

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy}, \\ 2y + x^2 = 9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{29}$, $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6, \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leq x \leq 19$, $3 \leq y \leq 19$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3|} \leq 0$$

$$\frac{(x-1)^2 + 4 - 4|x-1|}{4x(x-3) + |x| \cdot |x-3|} \leq 0$$

$$\frac{|x-1|(1-x-4)+4}{4x(x-3) + |x| \cdot |x-3|} \leq 0$$

$x < -1$	I	0	II	1	III	3	IV
(x)	-		+		+		+
(x-1)	-		-		+		+
(x-3)	-		-		-		+

ОАЗ: $x \notin \{0; 3\}$

I $\frac{(1-x)(1-x-4)+4}{4x(x-3) + (-x)(3-x)} \leq 0, \underline{x < 0}$

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{5x(x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{5x(x-3)} \leq 0$$

но $x < 0 \Rightarrow I(\emptyset)$

II $\frac{(-x+1)(-x+1-4)+4}{4x(x+3) + x(3-x)} \leq 0, \underline{x \in (0; 1]}$

$$\frac{(x+1)^2}{3x(x-3)} \leq 0$$

II $(0; 1]$

III $\frac{(x-1)(x-1-4)+4}{4x(x-3) + x(3-x)} \leq 0, \underline{x \in (1; 3)}$

$$\frac{(x-3)^2}{3x(x-3)} \leq 0$$

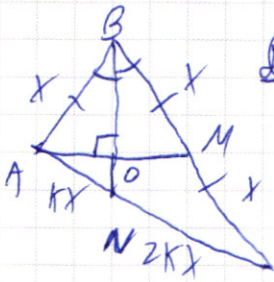
III $(1; 3)$

IV $\frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} \leq 0, \underline{x > 3}$

I \cup II \cup III \cup IV = $(0; 3)$ IV (\emptyset)

Ответ: $(0; 3)$

N2



Дано: ΔABC , $P(\Delta ABC) = 300$; $AB, BC, AC \in \mathbb{N}$; AM - мед. ΔABC ;

BN - выс. ΔABC ; $BN \perp AM$

Найти: кол-во различных ΔABC .

с Решение. $O \in AM \cap BN$; $\nexists! \Delta ABM \Rightarrow BO$ -

- высота и выс. $\Rightarrow \Delta ABM$ - равнобедр. $\Rightarrow AB = BM$ (= ~~x~~ - длина
левой грани см.); $BM = MC = x$ (т.м. мед.); BN - выс. \Rightarrow

$AN : NC = AB : BC = 1 : 2$ (обозначим $AN = kx$; $NC = 2kx$) \Rightarrow

$$\Rightarrow x + 2x + 3kx = 300 \Rightarrow 3x(1+k) = 300 \Rightarrow x(1+k) = 100.$$

При этом $x \in \mathbb{N}$; $3k \in \mathbb{N}$; ~~т.~~

$$m; n(x) = 1 \Rightarrow \max(1+k) = 100 \Rightarrow \max(k) = 99 \Rightarrow \max(3k) = 297.$$

$AB : BC : AC = 1 : 2 : 3k$. Чтобы найти все различные ΔABC

нужно найти все различные отрезки $AB : BC : AC$ т.е.

все возможные $3k$. $3k \in \mathbb{N}$ и $3k \leq 297 \Rightarrow$

существует всего 297 $3k$.

Ответ: 297

N3

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} & (1) \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases} \text{ ОДЗ: } \begin{cases} xy \geq 0 \\ y \geq 2x \end{cases}$$

$$1) \Leftrightarrow (y - 2x)^2 = xy$$

$$y^2 - 5xy + 4x^2 = 0. \quad y \neq 0 \quad (\text{иначе } \begin{cases} 0 - 2x = 0 \\ x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 5\frac{x}{y} + 4\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 0, \quad \text{пусть } a = \frac{x}{y}, \text{ тогда}$$

$$4a^2 - 5a + 1 = 0 \quad D = 9 \Rightarrow a \in \frac{5 \pm 3}{8} = \{1; \frac{1}{4}\} \Rightarrow \begin{cases} x = y & (1) \\ y = 4x & (2) \end{cases}$$

$$1) \quad 2x + x^2 - 9 = 0 \quad D = 40 \Rightarrow x = y = -1 \pm \sqrt{10} \Rightarrow x = y = -1 - \sqrt{10} \quad (\text{см. ОДЗ})$$

$$2) \quad x^2 + 8x - 9 = 0, \quad D = 100 \Rightarrow x \in \frac{-8 \pm 10}{2} = \{-9; 1\} \Rightarrow y \in \{-36; 4\} \text{ соотв.}$$

Из ОДЗ \Rightarrow нам подходит $(1; 4)$

Ответ: $\{(-1 - \sqrt{10}; -1 - \sqrt{10}); (1; 4)\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

$D(f) = (0; +\infty) \cap \mathbb{Q}$; $f(ab) = f(a) + f(b)$; $f(p) = p$, если p - простое
 $3 \leq x \leq 19$; $3 \leq y \leq 19$; $x, y \in \mathbb{N}$; $f(\frac{x}{y}) < 0$. (Найти все $\exists(x, y)$)

Заметим. $f(\frac{x}{y}) = f(x \cdot y^{-1}) = f(x) + f(y^{-1})$; $f(\frac{x}{y}) = f(y) + f(x^{-1})$ (аналогично);

$$f(\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}) = f(1) = f(\frac{x}{y}) + f(\frac{y}{x}) = f(x) + f(y^{-1}) + f(y) + f(x^{-1}) =$$

$$= f(\frac{x}{y}) + f(\frac{y}{x}) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0.$$

$$f(\frac{p}{p}) = f(1) = 0 = f(p) + f(p^{-1}) \Rightarrow f(p^{-1}) = -p;$$

$$f(4) = f(2 \cdot 2) = f(2) + f(2) = 2 + 2 = 4$$

$$f(4^{-1}) = f(2^{-1} \cdot 2^{-1}) = f(2^{-1}) + f(2^{-1}) = -2 - 2 = -4$$

$$f(6) = f(2 \cdot 3) = f(2) + f(3) = 2 + 3 = 5$$

... (оставшиеся возможные простые значения x, y - аналогично).

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$f(n)$	3	4	5	5	7	6	6	7	11	7	13	9	8	8	17	8	19
$f(n^{-1})$	-3	-4	-5	-5	-7	-6	-6	-7	-11	-7	-13	-9	-8	-8	-17	-8	-19
k_n	16	15	13	13	8	11	11	8	3	8	2	4	5	5	1	5	0
K	17	16	14	14	9	12	12	9	4	9	3	5	6	6	2	6	7

k_n - кол-во z , для которых: $z \in \mathbb{N}$; $3 \leq z \leq 19$; $|f(z^{-1})| > f(n)$

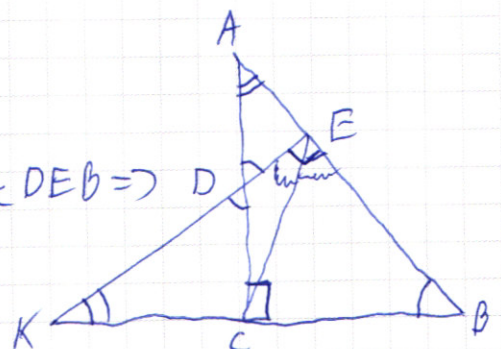
$$\sum_{n=3}^{n=19} k_n = 128$$

Ответ: 128

Дано: $\triangle ABC$, где $\angle BCA = 90^\circ$ №5
 $D \in AC$; $E \in AB$; $DE \perp AB$;
 $\angle CED = 45^\circ$; $AC = \sqrt{29}$; $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$

Найти: $AD:AC$ - ? ; $S_{\triangle AED}$ - ?

Решение $K \in CB \cap DE$. $\angle CED = 45^\circ = \frac{1}{2} \angle DEB \Rightarrow D$
 $\Rightarrow EC$ - медиана $\triangle KEB \Rightarrow \frac{KC}{CB} = \frac{KE}{EB}$



$$\angle KDC = \angle ADE \text{ (верт.)} = 90^\circ - \angle DAE \text{ (ш. } \triangle DEA) = \angle KBA \text{ (ш. } \triangle ACB).$$

$$\angle EKB = 90^\circ - \angle KBE \text{ (ш. } \triangle KEB) = \angle CAB \text{ (ш. } \triangle ABC). \parallel \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle KCD \sim \triangle KEB \sim \triangle AED \sim \triangle ACB.$$

Пусть $CB = a$; $AE = b$; $AB = c$, а коэфф. подобия $\triangle ACB$, $\triangle DAE$, $\triangle KCD$ и $\triangle KEB$ равны соотв. $1, k, m, n$ (т.е. отные. ш. ш.)

Тогда:

	a	b	c	коэф.
$\triangle ACB$	CB	AC	AB	1
$\triangle DAE$	DE	AE	AD	k
$\triangle KCD$	DC	KC	KD	m
$\triangle KEB$	EB	KE	KB	n

$$KB = KC + CB = bm + a = cn$$

$$\frac{KE}{EB} = \frac{KC}{CB} \Leftrightarrow \frac{bn}{ab} = \frac{bm}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow bm = n \Rightarrow a = n(c-1); AC = AD + DC \Leftrightarrow b = kc + am$$

$$KE = KD + DE \Leftrightarrow bn = mc + ak \parallel \Rightarrow h = \frac{a}{c-1} \Rightarrow m = \frac{a}{b(c-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ck = b - \frac{a^2}{b(c-1)} \Rightarrow k = \frac{b^2(c-1) - a^2}{bc(c-1)}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{CK}{AC} = \frac{b^2(c-1) - a^2}{b^2(c-1)} = 1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \frac{1}{c-1}$$

$$a = \frac{5\sqrt{29}}{2}; b = \sqrt{29}; c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{29}{2} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = 1 -$$

$$- \frac{25 \cdot 29}{4 \cdot 29} \cdot \frac{2}{29-2} = \frac{29}{54}$$

$$S_{\triangle AED} = k^2 \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{25^2 \cdot 5 \cdot 29}{4 \cdot 27^2 \cdot 2 \cdot 2}$$

Ответ: $AD:AC = 29:54$; $S_{\triangle AED} = \frac{125 \cdot 29}{16 \cdot 27^2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6-3x-2y| > 6 & (2) \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0 & (1) \end{cases}$$

$$1) \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 3y + 1,5) \leq 2,5$$

$$(x-1)^2 + (y - \sqrt{1,5}) \leq 2,5 -$$

- это уравн-во круга с центром

$O(1; \sqrt{1,5})$ и радиусом $R=2,5$,

площадью $S_0 = \pi R^2 = 2,5^2 \pi$.

$$2) \Leftrightarrow |6-3x-2y| > 6 - |3x| - |2y|$$

I ск. $6 - |3x| - |2y| < 0$; $\forall |6-3x-2y| \geq 0 \Rightarrow$ при $|y| > 3 - 1,5|x|$

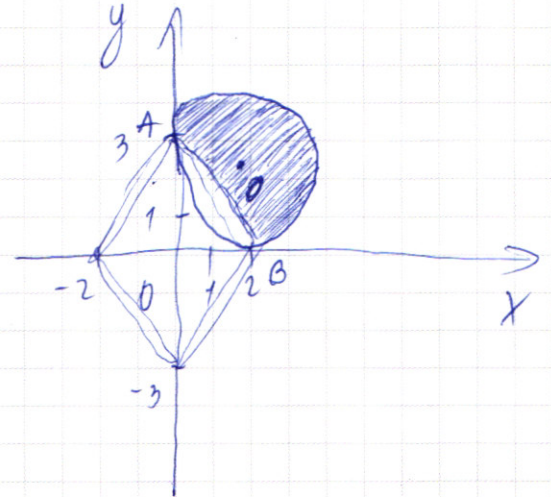
$(x; y)$ не подходит

$$\text{II ск. } 6 - |3x| - |2y| \geq 0 \Rightarrow |y| \leq 3 - 1,5|x|$$

$$1,5x - 3 \leq y \leq 3 - 1,5x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |6-3x-2y|: \quad 6-3x-2(1,5x-3) \leq 6-3x-2y \leq 6-3x-(1,5x+3)$$

$$12-6x \leq 6-3x-2y \leq 0$$

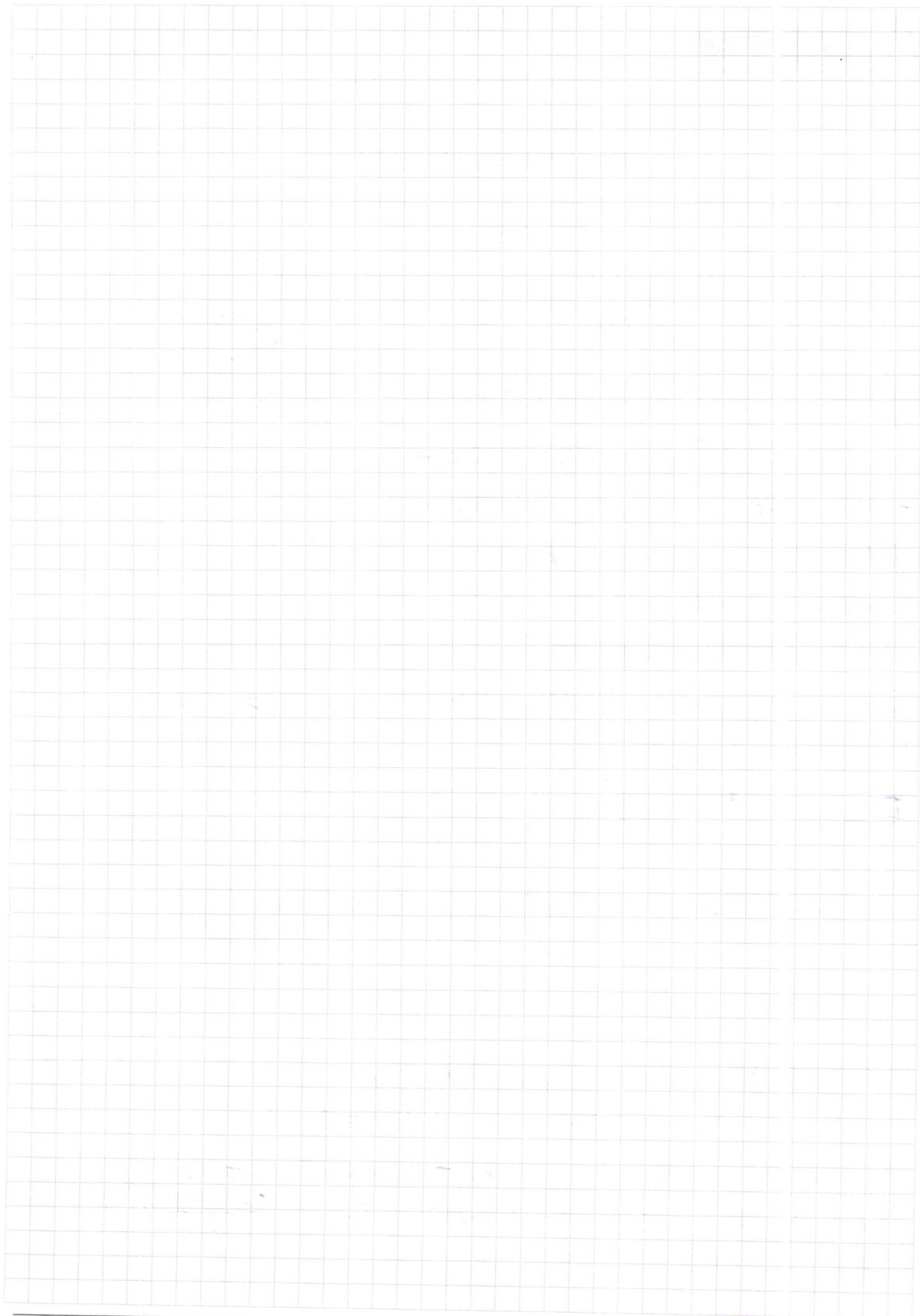


Пусть A и B - точки пересечения прел. $y = 3 - 1,5x$ и $\omega(0; R)$,
тогда $x^2 - 2x - 3(3 - 1,5x) + (3 - 1,5)^2 = 0 \Rightarrow x_A = 0; x_B = 2 \Rightarrow$

\Rightarrow искомая фигура = $\omega(0; R)$ - сектор AOB . ($\sphericalangle AOB$)

$$! \sphericalangle AOB \Rightarrow AO^2 = 2R^2(1 - \cos \sphericalangle AOB); \quad S_{\sphericalangle AOB} = \frac{\sphericalangle AOB(\text{рад})}{2} R^2;$$

$$AB = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$D(f) = (0; +\infty) \cap \mathbb{Q}$$

$$f(xy^{-1}) = f(x) + f(y^{-1})$$

$$a = b = \pi(3)$$

$$f(3 \cdot 3^{-1}) = f(1) = f(3) + f(3^{-1})$$

$$= 3 + f(3^{-1})$$

$$f(6 \cdot 3^{-1}) = f(2) = 2 = f(6) + f(3^{-1})$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$3 + f(3^{-1}) = 1$$

$$f(6) = f(2) + f(3) = 5$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(y) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f(\pi^{-1}) = 1 - \pi$$

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1)$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -2$$

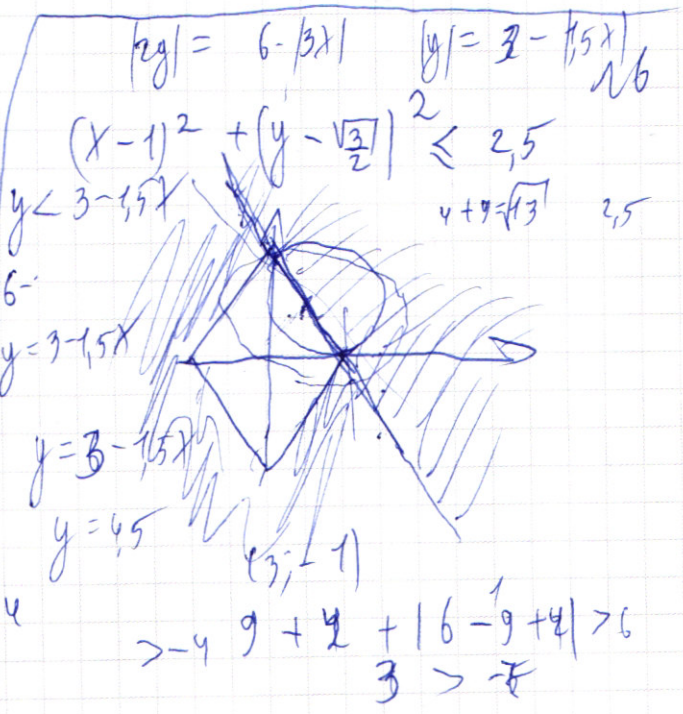
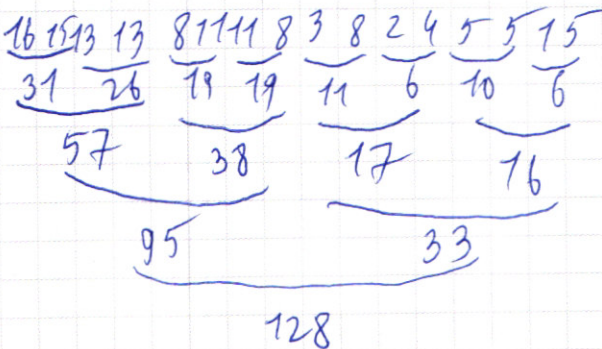
$$f\left(\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}\right) = f(1) = 2$$

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = -4$$

$$2f(1) = f(2)$$

$$f\left(\frac{1}{6}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) = -1 - 2 = -3$$

$$\boxed{f(1) = 1}$$



$$6x - 2y + 2x \quad |6 - 2x - 2y| = 0$$

$$6x - 6 > 6 \quad x > 2$$

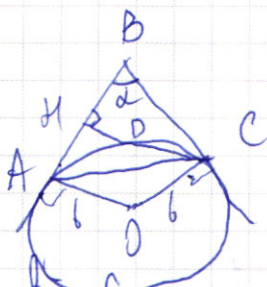
$$6 + 3 - 9$$

$$6 + 4 > -4 \quad 9 + 2 + |6 - 9 + 4| > 6$$

$$3 > -8$$

11

~~b = cn~~



- $\triangle AEB$
- $\triangle DAE$
- $\triangle KCD$
- $\triangle KEB$
- CB
- DE
- DC
- EB
- AC
- AE
- KC
- KE
- AB
- AD
- KD
- KB
- K
- m
- n

$$\frac{KC}{CB} = \frac{KE}{EB}$$

$AB:CH \rightarrow ?$

$S(ABD) = 15$
 $R = 6$

$CH \cdot AB = 30$

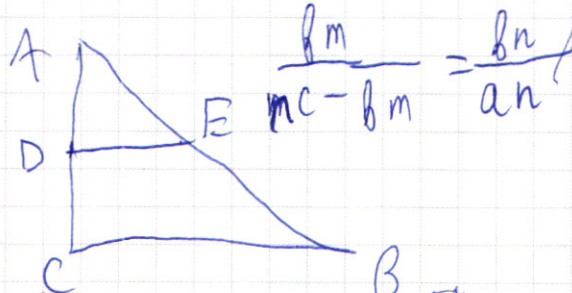
$AG^2 \sin \alpha = 30$

$2AB^2 - 2AD^2 \cos \alpha = 36^2 + 2 \cdot 36 \cos \alpha$

$\frac{CK}{am} = ?$

$\sin(180-\alpha) = \sin \alpha$

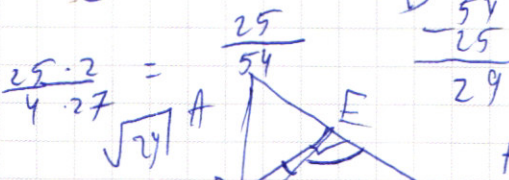
$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{b}{a}$



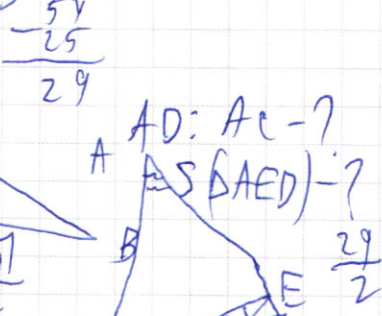
$\frac{bm}{c-bm} = \frac{bn}{an}$

$\frac{2 \cdot 30^2}{\sin^2 \alpha} = \frac{2 \cdot 30^2 \cdot c^2}{\sin^2 \alpha}$

$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{30}{AB}\right)^2}$



$\frac{25 \cdot 2}{4 \cdot 27} = \sqrt{27}$



$AD:AC = ?$
 $S(\triangle AED) = ?$

$29 + \frac{25 \cdot 29}{4} = \sqrt{\frac{29 \cdot 29}{4}}$

$c_A = \frac{c - am}{am}$

$\frac{b}{am} - 1$

$ck = b - am$

$am = m(cn - b)$

$n = \frac{a}{c-1}$

$\frac{DC}{DE} = \frac{KD}{DA}$

$\frac{bc}{a} = \frac{kc}{AE} \quad ck = b - \frac{a^2}{b(c-1)}$

$\frac{ab}{c-1} = mctak$

$b = cktam$

$\frac{ab}{c-1} + b = mca + c + k(a+c)$
 $m = \frac{a}{b(c-1)}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + 1|x-1| \cdot |x-3|} \leq 0$$

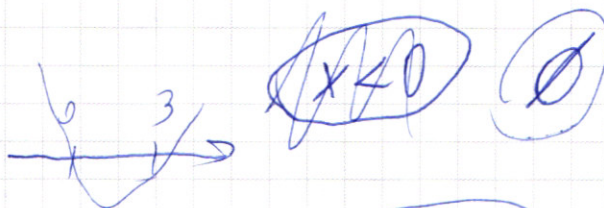
$$\frac{(x-1)^2 - 4|x-1| + 4}{4x(x-3) + |x-1| \cdot |x-3|} \leq 0$$

$$\frac{|x-1|(x-1-4) + 4}{4x(x-3) + |x-1| \cdot |x-3|} \leq 0$$

$$1) \frac{(x-1)(x+3) + 4}{4x(x-3) + x(x-3)} \leq 0 \quad x \notin \{0; 3\}$$

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{5x(x-3)} \leq 0$$

$$5x(x-3) < 0$$



$$2) \frac{x^2 + 2x + 1}{4x(x-3) - x(x-3)} = \frac{x^2 + 2x + 1}{3x(x-3)} \leq 0$$

$$(0; 1]$$

$$3) \frac{(x-1)(x-5) + 4}{3x(x-3)} = \frac{x^2 - 6x + 9}{3x(x-3)} = \frac{(x-3)^2}{3x(x-3)} \leq 0$$

$$[1; 3)$$

$$4) \frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} \sim 6.$$

$$x = \frac{6.5}{3.25} = \frac{650}{325} = 2$$

$$(0; 3)$$

$$\emptyset$$

$$S = \pi R^2$$

$$x^2 - 2x - 9 + y^2 = 0$$

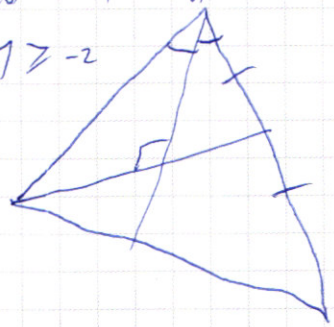
$$y = \sqrt{x}$$

$$x^2 - 2x - 9 + 4.5x + 9 - 9x + 2.25x^2 = 0$$

$$3.25x^2 - 6.5x = 0$$

$$-1 - \sqrt{10} > -2 + 2\sqrt{10}$$

$$-1 - \sqrt{10} \geq -2$$



$$6x + 4y > 12$$

$$y = 3 - 1,5x$$



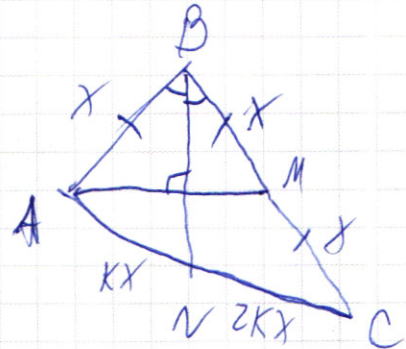
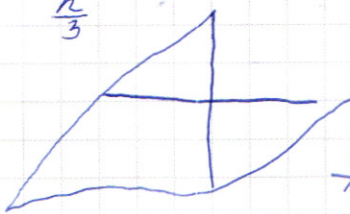
$$3x + 2y > 6$$

$$y < 3 - 1,5x$$

$$y > 3 - 1,5x$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$\frac{k}{3}$



$$1:2:3k \quad 1+k=100$$

$$n \cdot y$$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

QAB:

$$\begin{cases} xy \geq 0 \\ y \geq 2x \end{cases}$$

$$3x(1+k) = 300$$

$$k: 3, x$$

$$3kx$$

$$x: 3 \text{ чм } k$$

$$\begin{cases} y^2 - 4xy + 4x^2 = xy \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

1	5	2
2	2	5
3	10	10
4	20	5
5	5	20
6	50	2
7	2	50
8	1	100

$$x(1+k) = 100 \quad | \quad 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$$

$$75 \cdot \frac{4}{3} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{1}{3}$$

$$\frac{n}{3} \quad 75 \quad 25$$

$$x^2 + 4x - 9 = -2\sqrt{xy}$$

$$(x+2)^2 - 13 = -2\sqrt{xy}$$

$$1: 2: 3x$$

$$n \in \{1, 2, 4, 5, 25, 50, 20, 100, 10\}$$

$$13 - (x+2)^2$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$a = \frac{5 \pm 3}{8} = \left\{ 1, \frac{1}{4} \right\}$$

$$x = \frac{300}{n}$$

$$k = \frac{1-k}{3}$$

$$\begin{cases} 2y + x^2 = 9 & (1) \\ 2y + 4x^2 = 9 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ x = \frac{1}{4}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y & (1) \\ y = 4x & (2) \end{cases}$$

$$1) \quad D = 40$$

$$x = y = \frac{-2 \pm 2\sqrt{10}}{2}$$

$$\Rightarrow D = 4 + 36 = 40$$

$$y =$$

$$2) \quad x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$D = 69 + 36 = 105$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{105}}{2} = \{-9, 13\}$$