МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y| > 6, \\ x^2-2x-3y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 19$, $3 \leqslant y \leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\le 0 \Leftrightarrow \frac{|x-1|^2-4|x-1|+4}{4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(|x-1|-2)^2}{4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|}\le 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l}|x-1|-2=0\\ 4x(3-x)>|x|\cdot|x-3|\end{array}\right.\\ 4x(3-x)\ne|x|\cdot|x-3|\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\notin\{\ldots;0\}\\ 4x(3-x)>|x||x-3|\end{array}\right.\\ x\in\{-1;3\}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x\notin\{-1;0;3\}\\ x\in(0;3)\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x\in(0;3)$

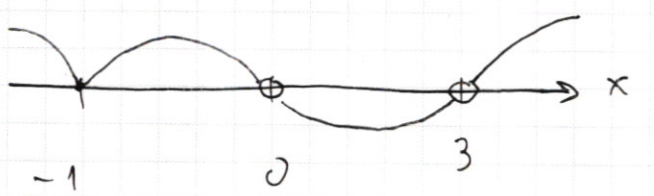
Ответ: $x\in(0;3)$

№1

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2+4-4|x-1|}{4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(|x-1|-2)^2}{4x(x-3)+|x\cdot(x-3)|}\le 0.$$

$(|x-1|-2)^2=0 \Leftrightarrow x\in\{-1;3\}.$

$4x(x-3)+|x\cdot(x-3)|=0 \Leftrightarrow x(x-3)=0 \Leftrightarrow x\in\{0;3\}.$

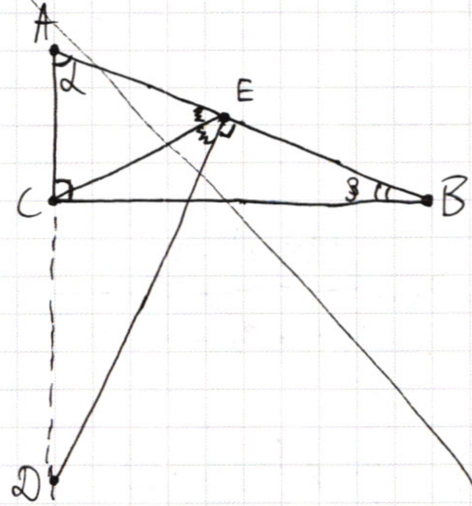


Итак, $\dfrac{(|x-1|-2)^2}{4x(x-3)+|x(x-3)|}\le 0 \Leftrightarrow x\in\{-1\}\cup(0;3)$

Ответ: $x\in\{-1\}\cup(0;3)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№5



$AC \perp BC$

$E \in AB$, $D \in AC$

$DE \perp AB$

$AC = \sqrt{29}$, $BC = \frac{5}{2}\sqrt{29}$, $\angle CED = 45^\circ$

$AD : AC = ?$, $S_{\triangle AED} = ?$

Решение.

0. $\angle AED = 90^\circ \Rightarrow \angle EDA = 180^\circ - \alpha - 90^\circ = \beta = \angle ABC \Rightarrow \triangle AED \underset{k}{\sim} \triangle ACB$.

1. $\frac{AD}{AC} = 1 + \frac{CD}{AC} = 1 + \frac{ED}{AE}$ (EC – бисс $\angle AED$) $= 1 + \frac{BC}{AC}$ (подобие) $= 1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$.

2. $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{29} \cdot \sqrt{1 + \frac{25}{4}} = \frac{29}{2}$; $AD = \frac{7}{2} AC = \frac{1}{k} \cdot AB \Rightarrow k = \frac{2}{7} \frac{AB}{AC} =$

$= \frac{2}{7} \cdot \frac{29}{2 \cdot \sqrt{29}} = \frac{\sqrt{29}}{7}$. $S_{\triangle AED} = S_{\triangle ACB} \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \frac{49}{29} = \frac{5}{4} \cdot 49 = \frac{245}{4}$

Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{7}{2}$, $S_{\triangle AED} = \frac{245}{4}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

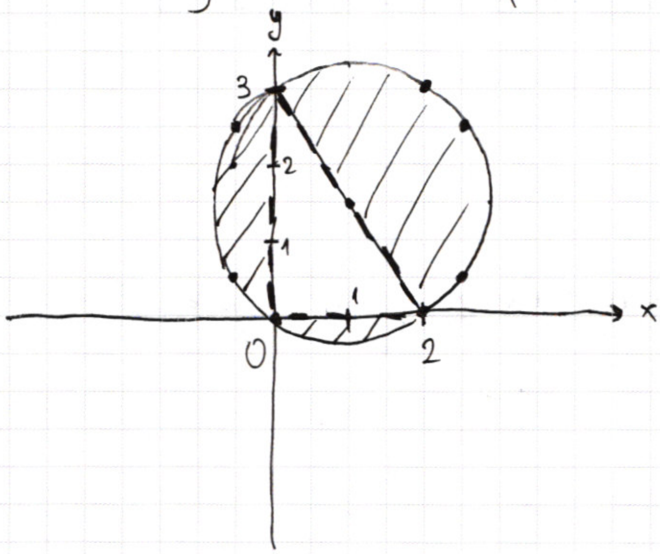
№6

$$3x + 2y + 6-3x-2y \geq 6$$

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y| > 6 \\ x^2-2x-3y+y^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y| > 6 \\ (x-1)^2-1+(y-1{,}5)^2-2{,}25 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{НЕ}(x, y, 6-3x-2y \geq 0) \Leftrightarrow \text{НЕ}(x, y \geq 0;\ y \leq 3-1{,}5x). \leftarrow \text{НЕ треугольник} \\ (x-1)^2+(y-1{,}5)^2 \leq \sqrt{3{,}25}^2 \left(=\left(\frac{1}{2}\sqrt{13}\right)^2\right). \leftarrow \text{круг} \end{cases}$$

Oxy: $\left(\sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}\right)$



$$S = \pi \cdot \sqrt{3{,}25}^2 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 =$$

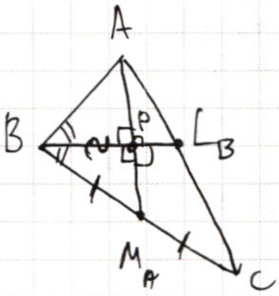
$$= \pi \cdot 3{,}25 - 3$$

Ответ: $3{,}25\pi - 3$

№2

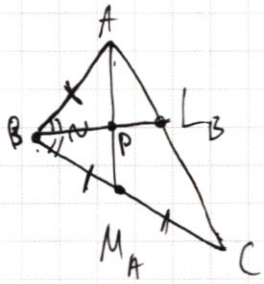
Докажем, что бис $\perp$ мед $\Leftrightarrow$ 1 сторона в 2 раза больше другой.

1. $\Rightarrow$



$\triangle APB = \triangle M_A PB \overset{(\text{СУС})}{\Rightarrow} AB = \frac{1}{2} BC$

2. $\Leftarrow$



$\triangle APB = \triangle M_A PB$ (СУС) $\Rightarrow \angle APB = \angle M_A PB = 90^\circ$.

Итак, у подходящих и только у подходящих $\triangle$ одна сторона в 2 раза больше другой. Имеем:

$$\begin{cases} \text{НУО } a \le b \le c < a+b \\ a, b, c \in \mathbb{N} \\ a+b+c = 300 \\ \left[\begin{array}{l} c = 2a \\ c = 2b \\ b = 2a \end{array}\right. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7 $f(x): \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$

Имеем:

$$\begin{cases} \forall a,b \in \mathbb{Q}: a,b>0 \hookrightarrow f(ab)=f(a)+f(b) \\ \forall p \in \mathbb{P} \hookrightarrow f(p)=p \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{Q}: x>0 \hookrightarrow f(x)=f(1)+f(x) \\ \forall p \in \mathbb{P} \hookrightarrow f(1)=f(p)+f(1/p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1)=0 \\ \forall p \in \mathbb{P} \hookrightarrow f(p)=-f(\frac{1}{p}). \end{cases}$$

Пусть $n \ (n \in \mathbb{Q}, n>0, n \neq 1) = \frac{k}{l}$, где $k, l \in \mathbb{N}$, $k \perp l$

Пусть $k = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$, $l = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\beta_m}$. Тогда

$\exists i_1, j_1 \in \mathbb{N}: i_1 \in [1;n], j_1 \in [1;m]$; $f(k) = f(p_{i_1}) + f(p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_1}^{\alpha_{i_1}-1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n})$,

$f(l) = f(p_{j_1}) + f(p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_{j_1}^{\beta_{j_1}-1} \cdot p_m^{\beta_m}) \Rightarrow f(k) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i$, $f(\frac{1}{l}) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j p_j \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(n) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i - \sum_{j=1}^{m} \beta_j p_j}. \text{ Тогда}$$

$$\begin{cases} x, y \in \mathbb{N} \\ 3 \leq x, y \leq 19 \\ f(\frac{x}{y}) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in \mathbb{N} \\ 3 \leq x, y \leq 19 \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i < \sum_{j=1}^{m} \beta_j p_j. \text{ (здесь } x = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n} \text{ и } y = p_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{\beta_m}). \end{cases}$$

a	$f(a)$
3	3
4	4
5	5
6	5
7	7
8	6
9	6
10	7
11	11
12	7
13	13
14	9
15	8
16	8
17	17
18	10
19	19

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

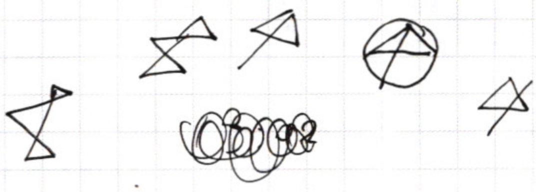
$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \\ y\neq 0 \\ xy\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2\cdot\sqrt{\frac{x}{y}}^2=\sqrt{\frac{x}{y}} \\ 2y+x^2=9 \\ \frac{x}{y}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2+t-1=0, \text{ где } t=\sqrt{\frac{x}{y}} \\ 2y+x^2=9 \\ t\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4} \\ 2y+x^2=9 \\ t\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y}=\frac{1}{4} \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=y \\ x^2+8x-9=(x+9)(x-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=4x \\ x\in\{-9;1\} \end{cases} \Leftrightarrow (x;y)\in\{(-9;-36);(1;4)\}$$

Ответ: $(x;y)\in\{(-9;-36);(1;4)\}$

$325 | 13$
$25 | 5$
$\quad | 5$

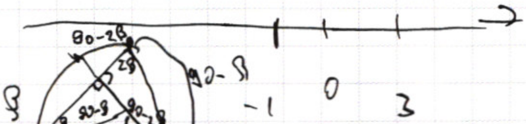


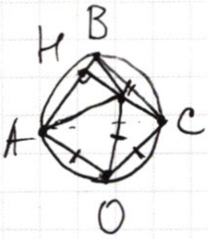
$|x-1|^2 = x^2-2x+1$

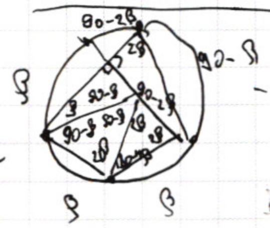
$+4 \qquad x^2-2x+5$

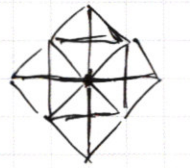
$-4|x-1| \quad$ ИР

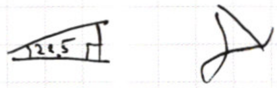
$(|x-1|-2)^2$







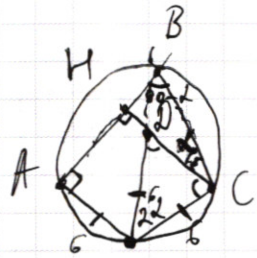




$325 | 5$
$65 | 5$
13

$\sqrt{\frac{325}{100}} = \sqrt{\frac{13\cdot5\cdot5}{5\cdot5\cdot2\cdot2}} = \frac{1}{2}\sqrt{13}$

$9-6+5-4\cdot2=0$



$\frac{1}{4}\sqrt{13}$

$\beta+\gamma = 90^\circ$

$1+2+5-4\cdot2=0$

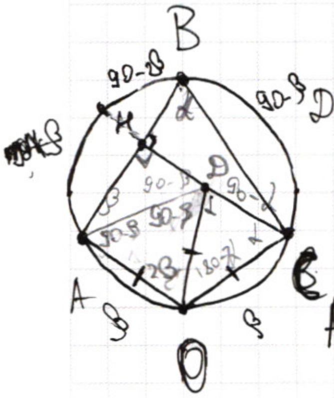
$\beta = 45^\circ+D \Rightarrow D = \beta - 45^\circ$

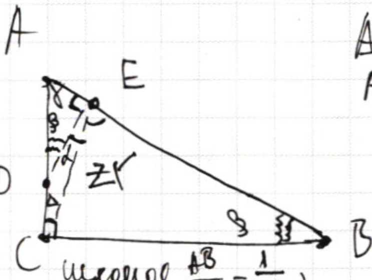
$R\cdot\sin(90-\beta)$.

$\frac{AD}{AC}$, S_{AED}

$AB\cdot DH = 30$

$DH = 6-6\sin\alpha$

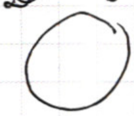




$AC = \sqrt{25}$

$BC = \frac{5\sqrt{25}}{2}$

$\alpha = 45^\circ$

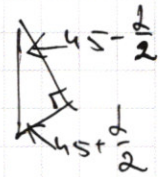


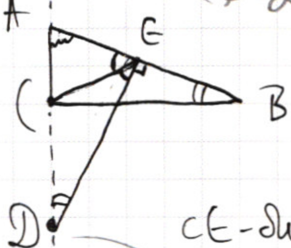
шкмнос $\frac{AB}{CH} = \frac{1}{\sin\alpha}$

$180-2\beta = 180-\alpha$

$2\beta = \alpha$

$y \leq 6-3x$





$\sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

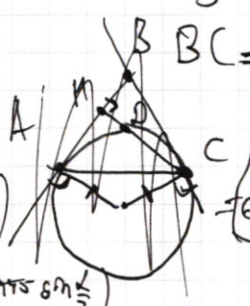
$y \leq 3-1{,}5x$

$\cancel{90}-\beta+\gamma = 180-\alpha$
90

$\alpha+\gamma = 90+\beta$

$360-\alpha-2\gamma = 180 \Rightarrow \alpha+2\gamma = 180$

$BC = 6\cdot\frac{\sin(45+\frac{\alpha}{2})}{\cos(45+\frac{\alpha}{2})}$

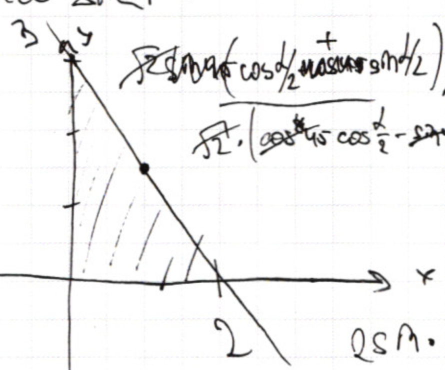


CE - бисс $\angle AED$.

$\frac{\sqrt{2}\sin 45(\cos\frac{\alpha}{2} + \cos 45 \sin\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{2}\cdot(\cos 45\cos\frac{\alpha}{2} - \sin 45\sin\frac{\alpha}{2})}$

$6\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}$

$4\sin^4 - 4\sin^2 + a^2 = 0 \quad \beta+\gamma = 90$



$\sin^2 = \frac{4 \pm \sqrt{16-16a^2}}{4\cdot2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$

$\angle AOY = 116$

$2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2) = \sin\alpha$

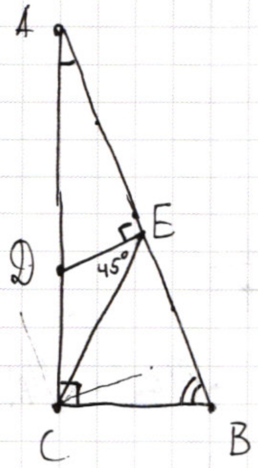
$2\sin\cdot\sqrt{1-\sin^2} = a$

$4\sin^2 - 4\sin^4 = a^2$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№ 5



$\angle ACB = 90°$,

$D \in AC$, $E \in AB$

$DE \perp AB$

$AC = \frac{5}{2}\sqrt{29}$, $BC = \sqrt{29}$

$\angle CED = 45°$

$\frac{AD}{AC}$, $S_{\triangle AED} = ?$

Решение

0. $\angle CEB = \angle DEB - \angle CED = 45°$. Пусть $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$.

$\angle ADE = 180° - \angle DEA - \angle EAD = 90° - \alpha = \beta. \Rightarrow \triangle ABC \underset{k}{\sim} \triangle ADE$.

1. EC – биссектриса вн. угла для $\triangle ADE \Rightarrow$

$\frac{AD}{AC} = \frac{AC - CD}{AC} = 1 - \frac{CD}{AC} = 1 - \frac{DE}{AE}$ (бисс.) $= 1 - \frac{BC}{AC}$ (подобие) $=$

$= 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

2. $AD = \frac{3}{5}AC$ (п. 1) $= k \cdot AB$ (подобие) $\Rightarrow k = \frac{3AC}{5AB} = \frac{3 \cdot \frac{\cancel{5}}{2}\cancel{\sqrt{29}}}{\cancel{5} \cdot \cancel{\sqrt{29}} \cdot \sqrt{1 + \frac{25}{4}}} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{29}} = \frac{3}{\sqrt{29}}$.

$S_{\triangle AED} = k^2 S_{\triangle ACB} = \frac{9}{29} \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{9}{\cancel{29}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \cancel{29} = \frac{45}{2}$

Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$; $S_{\triangle AED} = \frac{45}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7. $f(x)\ \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$

$\forall a,b \in \mathbb{Q};\ a,b>0 \hookrightarrow f(ab)=f(a)+f(b)$.

$f(x)=f(1)+f(x) \Rightarrow f(1)=0$

$f(1)=f(p)+f(\frac{1}{p}) \Rightarrow f(\frac{1}{p})=-f(p)$

$a=\frac{p_a}{q_a}$

$p_a = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot \ldots \Rightarrow f(p_a)=\alpha_1 f(p_1$

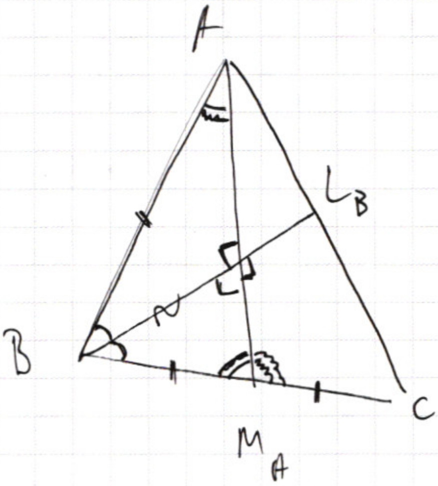
$f(q_a)=-\beta_1 f(p_1')+\ldots$

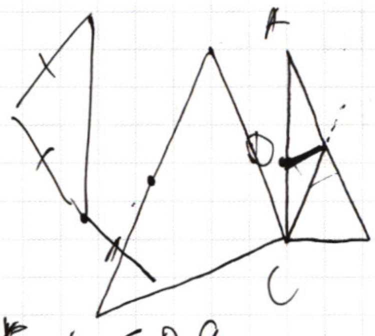
$f(p_a)=\sum_i p_i$

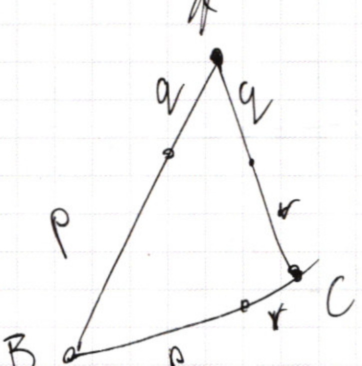
$f(q_a)=-\sum_j p_j' \Rightarrow$

$\Rightarrow f(a)<0 \Leftrightarrow \sum_i p_i < \sum_j p_j'$

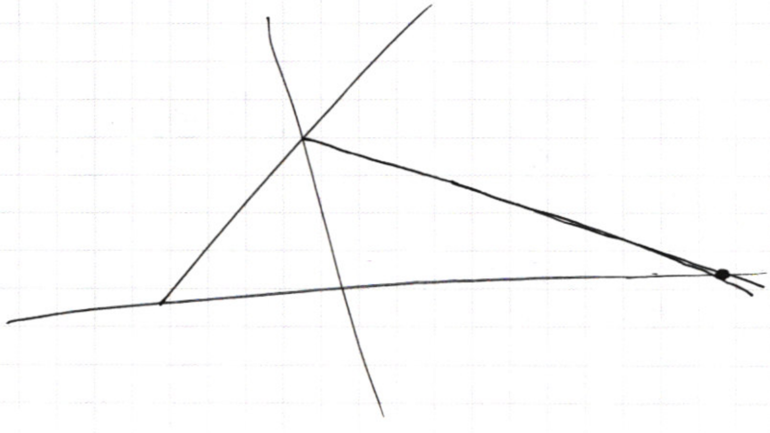
$AM_A \perp BL_B$



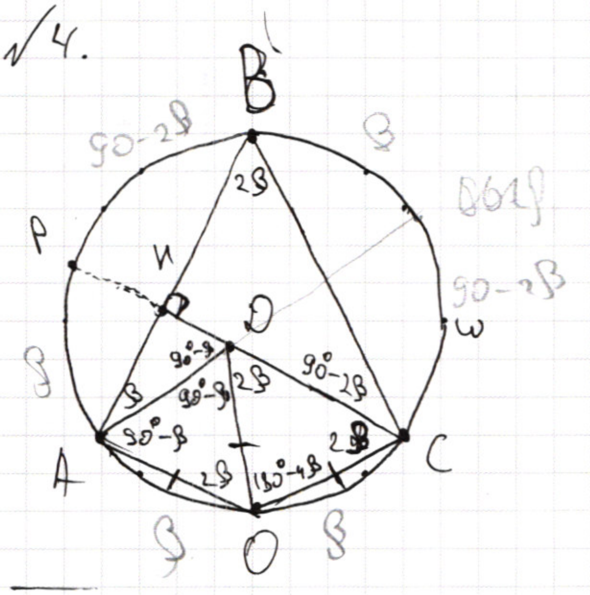




$r \le p, q$



№4.



$S_{\triangle ABD}=15$

$AO=DO=CO=6$

$CH\perp AB,\ H\in AB$

$\angle OAB=\angle OCB=90°$

Окр Ω с центром в O имеет радиус 6 и касается AB и AC в A и C соотв.

$\frac{AB}{CH}=?$

Решение.

0. $\angle OAB=\angle OCB=90° \Rightarrow ABCO$ - впис. в ω с диам. OB.

1. Пусть $\angle OCD=2\beta$. $\triangle COD$ - р/б $\Rightarrow \angle CDO=2\beta$; $\angle DOC=180°-4\beta$;

~~$\angle DOA=180°$~~ $\angle DCB=90°-\angle OCD=90°-2\beta$; $\angle CBH=90°-\angle HCB=$ $=2\beta$. $\angle DOA=180°-\angle ABC-\angle DOC=2\beta$ (впис.) $\Rightarrow \angle ADO=\angle OAD=90°-\beta$ (р/б). $\angle ADH=180°-\angle ADO-\angle ODC=90°-\beta \Rightarrow \angle DAH=90°-\angle ADH=\beta$.

2. ~~$AB=BC \Rightarrow \frac{AB}{CH}=\frac{BC}{CH}=\frac{1}{\cos(90°-2\beta)}=\frac{1}{\sin 2\beta}$~~ $\frac{AB}{CH}=\frac{2S_{\triangle ABD}}{DH\cdot CH}=$

$=\frac{30}{AH^2}$ (кас. и отр. секущ.) ~~$=\frac{30}{4}$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА