



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy}, \\ 2y + x^2 = 9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром  $O$  касается прямых  $AB$  и  $BC$  в точках  $A$  и  $C$  соответственно. Высота  $CH$  треугольника  $ABC$  пересекает эту окружность в точках  $C$  и  $D$ . Найдите отношение  $AB : CH$ , если площадь треугольника  $ABD$  равна 15, а радиус окружности равен 6.
5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на катете  $AC$  и гипотенузе  $AB$  отмечены точки  $D$  и  $E$  соответственно, такие что  $DE \perp AB$ . Найдите отношение  $AD : AC$  и площадь треугольника  $AED$ , если известно, что  $AC = \sqrt{29}$ ,  $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$ , а  $\angle CED = 45^\circ$ .
6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами  $(x; y)$ , удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6, \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = p$  для любого простого числа  $p$ . Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $3 \leq x \leq 19$ ,  $3 \leq y \leq 19$  и  $f(x/y) < 0$ .



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\text{№3. } \begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} & (1), \text{ т.к. } \sqrt{xy} \geq 0, \text{ то } y - 2x \geq 0, \\ 2y + x^2 = 9 & (2) \end{cases} \quad \begin{matrix} y \geq 2x \\ \text{и } xy \geq 0 \end{matrix}$$

т.к. в урав. (1) выражения в обеих частях  $\geq 0$ , то я могу возвести каждую часть в квадрат.

$$\Rightarrow (y - 2x)^2 = (\sqrt{xy})^2, \quad y^2 - 4xy + 4x^2 = xy,$$

$$y^2 - 5xy + 4x^2 = 0, \quad / \cdot \frac{1}{x^2}, \quad (\text{т.к. } x \neq 0) \quad \text{пусть } \frac{y}{x} = t,$$

тогда  $t^2 - 5t + 4 = 0, \quad t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = 4; 1.$

$$\Rightarrow y = 4x \text{ или } y = x, \text{ но } y \geq 2x, \Rightarrow y = 4x.$$

Сделаю замену в урав. (2):

$$2 \cdot 4x + x^2 = 9, \quad x^2 + 8x - 9 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 4 \cdot 9}}{2} =$$

$$= \frac{-8 \pm 10}{2} = -9; 1 \Rightarrow y_{1,2} = -36; 4.$$

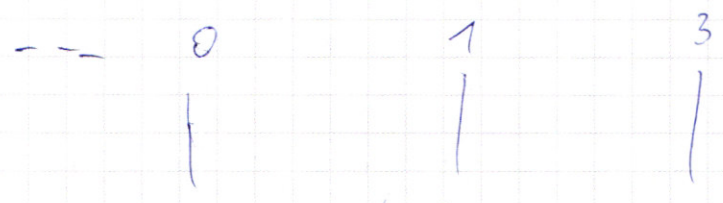
Ответ:  $(-9; -36); (1; 4)$ .

$$D(3) = 4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3| \neq 0$$

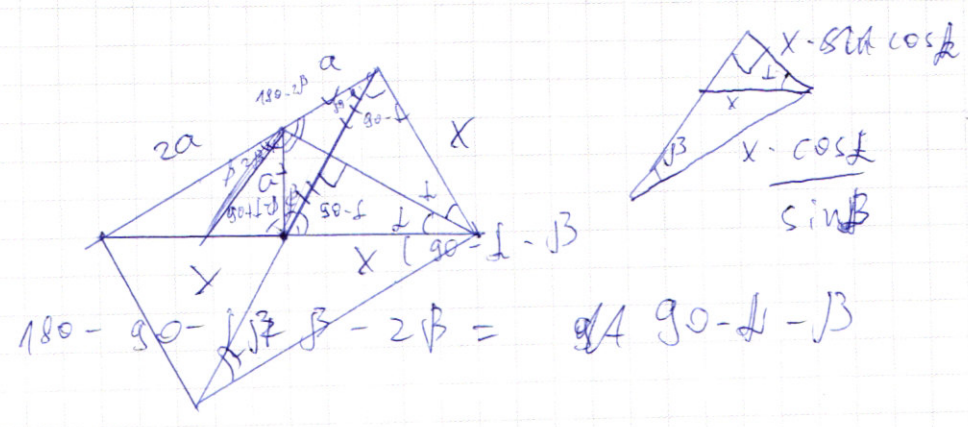
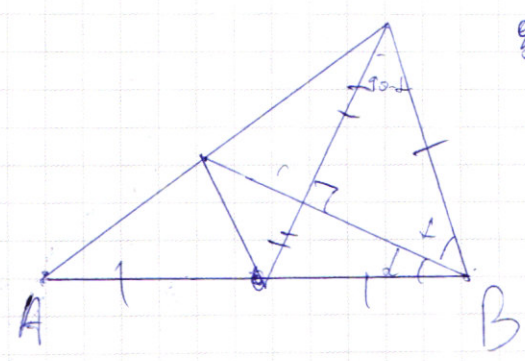
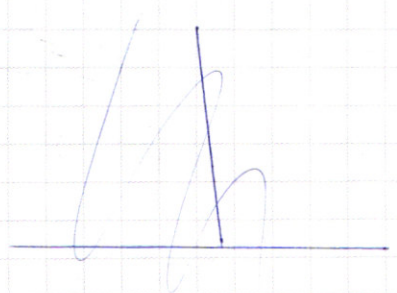
-	-	0	+	-	3	+	+
$4x^2 - 12x + x^2 - 3x \neq 0$	$4x^2 - 12x - x^2 + 3x \neq 0$					$4x^2 - 12x + x^2 - 3x = 0$	
$5x - 15x \neq 0$	$3x^2 - 9x \neq 0$					$x \neq 0; 3$	
$5x(x-3) \neq 0$	$3x(x-3) \neq 0$					н.п.к.	
$x \neq 0; 3$ - н.п.к.	$x \neq 0; 3$					$\Rightarrow x \neq 0; 3$	

- 106
- 108
- 112
- 122
- 128
- 31
- 44
- 57
- 65
- 87
- 95
- 98

$$D1 \frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3|} \leq 0$$



N2.



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.  $f(ab) = f(a) + f(b)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}, a, b \neq 0, > 0$

$f(p) = p, p$  - простое число, т.к.  $p = 1 \cdot p, \Rightarrow$

$\Rightarrow f(1 \cdot p) = f(1) + f(p), f(1 \cdot p) = f(p) = p,$

$\Rightarrow p = f(1) + p, f(1) = 0.$

Рассмотрим функцию при  $p_1, p_2$  - простые числа,  $p_1 < p_2$ ,  
 $\Rightarrow f(p_1) = p_1, f(p_2) = p_2$ , но  $\forall p_1 = \frac{p_1}{p_2} \cdot p_2 \rightarrow$  это рац. число,  $> 0$ .

$\Rightarrow f\left(\frac{p_1}{p_2} \cdot p_2\right) = f\left(\frac{p_1}{p_2}\right) + p_2 = f(p_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow p_2 + f\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = p_1, f\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = p_1 - p_2 \Rightarrow f\left(\frac{p_1}{p_2}\right) < 0.$

$\Rightarrow$  Если  $n, \forall n \in (0; 1)$   $f(n) < 0$ , т.к. любое рациональное число можно представить в виде частного целых, это уравнение работает независимо от простоты чисел и делителя, т.к. если  $\forall n$  можно представить в виде частного  $\frac{p_1}{p_2}, p_1 < p_2$ .

$f(m)$ , при  $m$  - составная, = сумме для всех простых делителей  $m$ , т.к. (например  $f(8) = f(4 \cdot 2) =$

$= f(2) + f(2 \cdot 2) = 3 \cdot f(2) = 3 \cdot 2 = 6$ ), (у простого числа суммой простых делителей будет  $\forall$  само число)

знак функции  $f\left(\frac{m}{n}\right)$ , где  $m, n$  - натурал. число зависит от знака выражения  $f(m) - f(n)$ , если  $f(m) - f(n) > 0$ ,

$f\left(\frac{m}{n}\right) > 0, f(m) - f(n) < 0, f\left(\frac{m}{n}\right) < 0, f(m) - f(n) = 0, f\left(\frac{m}{n}\right) = 0.$

Предел. на месте №3.

3. 
$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow y \geq 2x$$

$$\begin{cases} y^2 - 4xy + 4x^2 = xy \\ 4x^2 - 5xy + y^2 = 0 \\ x^2 + 2y = 9 \quad | \cdot (-4) \end{cases}$$

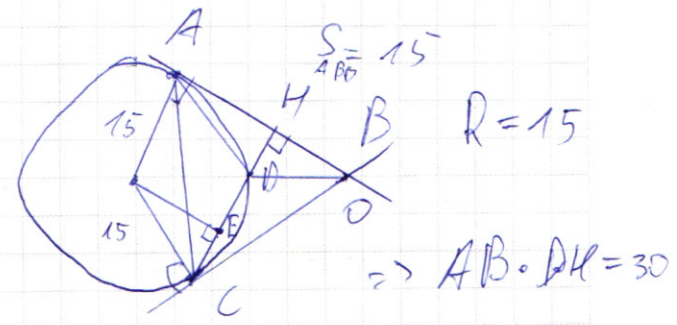
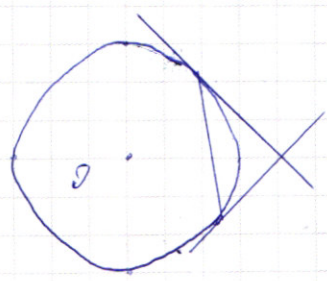
$$\begin{cases} 4x^2 - 5xy + y^2 = 0 \\ -4x^2 - 8y = -36 \end{cases} +$$

$$\begin{cases} y^2 - 5xy + 4x^2 = 0 \\ t^2 - 5t + 4 = 0 \end{cases} \quad \frac{y}{x} = t$$

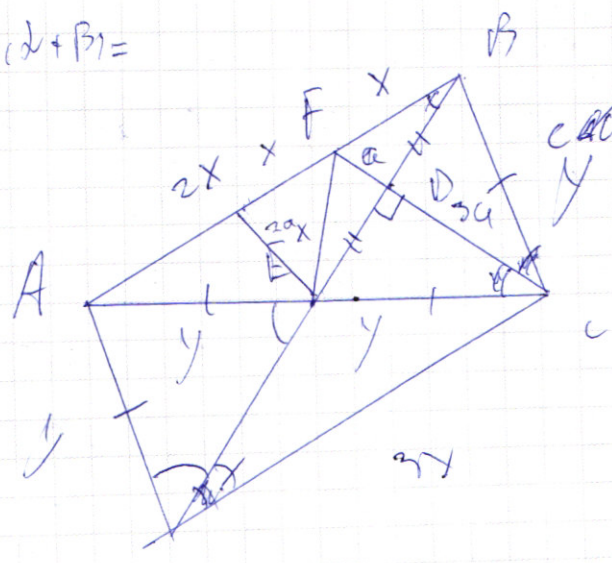
$-5xy -$   $\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{2x}{\sin \beta} = \frac{t}{\sin(\alpha+\beta)}$   $t = 4; 1$   
 $2 \sin \alpha = \sin \beta$   $y = 4x; y = x, \text{ не подходит}$   
 $y \geq 2x$

$\Rightarrow x^2 + 8x = 9$   $\Rightarrow y = 4x$   
 $x^2 + 8x - 9 = 0, x = -9; 1$   $\Rightarrow y = -36; 4$

№ 4.



$\sin(\alpha+\beta) =$



$\triangle CDB \sim \triangle BDF$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Число: 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

Сумма  
пр. чисел: 3 4 5 5 7 6 6 7 11 7 13 9 8 8 17 8 19

Надо  $\Rightarrow$  для каждого  $x$  надо подобрать  $y$  с большей суммой простых множителей:

$x =$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
кол-во $y$	16	15	13	13	8	11	11	8	3	8	2	4	5	5	1	5	0

$\Rightarrow$  Ответом это сумма кол-во подпадающих ~~чисел~~  
для каждого  $x$ , ~~то~~  $16 + 15 + \dots + 0 = 128$

Ответ: 128.

1.  $\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x||x-3|} \leq 0$ . ОДЗ:  $4x^2 - 12x + |x||x-3| \neq 0$ ,  
т.ч. узлы: 0; 3.

$4x^2 - 12x + x^2 - 3x \neq 0$	$4x^2 - 12x - x^2 + 3x \neq 0$	$4x - 120$
$5x^2 - 15x \neq 0$	$3x^2 - 9x \neq 0$	$cx < 0$
$x \neq 0; 3$	$x \neq 0; 3$	$x \neq 0; 3$

$x^2 - 2x + 5 - 4|x-1| = 0$  (1)

$\begin{cases} x^2 - 2x + 5 - 4|x-1| > 0 \\ 4x^2 - 12x + |x||x-3| < 0 \end{cases}$  (2)

$\begin{cases} x^2 - 2x + 5 - 4|x-1| < 0 \\ 4x^2 - 12x + |x||x-3| > 0 \end{cases}$  (3)

(1) т.ч. узлы: 1.

$x^2 - 2x + 5 + 4 x-1  = 0$	$x^2 - 2x + 5 - 4 x-1  = 0$
$x^2 + 2x + 1 = 0$	$x^2 - 6x + 9 = 0$
$(x+1)^2 = 0$	$(x-3)^2 = 0$
$x = -1$	$x = 3$ ч.п.к.

(1)  $-x = -1$ .



$$f(ab) = f(a) + f(b), \quad : a, b$$

$$f(p) = P, \quad : P - \text{выражение}$$

$$f(1p) = f(1) + f(p) = P$$

$$f(1p) = f(p) \Rightarrow \boxed{f(1) = 0}$$

$$f(x) \neq \frac{f(x)}{x}, \quad : x \neq 0, \neq$$

Тогда  $(x; y)$

$$\forall x \in [3; 19]$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$$

$$f(ab) = f(a) + f(b) \quad \text{~~slab~~}$$

$$f(16) = f(2 \cdot 8) = f(32) = f(4 \cdot 8) = f(2; 16) = \overset{f(2)+f(16)}{=} f(4) + f(8) = f(2) + f(16)$$

$$\overset{f(2)+f(2)}{=} f(2) + f(2)$$

$$f(p) = P, \quad f(p) = f\left(\frac{P}{A}\right) \cdot f(p), \Rightarrow P = f\left(\frac{P}{A}\right) + f(p)$$

$$f\left(\frac{7}{8}\right) = f\left(\frac{7}{8} \cdot 1\right) = f\left(\frac{7}{8}\right) + f(1)$$

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = f\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$f(8) = f(2) + f(4) = 3 \cdot f(2)$$

$$f\left(\frac{7}{8} \cdot 8\right) = f\left(\frac{7}{8}\right) + f(8) \stackrel{f(7)}{=} 4, \quad f\left(\frac{7}{8}\right) = -1$$

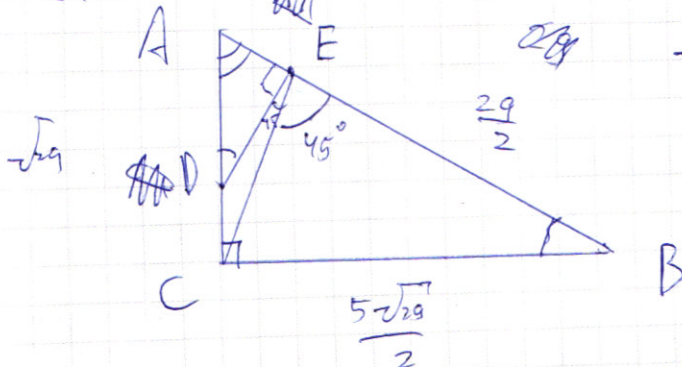
$$f\left(\frac{6}{8} \cdot 8\right) = f\left(\frac{6}{8}\right) + f(8) = 5$$

$$f\left(\frac{6}{8}\right) = -1$$

$$\Rightarrow 29 + \frac{25 \cdot 29}{4} = 4B^2$$

$$f(8) = f(9) \quad f\left(\frac{8}{9}\right) = 0$$

$$\frac{AD}{AC} = ? \quad S_{AED} = ? \quad 29 \left(1 + \frac{25}{4}\right) =$$



$$AC = 2\sqrt{29} \quad BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$$

$$= CED = 45^\circ = \frac{29}{4} = AB^2$$

$$AB = \frac{29}{2}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. В (2) системе (2) Рассмотрим верхнее урав. (из (1)):

$$(x+1)^2 \geq 0 \quad | \quad (x-3)^2 \geq 0 \quad , \quad \text{квадрат всегда } \geq 0, \Rightarrow x \in \mathbb{R}, \text{ кроме } -1; 3.$$

Нижнее уравнение (из (2)):

$$\begin{array}{l} \text{---} \quad 0 \quad + \quad -3 \quad + \quad + \\ 5x(x-3) < 0 \quad | \quad 3x(x-3) < 0 \quad | \quad 5x(x-3) < 0. \\ x \in [0; 3], \quad | \quad x \in [0; 3] \quad | \quad \text{ан-ко с первым уравн} \\ \text{из-за огранич.} \quad | \quad \text{или н.н.} \quad | \quad x \in [0; 3], \text{ - н.н.к.} \quad \Rightarrow \quad x \in [0; 3]. \\ x=0 \quad | \quad \text{в нуле} \quad | \quad \text{из-за огранич.} \quad | \quad \text{(система (2))} \\ \quad \quad | \quad \text{последн} \quad | \quad \quad \quad | \quad \quad \quad | \\ \quad \quad | \quad x=0, \quad | \quad \quad \quad | \quad \quad \quad | \\ \quad \quad | \quad \text{то здесь} \quad | \quad \quad \quad | \quad \quad \quad | \\ \quad \quad | \quad x \in (0; 3] \quad | \quad \quad \quad | \quad \quad \quad | \end{array}$$

В системе (3) в верхнем уравнении нет решений, т.к. Квадрат всегда  $\geq 0$ ,  $\Rightarrow$  система (3)  $\in \emptyset$ .

Итого:

$$\begin{cases} x = -1 & (1) \\ x \in [0; 3] \\ x \in \emptyset \end{cases} \quad \text{из-за ОДЗ } x \notin (0; 3) \Rightarrow \Rightarrow \text{ Ответ: } x = -1 \quad \forall x \in (0; 3).$$

$$\text{№6. } \begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| \geq 6, & 3x = a, 2y = b, \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0, \end{cases}$$

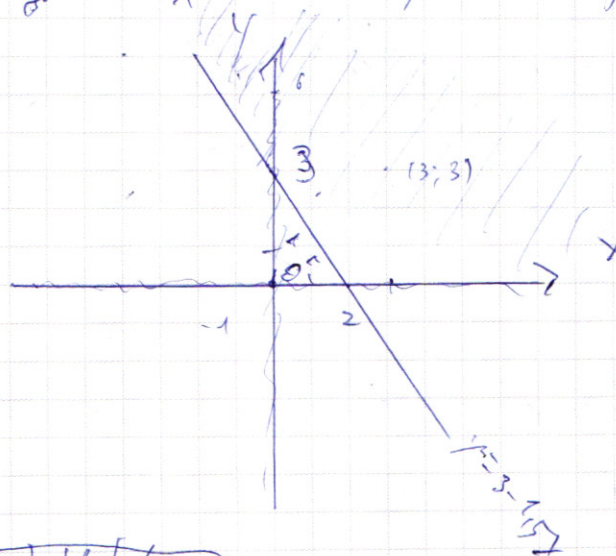
$$\Rightarrow |a| + |b| + |6 - a - b| \geq 6,$$

~~100%~~ ~~100%~~

$$x^2 + y^2 \leq 2x + 3y, \Rightarrow 2x + 3y \geq 0, \Rightarrow -3y - 2x \leq 0,$$

$$|3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| \geq 6,$$

$$\Rightarrow \text{т.ч. укл.: } x=0; y=0; 2y+3x=6,$$



$$y = 3 - 1,5x$$

инвариантно:

$$|3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| \geq 6$$

$$1. \frac{|x-1| + 4|x-1|}{?}$$

$$|3x| + |2y|$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 5 - 4|x-1| > 0 & (1) \\ 4x^2 - 12x + |x-1|x-3| < 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 5 - 4|x-1| > 0 \\ 4x^2 - 12x + |x-1|x-3| < 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 9 \neq 0, \\ (y-3)^2 \geq 0 \\ (x-3)(x-3) \geq 0. \end{cases}$$

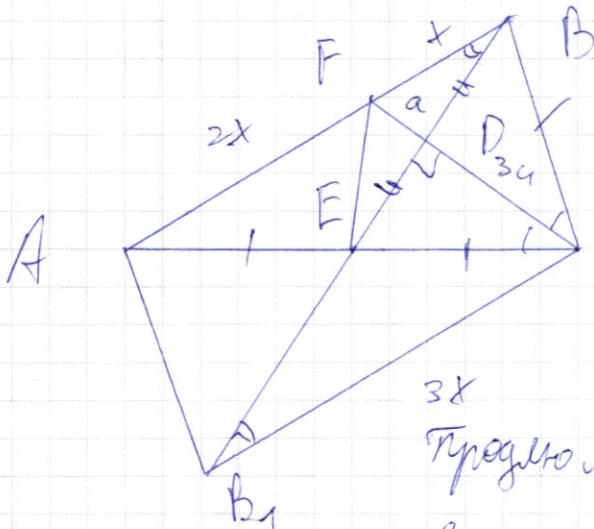
$x \in \mathbb{R}, x \neq 3.$   
 $(x \neq 3, x \leq 1)$

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 \geq 0 \\ (x+1)^2 \neq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x \neq 3; x > 4$   
 $x \in \mathbb{R}.$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2.



$CF$  - диаг.;  $BE$  - мед.

$CF \perp BE$ .

$C \Rightarrow \triangle ECB$   $CD$  - диаг.  
и высота,  $\Rightarrow \triangle ECB$  - равнос.  
 $\Rightarrow CD$  - медиана,  $EC = BC = \frac{1}{2} AC$ .

Прямоугольный  $BE$  го  $BB_1$ ,  $\Rightarrow \triangle BCB_1$  -

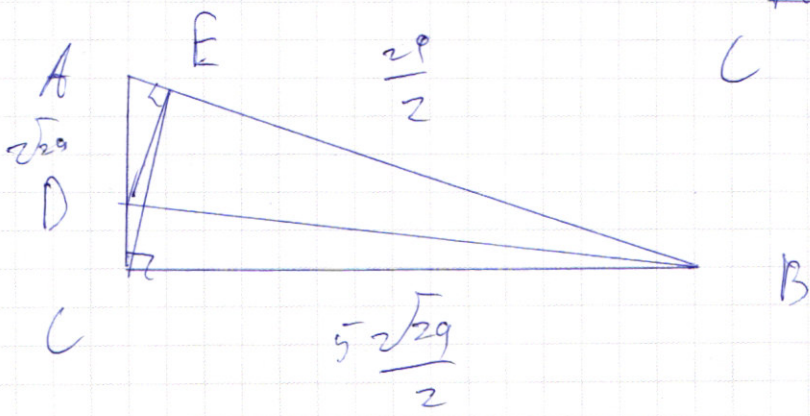
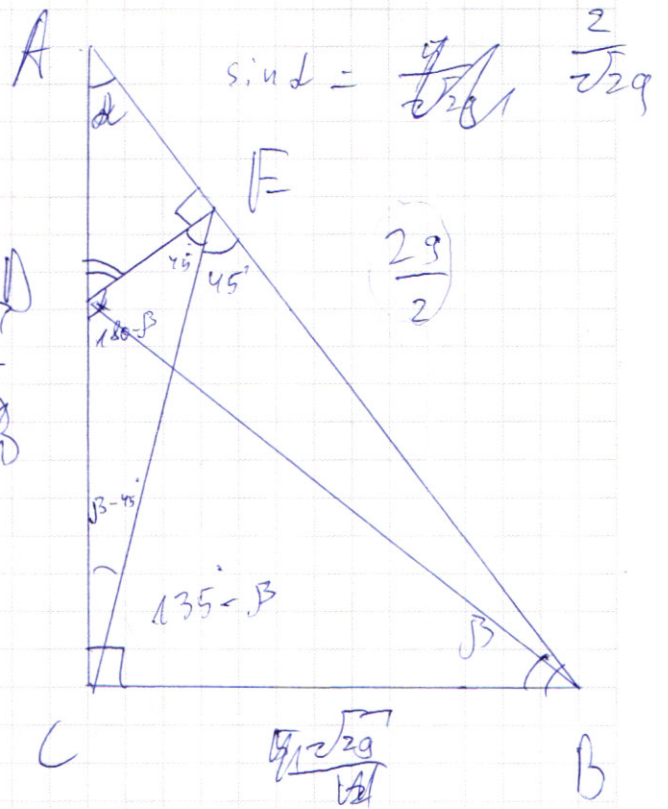
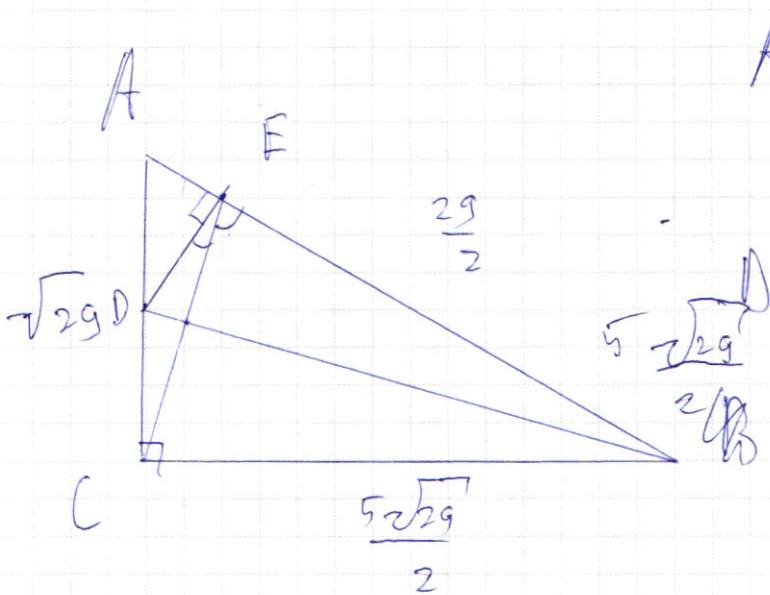
пар-м. По до-вы диаг. в  $\triangle ABC$ ,  $\frac{BF}{AF} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$ ,

$\Rightarrow \frac{BF}{AF} = \frac{1}{2}$ . Расм.  $\triangle B_1DC$  и  $\triangle FDB_1$  ( $\angle FDB_1 = \angle B_1DC = 90^\circ$ )

м.п.  $AB$  и  $B_1C$ , а  $BB_1$  - секущ., то  $\angle ABB_1 = \angle B_1CB$  по до-вы  
накрестн. углы,  $\Rightarrow \triangle FDB_1 \sim \triangle CDB_1$ ,  $k=3$ , м.п.

$B_1C = AB = 3x$  ( $\triangle BCB_1$  - пар-м.),  $BF = x$ ,  $\Rightarrow \frac{FD}{CD} = \frac{1}{3}$ .

Рассм.  $\triangle ABB_1$



N1. 
$$\frac{(x-1)^2 + 4 - 4|x-1|}{4x(x-3) + |x||x-3|} \leq 0,$$

$x \in \left[ \frac{b}{a}, \frac{c}{a} \right]$

$$\frac{(x-1)^2 + 4(1 - |x-1|)}{4x(x-3) + |x||x-3|} \leq 0.$$

$x^2 - 2x + 5|x-1| - 4|x-1| = 0$   
 $(x-1)^2 + 4(1-1)$

$x^2 - 2x + 5 - 4|x-1| + 4 = 0$   
 $x^2 - 6|x-1| + 9 = 0$   
 $x = 3$   
 $x = -1$

$$\left[ \begin{array}{l} (x-1)^2 \dots \geq 0 \\ \dots < 0 \\ \dots < 0 \\ \dots \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\sqrt{6} \cdot \sqrt{|3x+2y| + |6-3x-2y|} > 6 \quad (1)$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3y + y^2} \leq 0,1 + 3,25 \quad (2)$$



$$(1) \quad x^2 - 2x + 1 + y^2 - 3y + 2,25 \leq 3,25$$

$$(x-1)^2 + (y-1,5)^2 \leq \frac{13}{4} \Rightarrow \text{этот график - круг с } R = \frac{\sqrt{13}}{2} \text{ и}$$

центром  $O(1; 1,5)$ .

(1) Рассмотрим пер-во при  $x, y$ :

п.1.  $x > 0, y > 0, 6-3x-2y \geq 0, 6 > 3x+2y, y < 3-1,5x$

п.2.  $x > 0, y > 0, 6-3x-2y < 0, y > 3-1,5x$

п.3.  $x > 0, y < 0, 6-3x-2y \geq 0, y < 3-1,5x$

п.4.  $x < 0, y > 0, 6-3x-2y \geq 0, y < 3-1,5x$

п.5.  $x > 0, y < 0, 6-3x-2y < 0, y > 3-1,5x$

п.6.  $x < 0, y > 0, 6-3x-2y < 0, y > 3-1,5x$

п.7-8 ~~В~~ при  $x, y < 0$  не имеет решений, т.к. график  $y = 3-1,5x$  ~~не~~ не находится в III-й четверти.

п.1.:  $3x+2y + 6-3x-2y \geq 6, 6 > 6 \quad \emptyset$

п.2.  $3x+2y < 6+3x+2y \geq 6, 3x+2y \geq 6, y > 3-1,5x$

~~то же самое~~

п.3.  $3x-2y + 6-3x-2y \geq 6, -4y \geq 0, y < 0$

~~для~~

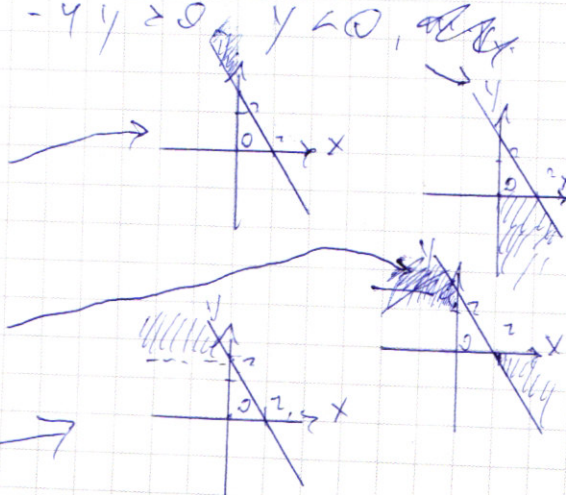
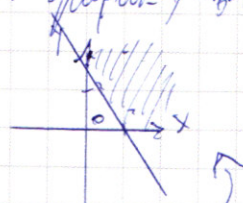
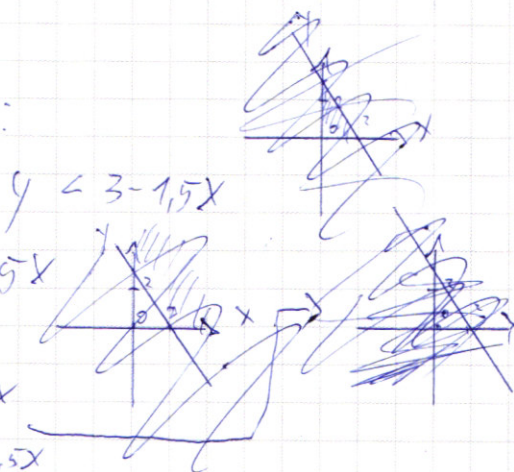
п.4.  $-3x+2y + 6-3x-2y \geq 6, x < 0$

п.5.  $3x-2y - 6+3x+2y \geq 6, 3x \geq 6,$

$x \geq 2$

п.6.  $-3x+2y - 6+3x+2y \geq 6,$

$y \geq 3$





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

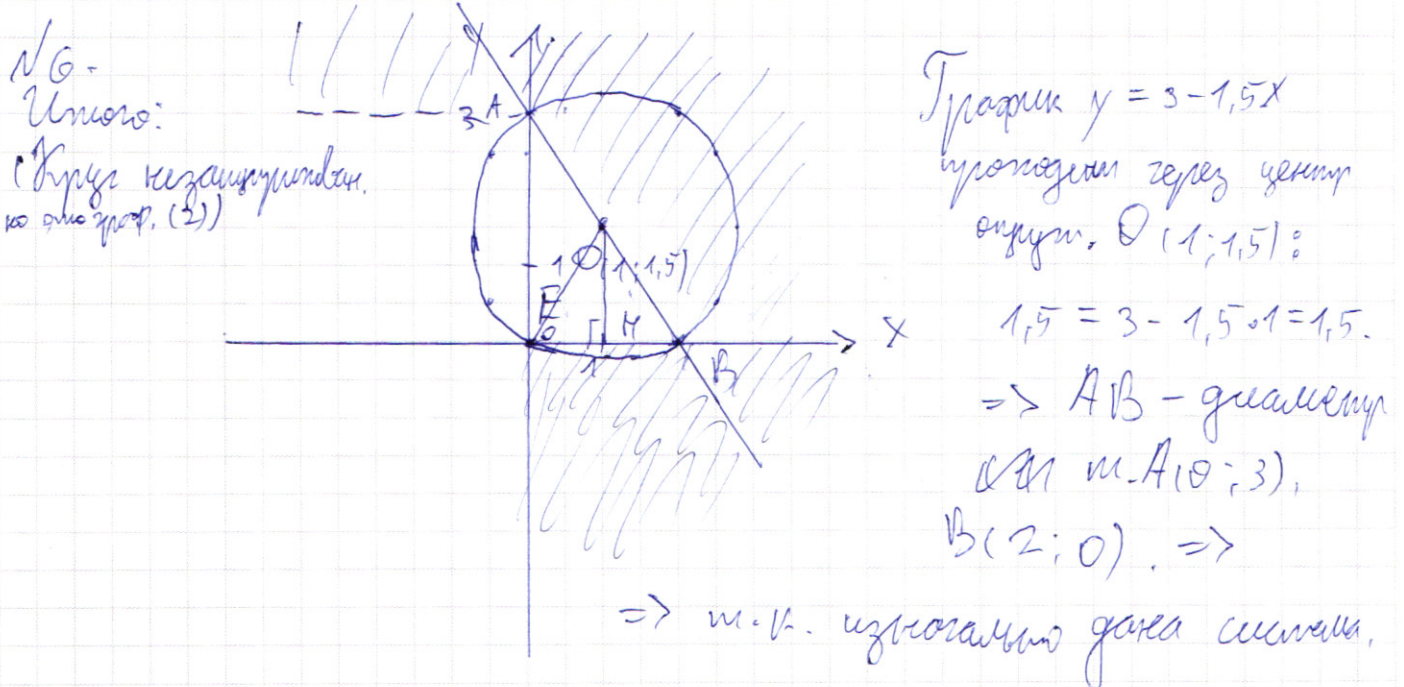
## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~3-2x~~  $(x-1)^2 + (y-1,5)^2 \leq 3,25.$

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №      
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



по площади фигуры -  $S_{\text{полукр. } AB} + S_{\triangle EOB}$ .

$$\text{м.к. } R = \frac{\sqrt{13}}{2}, \Rightarrow S_{\text{окр}} = \pi \cdot \frac{13}{4}, \Rightarrow S_{AB} = \frac{13\pi}{8}.$$

$$S_{\triangle EOB} = S_{\text{сектора } EOB} - S_{\triangle EOB} \text{ (равнод. треуго.)}$$

$$S_{\text{сектора}} = \frac{\angle EOB}{360} \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{\angle EOB}{360} \cdot \frac{13\pi}{4}.$$

$\triangle EOB$  - равнод.  $\Rightarrow EH$ , высота,  $EB = 2$  (м.к.

$E(0; 0)$ , а  $B(2; 0)$ ,  $OH = 1,5$ , м.к.  $H(1; 0)$ , а м.  $O(1; 1,5)$ ,

$$\Rightarrow S_{\triangle EOB} = \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 2 = 1,5, \quad \triangle EOB$$

$$\text{Велич. } \angle EOH, \angle EOB \text{ tg } \angle EOH = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow$  м.к.  $OH$  - высота равнод.  $\triangle$ , но  $\angle EOH = \angle HOB =$

$$= 2 \cdot \arctg \frac{2}{3}, \Rightarrow \text{Итого: } \frac{13\pi}{8} + \frac{\arctg \frac{2}{3} \cdot 13\pi}{\frac{1}{2} \cdot 720} = 1,5.$$





черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)