$

$k^2+4k+4\le 8$

$(k+2)^2\le 8$

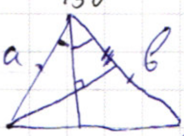


$a=74$

$b=148$

$b=2a$

$a\cdot\frac{b}{2}$



50 100 150

51 102 147

52 104 144

72 144 84

156

$\begin{array}{r} 74 \\ \times 148 \\ \hline 222 \end{array}$

78

51 74 50 75

если a – целое, то b – заведомо целое

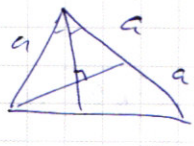
$c:3$

$\begin{cases} a+b+c=300 \\ a>0 \\ b>0 \\ c>0 \end{cases}$

$146+70 \quad c=3(100-a)$

$130+70+16 \quad c=3\cdot 99$

216



$b=2a \quad 156$

$a+b+c=300 \ 154$

$a+2a+c=300$

$3a+c=300$

73 146 81 $c=3(100-a)$

74 148 78

147

$300 \,|\, 4$, 28, 75

$b>a$

$3a>c$

$c>b$

$3a+c=300 \quad c$

$a+b>c$

$b+c>a$

$a+c>b$

$\begin{cases} a+b>c \\ a+c>b \end{cases}$

$\begin{cases} 3a>c \\ a+c>2a \end{cases}$

$\begin{cases} 3a>c \\ c>a \end{cases}$

75 150 75

$\begin{array}{r} 74 \\ \times 3 \\ \hline 222 \end{array}$

78

$3a>3(100-a)$

$3(100-a)>a$

$300-3a>a$

$140+12$

152

$a>100-a$

$300>4a$

$75>a$

$2a>100$

$a>50$

$a<75$

$a>50$

$x=-1-\sqrt{10}$

$1+\sqrt{10}$

$1+10+2\sqrt{10}=9$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

50

50 | 51 52 53 54 55 | 56

$50+5=55$

$56-50+1=7$

$56-50-1=5$

50 | ... | 75

$75-50-1=25-1=24$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

либо $x>0$ $y>0$
либо $x<0$ $y<0$

$2y=9-x^2$

$y=\frac{9-x^2}{2}=4,5-0,5x^2$

$2\sqrt{xy}=2y-4x$

$4xy=(2y-4x)^2$

$4,5-0,5x^2-2x=\sqrt{4,5x-0,5x^3}$

$27=3^3$

$(3^3)^2=3^6=81\cdot9$

$2y=80\cdot9$

$y=40\cdot9$

$y-2x=\sqrt{xy}$

$y=\frac{9-x^2}{2}$

$40\cdot9-2\cdot81\cdot9=$

$\sqrt{81\cdot81\cdot80}=81\sqrt{80}$

$y^2-4xy+4x^2=xy$

$$\begin{cases} y^2-3xy+4x^2=0 \\ y=\frac{9-x^2}{2} \end{cases}$$

$81-18x^2+$

$\frac{(3-x)(3+x)}{2}-3\frac{(3-x)(3+x)}{2}x$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$y\geq0$
$x\geq0$

$\sqrt{y}^2-2\sqrt{x}^2=\sqrt{xy}$

$\sqrt{y}^2-2\sqrt{x}^2=\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$

$2y=9-x^2=(3-x)(3+x)$

$x=3$
$y=0$

$\left(\frac{9-x^2}{2}\right)^2-3\cdot\frac{9x-x^3}{2}+4x^2=0$

$\frac{81-18x^2+x^4}{4}-\frac{27x-3x^3}{2}+16x^2=0$

$81-18x^2+x^4-54x+6x^3+16x^2=0$

$x^4+6x^3-2x^2-54x+81=0$

$81=9\cdot9$
$27\cdot3$
$-3\ (-27)$

$81-2\cdot81-18+2\cdot81+81$

$54=18\cdot3$
$2\cdot27$

$y=\sqrt{xy}+2x$

$y=4,5-0,5x^2$

$x^2=9-2y$

$x=\pm\sqrt{9-2y}$

1 y

y =

$x^4+6x^3-2x^2-54x+81$

$y^2+4xy+4x^2=xy$

$4x^2+3xy+y^2=0$

$y=4,5-0,5x^2$

$4x^2+3\cdot(4,5-0,5x^2)x+4,5-0,5x^2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$y^2-4xy+4x^2=xy$

$$\begin{cases} y^2-5xy+4x^2=0 \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$y=\frac{9-x^2}{2}$

$\frac{(9-x^2)^2}{4}-5x\frac{(9-x^2)}{2}+4x^2=0 \quad |\cdot 4$

$(9-x^2)^2-10x(9-x^2)+16x^2=0$

$81-18x^2+x^4-90x+10x^3+16x^2=0$

$x^4+10x^3-2x^2-90x+81=0$

$1+10-2-90+81=$

$9-9=0$

x	y	x	y
1	81	-1	-81
3	27	-3	-27
9	9	-9	-9
27	3	-27	-3
81	1	-81	-1

$2y=-72$

$y=-36$

$-36+18=$

$y-2x\geq 0$

$y\geq 2x$

y: $x=1,3,\ -9,-27,-81$

$\begin{array}{r} x^4+10x^3-2x^2-90x+81 \\ x^4-x^3 \\ \hline 11x^3-2x^2 \\ 11x^3-11x^2 \\ \hline 9x^2-90x \\ 9x^2-9x \\ \hline -81x+81 \\ -81x+81 \\ \hline 0 \end{array} \Big| \begin{array}{l} x-1 \\ \hline x^3+11x^2+9x-81 \end{array}$

$x^3+11x^2+9x-81=0$

$(x^3+11x^2+9x-81)(x-1)=$

$x^4+11x^3+9x^2-81x-x^3-11x^2-9x+81=$

$x^4+10x^3-2x^2-90x+81$

$(x^3+11x^2+9x-81)(x-1)=0$

$x_1=1$ v

$x=-9=-3^2$

$(-3^2)^3=-3^6+11\cdot 3^4-3^4-3^4=$

$-3^6+9\cdot 3^4=-3^6+3^6$

$\begin{array}{r} x^3+11x^2+9x-81 \\ x^3+9x^2 \\ \hline 2x^2-9x \\ 2x^2+18x \\ \hline -27x-81 \\ -27x \end{array} \Big| \begin{array}{l} x+9 \\ \hline x^2+2x-27 \end{array}$

$$\begin{cases} y-2(-9)=\sqrt{xy} \\ 2y+81=9 \end{cases}$$

$2y=-72$

$y=-36$

$-36+18=\sqrt{-4\cdot 9\cdot -9}=$

$-18=2\cdot 9=18$

$x=1$ ~~$y=81$~~

$2y+1$

$y=4$

$2y=8$

$y=4$

$4-2=2\sqrt{\ }$

$y-18=3\sqrt{y}$

$2y=9-81=-72$

$(9-)(3+x)$

$-6\cdot -12=72$

$9-9^2=$

$9(1-9)=9\cdot 8=72$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$(x^3 + 11x^2 + 9x - 81)(x-1) = 0$ $\quad x_1 = 1$

$D = 16 + 36 = 52$

$x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{13}}{2} = -2 \pm \sqrt{13}$

$(x+2)^2 \le 13$

$\sqrt{13} > 3$

$x + 2$

$2 \cdot 26 =$

$4 \cdot 13 =$

$x = -9$

$y - 2x^{4,5} = -\sqrt{xy}$

$y - 2x > 0$

$\frac{9 - x^2}{2} \geqslant 2x$

$9 - x^2 \geqslant 4x$

$x^2 + 4x - 9 \le 0$

$x^2 + 4x + 4 - 13 \le 0$

$x = -9 = -3^2$

$(-3^2)^3 = -3^6 + 11 \cdot 3^4 - 3^4 \cdot 3^4 =$

$x^2 - 4x + 4 = 4 \quad -3^6 + 11 \cdot 3^4 - 2 \cdot 3^4 =$

$x(x-4) = 0 \quad -3^6 + 9 \cdot 3^4 =$

$-3^6 + 3^6 = 0$

$x^3 + 11x^2 + 9x + 81 \,|\, x+9$

$x^3 + 9x \quad\quad x^2 + 2x - 9$

$-2x^2 + 9x$

$2x^2 + 18x$

$-9x - 81$

$-9x + 81$

$(x^2 + 2x - 9)(x+9) =$

$x^3 + 2x^2 - 9x + 9x^2 + 18x - 81 =$

$x^3 + 11x^2 + 9x - 81$

$81 - 4 \cdot 81 + 9 \le 0$

$81(1-3) + 9 \le 0$

$x = -9$

$y = \frac{9 - x^2}{2} = \frac{9 + 81}{2} =$

$-\frac{72}{2} = -36$

$D = 4 + 36 = 40$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{10}}{2}$ $\quad x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{10}$

$x_1 + x_2 = 2$

$x_1 x_2 = -9$

$3 \quad 3$

$D = 4 + 36 = 40 \quad 1 \quad 9$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{10}}{2} = -1 \pm \sqrt{10}$

$x_1 = -1 + \sqrt{10}$

$x_1^2 = (\sqrt{10} - 1)^2 = 10 - 2\sqrt{10} + 1 = 11 - 2\sqrt{10}$

$9 - 11 + 2\sqrt{10} = 2y$

$-2 + 2\sqrt{10} = 2y$

$y = \sqrt{10} - 1$

$x_1 = \sqrt{10} - 1$

$x, y = \sqrt{10} - 1$

$x = -1 + \sqrt{10}$

$2y + 1 - 2\sqrt{10} + 10 = 9$

$2y - 2\sqrt{10} = -2$

$y - \sqrt{10} = -1$

$y = -1 + \sqrt{10}$

$\frac{9 - y^2}{2} \geqslant 2x$

$9 - x^2 \geqslant 4x$

$\sqrt{10} - 1 - 2\sqrt{10} + 2 =$

$-1 + \sqrt{10} + 2 - 2\sqrt{10} = \cancel{\quad} \sqrt{10} - 1$

$0 \geqslant x^2 + 4x - 9$

$x_1 = -1 - \sqrt{10}$

$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 36}}{2} =$

$x_1^2 = 1 + 2\sqrt{10} + 10 = 11 + 2\sqrt{10}$

$9 - x_1^2 = 9 - 11 - 2\sqrt{10} = -2 - 2\sqrt{10} = 2y$

$y = -1 - \sqrt{10}$

$x = 1 - \sqrt{10}$

$2y + 1 - 2\sqrt{10} + 10 = 9$

$2y = -1 + \sqrt{10}$

$x = \sqrt{10} - \sqrt{10}$

$\sqrt{10}$

$x_1 = \frac{-4 \pm 2\sqrt{4 + 9}}{2} =$

$-2 \pm \sqrt{13}$

$-1 - \sqrt{10} + 2 + 2\sqrt{10} = 1 + \sqrt{10}$

$-2 - \sqrt{13} \quad -2 + \sqrt{13}$

$-1 - \sqrt{10}$

$x(x-3) + x(x-3)$

$x \in (-2 - \sqrt{13}; -2 + \sqrt{13})$

$x^2 - 3x$

$\begin{cases} x^2 - 2x + 5 - 4|x-1| \le 0 \\ 4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3| > 0 \end{cases}$

-9

$-2 - \sqrt{13} < -1 - \sqrt{13}$

$4(x^2 - 3x)$

$(x-1)^2 + 4 - 4|x-1| \le 0$

$0 < 1 - \sqrt{10} + \sqrt{13}$

$(|x-1| - 2)^2 \le 0$

$-2 + \sqrt{13} > -$

$4x(x-3) + |x| \cdot |x-3|$

$x^2 + 2x - 9 \quad x + 1 + \sqrt{10}$

$D = 4 + 36 = 40$

$4 + 9 \cdot 9 =$

$(x + 1 + \sqrt{10})(x + 1 - \sqrt{10})$

$x_1 = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1 + 9}}{2} = -1 \pm \sqrt{10}$

$4x(x-3) < |x| \cdot |x-3|$

при $x < 0$

$|x| = -x$

$|x-3| = -x + 3$

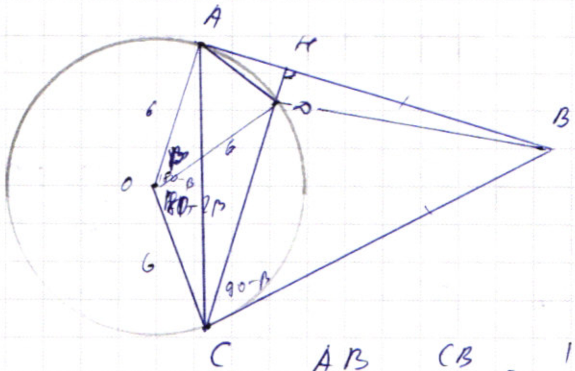
$x_2 = -1 - \sqrt{10} \quad 1 + \sqrt{10}$

$x_1 = -1 + \sqrt{10} \quad 1 - \sqrt{10}$

$4x(x-3) - x(3-x)$

3 4 5 5 7 6 6 7 11 7 13 9 8 8 17 11 19

31



$S = 15 \quad R = 6$

$\frac{AB}{CH} = \frac{CB}{CH} = \frac{1}{\sin B}$

$S = \frac{AD \cdot DB \cdot \sin ADB}{2}$

$\frac{CH}{CB} = \sin B$

9 7

$\frac{CH}{CB} = \cos \angle HCB = \frac{1}{2} \angle COD$

28 + 9 =
30 + 2 = 22
90 + 30 + 14 =
120 + 14 =
134

$180 - 2\beta + x$

$2\sin\beta = \angle COD$

$AD =$

$B =$

$2B = \angle C$

$2\beta = \angle COD$

$100 + 34$

$AD^2 = 36 + 36 - 2 \cdot 36 \cos\beta$

$AD^2 = 2 \cdot 36(1 - \cos\beta)$

AD

$\angle AOC = 180 - \beta$

$180 - B$

$\frac{AB}{CH} = =$

$\frac{5 \cdot 6}{2} = 15$

$\frac{36}{AB} = \frac{6}{}$

$90 - \frac{B}{2}$

$\frac{AB}{AC} = \frac{6}{AD}$

$\frac{6}{AB} = 1$

$\frac{B}{2}$

$\frac{6}{AB} = \frac{AD}{AC}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{6}{AB}$

$\frac{72}{2AB^2} = \frac{6AB}{AB^2} = \frac{12AB}{2AB^2}$

$180 - \beta$

$\frac{AD}{AC} = \frac{72(1-\cos\beta)}{2AB^2(1-\cos\beta)180} = \frac{72}{2AB^2} = \frac{6}{AB} = AC =$

$180 - \beta$

$\frac{CH}{BC} = \cos\beta$

$180 - \beta$

$\frac{180 - (180 - 2\beta)}{2} = AD \cdot AB =$

$\frac{2\beta}{2} = \beta$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(p) = p$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = f(1 \cdot p) = f(1) + f(p) = p$

$f(1) = 0$

$\boxed{13:24}$

14:42

$f(4) = f(1 \cdot 4) = f(1) + f(4) = f(2) + f(2) = 2f(2) = 2 \cdot 2 = 4$

$3 \leq x \leq 19$

$3 \leq y \leq 19$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f\left(\frac{1}{4}\right)$

$f(abc) = f(a) + f(bc) = f(a) + f(b) + f(c)$

$f(2) = \left(\frac{1}{2} \cdot 4\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(4) = 2$

$f\left(\frac{1}{2}\right) =$

3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

$f(6) = f(2 \cdot 3) = f(2) + f(3) = 5$

$f(4) = f(2 \cdot 2) = 2 + 2 = 4$

$f(x)$

$f(8) = f(4 \cdot 2) = f(4) + f(2) = 6$

x 3 4 5

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

$f\left(\frac{3}{5}\right) = f(3) + f\left(\frac{1}{5}\right) = 3 + f\left(\frac{1}{3}\right)$

$f(p) = \left(\frac{1}{p} \cdot p^2\right) = f\left(\frac{1}{p}\right) + f(p^2) =$

$f(p) + f(p) + f\left(\frac{1}{p}\right) =$

$2p + f\left(\frac{1}{p}\right) = p$

$f\left(\frac{1}{p}\right) = -p$

	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$f(a)$	3	4	5	5	7	6	6	7	11	7	13	9	8	8	17	11	19
$f\left(\frac{1}{a}\right)$	-3	-4	-5	-5	-7	-6	-6	-7	-11	-7	-13	-5	-8	-8	-17	-11	-19

$3 + f\left(\frac{}{a}\right)$

$f(p_1^{\alpha_1}) =$

$f(p_1) + f(p_1) =$

$\alpha_1 \cdot p_1$

3 16

4 15

5 13

6 11

$f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{1}{x} \cdot x^2\right) = f(4) = f(2) + f(2)$

$f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x^2)$ $f(3 \cdot 2) = f(3) + f(2) =$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$f(x) = f(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \dots p_n^{\alpha_n}) =$

$2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

$f(p_1^{\alpha_1}) + f(p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}) =$

$f(p_1^{\alpha_1}) + f(p_1^{\alpha_1}) + \dots + f(p_n^{\alpha_n})$

$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \dots \alpha_n p_n$

3 4 5

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)