МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство
$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе
$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2\leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 18$, $1\leqslant y\leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3. $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \ (1) \\ x+y^2=5 \end{cases}$

(1) $x-2y=\sqrt{xy}$; возв. в квадрат обе части, получим

$(x-2y)^2=(\sqrt{xy})^2$

$x^2-4xy+4y^2=xy$

$x^2-5xy+4y^2=0$ — квад. относит. x

$D=25y^2-16y^2=9y^2\geq 0$

$x=\frac{5y\pm 3y}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=4y \\ x=y \end{array}\right.$

Тогда

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y \\ y+y^2-5=0 \ (1) \end{cases} \\ \begin{cases} x=4y \\ 4y+y^2-5=0 \ (2) \end{cases} \end{array}\right.$

(1) $D=1-4\cdot(-5)=21>0 \Rightarrow y=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2} \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

(2) $D=16-4\cdot(-5)=36>0 \Rightarrow y=\frac{-4\pm 6}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-20 \end{array}\right.$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{21}-1}{2}; \frac{\sqrt{21}-1}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{21}+1}{2}; -\frac{\sqrt{21}+1}{2}\right)$; $(4;1)$; $(-20;-5)$.

№6. $\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4 \ (2) \\ x^2-2x-4y+y^2\leq 0 \ (1) \end{cases}$

(1) $x^2-2x+y^2-4y\leq 0$

Построим график уравн. $x^2-2x+y^2-4y=0$

$x^2-2x+y^2-4y=0 \ || +5$

$x^2-2x+y^2-4y+1+4=5$

$x^2-2x+1+y^2-4y+4=5$

$(x-1)^2+(y-2)^2=(\sqrt{5})^2$ — окруж. с центром в т. $C(1;2)$ и $R=\sqrt{5}$

(2) Построим граф. ур. $|2x|+|y|+|4-2x-y|=4$

$|4-2x-y|=4-|2x|-|y|$

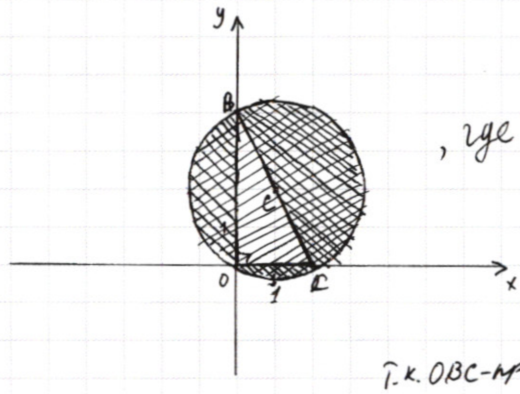
$|4-(2x+y)|=4-(|2x|+|y|)$

Заметим, что для того, чтобы рав-во оставалось верным, нужно, чтобы выполнялись условия

$$\begin{cases} 2x+y\le 4 \\ \cancel{2x+y}\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$$

Тогда, нетрудно сказать, что граф. данного ур. будет треугольник с вершинами в $(0;0)$, $(2;0)$ и $(0;4)$, т.е. все три т. будут лежать на окружн. из п. (1), т.к. $(0-1)^2+(0-2)^2=1+4=5$; $(2-1)^2+(0-2)^2=1^2+4=5$; $(0-1)^2+(4-2)^2=1^2+2^2=5$

Значит,



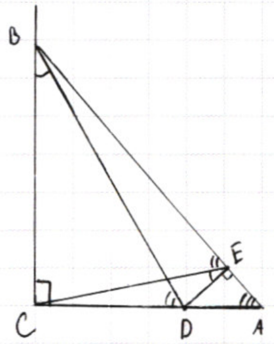
, где заштрихов. обл. – это обл., S котор. надо найти
$\overbrace{}^{\text{двоякоза}}$

т.к. OBC-прямоуг.

$$S=S_{кр.}-S_{OBC}=\pi R^2-\frac{1}{2}OB\cdot OC=\pi\cdot(\sqrt{5})^2-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4=5\pi-4\approx 11,7\ ед^2$$

Ответ: $S=5\pi-4=11,7\ ед^2$

№5



Дано: $\triangle ADC$, $\angle C=90°$; $D\in AC$, $E\in AB$; $DE\perp AB$, $\angle CED=30°$,

$AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$

Найти: $\frac{AD}{AC}$, S_{AED}

Решение:

① $BCDE$ – вписс., т.к. $\angle C+\angle E=90°+90°=180°$, тогда

$\angle CED=\angle CBD=30°$ (т.к. они впис. и опир. на одну дугу)

$\angle BEC=\angle BDC=90°-30°=60°$ (т.к. они впис. и опир. на одну дугу)

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

② $ctg\angle CDB = \frac{CD}{BC} \Rightarrow CD = BC\cdot ctg60^\circ = \cancel{2\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot\sqrt{3} = 2\sqrt{\frac{21}{3}}} = 2\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{7}$

Значит,

$AD = AC - CD = \sqrt{7} - \frac{2}{3}\sqrt{7} = \frac{1}{3}\sqrt{7} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$

③ ~~sin∠EAD = sin AB~~ по т. Пифагора в $\triangle ABC$

$AB^2 = BC^2 + AC^2 = \left(2\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2 + (\sqrt{7})^2 = 4\cdot\frac{7}{3} + 7 = 7\cdot\left(\frac{4}{3}+1\right) = 7\cdot\frac{7}{3} = \frac{49}{3} \Rightarrow AB = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$

④ $\sin\angle EAD = \sin\angle BAC$ (т.к. это один и тот же уг.) $= \frac{BC}{AB} = 2\sqrt{\frac{7}{3}} : \frac{7\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot\frac{3}{7\sqrt{3}} =$

$= 2\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{7} = 2\sqrt{\frac{21}{3}}\cdot\frac{1}{7} = \frac{2\sqrt{7}}{7} = \frac{DE}{AD} \Rightarrow DE = AD\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7} = \frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7} = \frac{2}{3}$

$\cos\angle EAD = \cos\angle BAC = \frac{AC}{AB} = \sqrt{7} : \frac{7\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{7}}{7\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{21}}{21} = \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow AE = \frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{\sqrt{21}}{7} =$

$= \frac{\sqrt{49\cdot 3}}{21} = \frac{7\sqrt{3}}{21} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

⑤ Значит,

$S_{AED} = \frac{1}{2}\cdot ED\cdot AE = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{9}$ ед^2

Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$; $S_{AED} = \frac{\sqrt{3}}{9}$ ед^2

№1. $\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \le 0$

$\frac{x^2-6x+9+1-2|x-3|}{2x(x-2)+|x(x-2)|} \le 0$

$\frac{(x-3)^2-2|x-3|+1}{2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|} \le 0$

$\frac{(|x-3|-1)^2}{2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|} \le 0$, т.е. $2x(x-2)+|x|\cdot|x-2| < 0$, т.к. $(|x-3|-1)^2 \ge 0$

$2x(x-2) + \underbrace{|x|\cdot|x-2|}_{\ge 0} < 0$, т.е.

$x(x-2) < 0$, тогда

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0\\x-2>0\end{cases}\\ \begin{cases}x>0\\x-2<0\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0\\x>2\end{cases} \quad \varnothing\\ \begin{cases}x>0\\x<2\end{cases} \quad x\in(0;2)\end{array}\right. \qquad x\in(0;2)$$

Ответ: $x\in(0;2)$.

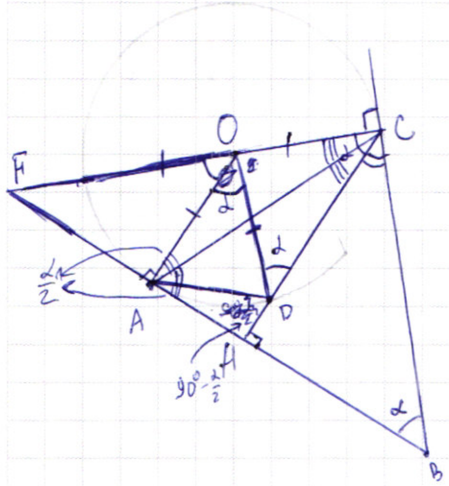
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$R = 4$, $S_{ABD} = 6$

$\cancel{AB} - \cancel{\frac{CH}{ADB}}$ $\frac{AB}{CH}$ – ?

$CH \parallel OA$, т.к. $CH \perp AB$, $OA \perp AB$

$S_{ABHD} = \frac{1}{2} DH \cdot AB = 6 \Rightarrow AB = \frac{12}{DH} = \sqrt{\frac{12}{\sin\alpha}} = 2\sqrt{\frac{3}{\sin\alpha}}$

$\smile ACD = 2 \cdot (90^\circ - \alpha) = 180^\circ - 2\alpha$; $\smile AC = 2 \cdot \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 180^\circ - \alpha \Rightarrow$

$\cancel{\angle A = \angle ACB = \frac{180^\circ - \alpha}{2}}$, $\cancel{\angle ACH = 90^\circ - 90^\circ + \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}}$

$\cancel{\angle BCH = 90 - \frac{\alpha}{2}}$ $\Rightarrow \smile AD = \alpha \Rightarrow \angle AOD = \alpha$;

$\angle COD = \cancel{90 - \alpha}\ 180^\circ - 2\alpha$

3. $\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases}$ $x^2 - 4xy + 4y^2 = xy$

$x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$

$1 - 5 + 4 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = 4y \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y \\ y^2 + y - 5 = 0 \Rightarrow D = 1 + 20 = 21 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4y \\ y^2 + 4y - 5 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -5 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 1 \\ x = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -5 \\ x = -20 \end{cases} \end{array}\right.$

$CD^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cos(\cancel{90 - 2\alpha}\ 180^\circ - 2\alpha) =$

$= 16 + 16 + 32 \cancel{\sin 2\alpha}\ \cos 2\alpha = 32(1 + \cancel{\sin 2\alpha}\ \cos 2\alpha)$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$

$= 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

$CH = CB \sin\alpha = AB \sin\alpha$

$S_{ADC} = \frac{1}{2} CH \cdot AB =$

$= \frac{1}{2} AB^2 \sin\alpha$

$AH^2 = CH \cdot DH \Rightarrow DH = \frac{(AB - BH)^2}{CH} = \frac{(AB - AB\cos\alpha)^2}{AB\sin\alpha} =$

$= \frac{AB(1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha)}{\sin\alpha}$

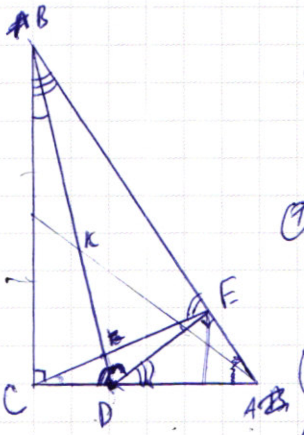
$\frac{AB}{CH} = \cancel{\sin\alpha} \frac{1}{\sin\alpha}$

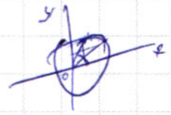
☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)





$AC=\sqrt{7},\ BC=2\sqrt{\frac{7}{3}},\ \angle CED=30^\circ$

$\frac{AD}{AC}=?,\ S_{AED}-?$

(1) $AB^2=BC^2+AC^2=7+\frac{28}{3}=7+9\frac{1}{3}=16\frac{1}{3}=\frac{49}{3}$

$AB=\frac{7}{\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$

(2) $\triangle AED\sim\triangle A\cancel{BC}CB \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{AE}{DE}=\frac{AC}{BC}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(3) $\angle ADE=\alpha,\ \angle ADC=\alpha \Rightarrow \angle BCE=180^\circ-\alpha-60^\circ=120^\circ-\alpha$

$\angle ECD=90^\circ-120^\circ+\alpha=\alpha-30^\circ$ $\qquad \frac{CD}{\sin 30^\circ}=\frac{BC}{\sin\angle D}=\frac{DE}{\sin\angle C} \Rightarrow DE=\frac{BC\cdot\sin(120^\circ-\alpha)}{\sin(\alpha-30^\circ)}=\frac{BC\cos(\alpha-30)}{\sin(\alpha-30)}=$

$CD=BC\,ctg\,60^\circ=2\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{7} \Rightarrow AD=AC-CD=\sqrt{7}\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}\sqrt{7} \Rightarrow \frac{AD}{AC}=\frac{1}{3}$ $\quad =BC\cdot ctg(\alpha-30^\circ)$

$|2x|+|y|+|4|\geq|4+2x+y|$ $\qquad$ ~~$|4-2x-y|>4-|2x+y|$~~ $\qquad ctg(\alpha-30^\circ)=\frac{DE}{BC}$

6. $\begin{cases}|2x|+|y|+|4-2x-y|>4 \ (2)\\ x^2-2x+y^2-4y\leq 0 \ (1)\end{cases}$ $\quad$ (2) $\begin{cases}~~|4-2x-y|>|4|-|2x|-|y|=4-(|2x|+|y|)\geq 4-|2x+y|~~\\ |4-2x-y|\leq 4+|-2x|+|-y|\end{cases}$

~~$4-|2x+y|<|4-2x-y|\leq 4+|-2x|+|-y| \Rightarrow |-2x|+|-y|>-|2x+y|$~~

~~$|2x+y|+|-2x|+|-y|>0$~~

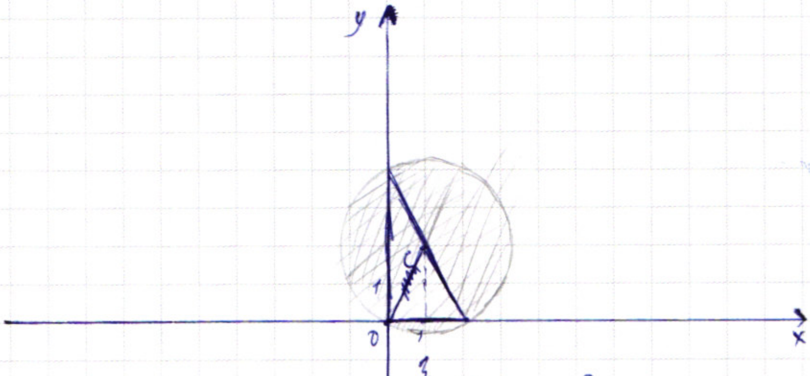
$x^2-2x+y^2-4y=0$

~~$D=4-4y^2+16y=(2y^2+16y+16)+-4y^2+16y+16+20=-(2y-4)^2+20$~~

~~$x(x-2)+y(y$~~

$x^2-2x+1+y^2-4y+4-5=0$

$(x-1)^2+(y-2)^2=5$ – окр. с ц. $C(1;2)$ и $R=\sqrt{5}$



$S=\pi R^2-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4=$

$=5\pi-4\approx 11{,}7$ ед^2

(2) $|4-2x-y|>4-|2x|-|y|$

~~$(4-2x-y)^2>(4-|2x|-|y|)^2$~~

~~$16+4x^2+y^2-8x-4y+2xy>16+4x^2+$~~

~~$+y^2-4|2x|-4|y|+|2x|\cdot|y|$~~

~~$2xy-8x-4y>|2xy|-|8x|-|4y|$~~

~~$xy-4x-2y>|xy|-|4x|-|2y|$~~

$|4-2x-y|-(4-|2x|-|y|)>0$

$|4-2x-y|-4+|2x|+|y|=0$

$|4-(2x+y)|=4-(|2x|+|y|)$

$\left[\begin{array}{l}x>0,y>0\\ x=0,y=0\\ x<0,y<0\end{array}\right.$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{\underbrace{2x^2-4x}_{2x(x-2)}+|x|\cdot|x-2|}\le 0$$

$\cancel{2x(x-2)}$

$$\frac{x^2-6x+9+1-2|x-3|}{2x(x-2)+|x(x-2)|}\le 0$$

$$\frac{(x-3)^2+1-2|x-3|}{2x(x-2)+|x(x-2)|}\le 0$$

$$\begin{cases}|x-3|^2+1-2|x-3|\le 0 \ (1)\\ 2x(x-2)+|x(x-2)|\ne 0\end{cases}$$

(1) $t=|x-3|$

t^2-2t+1

$(t-1)^2$

$(|x-3|-1)^2\ge 0 \Rightarrow \underbrace{2x(x-2)}_{<0}+\underbrace{|x(x-2)|}_{\ge 0}<0$

$t^2-2t+1\ge 0$

$t\in\mathbb{R}$

$|x-3|\in\mathbb{R}$

$x-3\in\mathbb{R}$

$x\in\mathbb{R}$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0\\x-2>0\end{cases}\\ \begin{cases}x>0\\x-2<0\end{cases}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0\\x>2\end{cases}\ \varnothing\\ \begin{cases}x>0\\x<2\end{cases}\ (0;2)\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ x\in(0;2)\end{cases}$$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

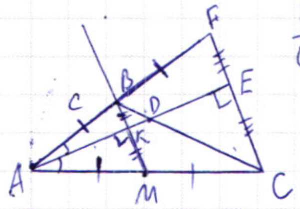
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$P=600$, $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$, $\angle A=\alpha$, $a,b,c\in\mathbb{Z}$



$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$ ~~$\frac{CD}{BD}\cdot\frac{BK}{MK}\cdot\frac{AM}{AC}=1$~~

~~$\frac{b}{c}\cdot\frac{BK}{MK}\cdot\frac{1}{2}=1$~~

~~$\frac{BK}{MK}=\frac{2c}{b}=2$~~

$a+b+c=600$

$\boxed{c=\frac{1}{2}b}$

$\frac{BD}{CD}=\frac{c}{b}=\frac{1}{2}$

$a=3BD$

$a+2c=600$

$\begin{cases} a\neq c \\ a<3c \\ a+2c=600 \end{cases}$

$a^2=c^2+b^2-2bc\cos\alpha=5c^2-4c^2\cos\alpha$

$\cos\alpha=\cos 2\cdot\frac{\alpha}{2}=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-2\cdot\left(\frac{BK}{c}\right)^2$

$600<5c$

$c>120$

$b>240$

$b+c>360$

$a<360$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)