МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $\cancel{AC}$ BC $=\sqrt{29}$, $\cancel{BC}$ AC $=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y| > 6, \\ x^2-2x-3y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 19$, $3 \leqslant y \leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6 \\ x^2-2x-3y+y^2 \leq 0 \end{cases}$$

(1) $|3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6$

1. $\begin{cases} 3x \geq 0 \\ 2y \geq 0 \\ 6-3x-2y \geq 0 \\ 3x+2y+6-3x-2y>6 \end{cases} \to 6>6 \Rightarrow \varnothing$

2. $\begin{cases} 3x<0 \\ 2y<0 \\ 6-3x-2y<0 \\ -3x-2y-6+3x+2y>6 \end{cases} \to -6>6 \Rightarrow \varnothing$

3. $\begin{cases} 3x \geq 0 \\ 2y \geq 0 \\ 6-3x-2y<0 \\ 3x+2y-6+3x+2y>6 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y>3-1,5x \\ 6x+4y-12>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y>3-1,5x \\ y>3-1,5x \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x \geq 0 \\ 2y<0 \\ 6-3x-2y<0 \\ 3x-\cancel{2y}-6+3x+\cancel{2y}>6 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ y<0 \\ y>3-1,5x \\ 6x>12 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ y<0 \\ y>3-1,5x \\ x>2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x<0 \\ 2y<0 \\ 6-3x-2y \geq 0 \\ -3x-2y+6-3x-2y>6 \end{cases}$ $\begin{cases} x<0 \\ y<0 \\ y \leq 3-1,5x \\ 4y<-6x \end{cases}$ $\begin{cases} x<0 \\ y<0 \\ y \leq 3-1,5x \\ y<-1,5x \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x<0 \\ 2y \geq 0 \\ 6-3x-2y \geq 0 \\ -3x+\cancel{2y}+\cancel{6}-3x-\cancel{2y}>\cancel{6} \end{cases}$ $\begin{cases} x<0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 3-1,5x \\ x<0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x<0 \\ 2y \geq 0 \\ 6-3x-2y<0 \\ -\cancel{3x}+2y-6+\cancel{3x}+2y>6 \end{cases}$ $\begin{cases} x<0 \\ y \geq 0 \\ y>3-1,5x \\ y>3 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x \geq 0 \\ 2y < 0 \\ \cancel{6-} 3x - 2y \geq 0 \\ \cancel{3x} - 2y \cancel{+6} \cancel{-3}x - 2y > \cancel{6} \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \\ y \leq 3 - 1,5x \\ y < 0 \end{cases}$

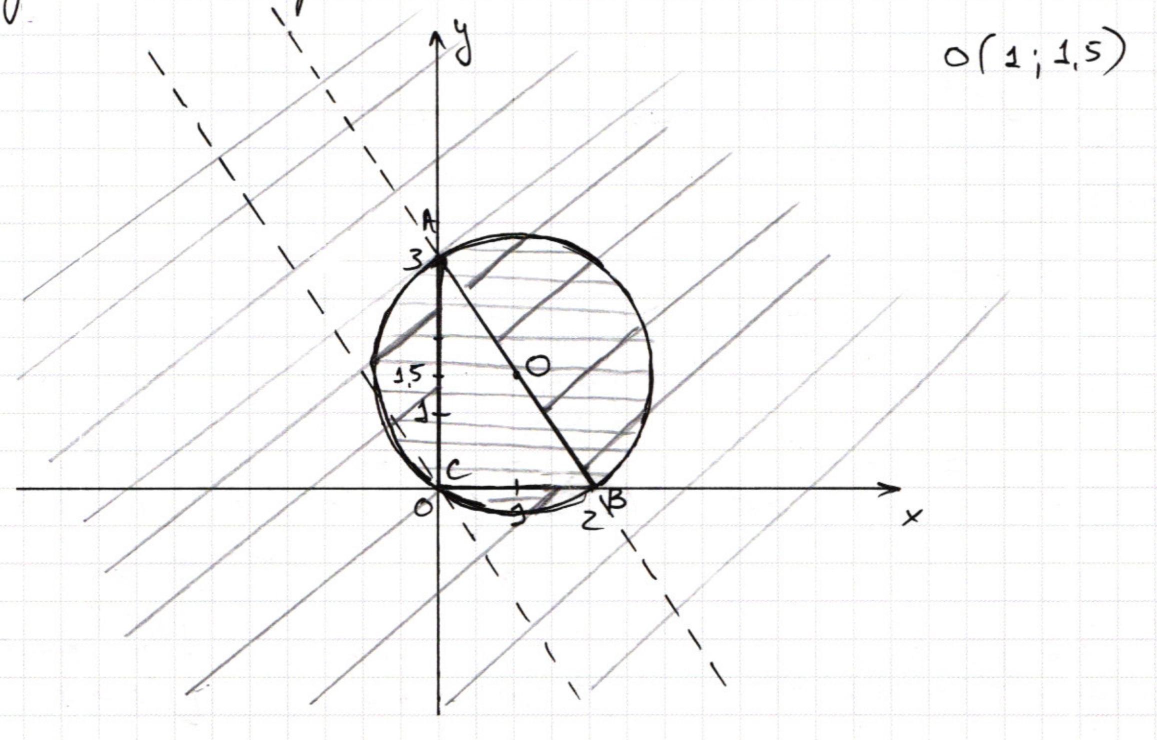
② $x^2 - 2x + y^2 - 3y \leq 0$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2 \cdot 1,5y + 1,5^2 \leq 1 + 1,5^2$

$(x-1)^2 + (y-1,5)^2 \leq 1 + 1,5^2$

График - окружность с центром $(1; 1,5)$ и $R = \sqrt{1+1,5^2} =$
$= \sqrt{3,25}$

Изобразим оба нер-ва на плоскости:



Заметим, что расст. от начала координат до т. O (центра окружности) и будет равно радиусу, тк $O(1; 1,5)$ =>
=> расстояние $l = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{1 + 1,5^2} = R$.

① нер-во - вся плоскость, за исключением ΔABC (получаем это, если нарисовать все 8 случаев)

② нер-во - все „внутренности" окружности

Получается, пересеч. данных нер-в - все „внутренности" окружности за исключением вписанного в нее ΔABC (он впис. тк т. O лежит на AB и расст. до т. A и т. B также $R = \sqrt{1+1,5^2}$)

Тогда $S = S_{кр} - S_{ABC} = \pi R^2 - \frac{1}{2} AC \cdot BC = \pi \cdot 3,25 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = \boxed{3,25\pi - 3}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\leq 0$$

① $\begin{cases} x^2-2x+5-4|x-1|\geq 0 \\ 4x^2-12x+|x(x-3)|<0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4|x-1|\leq x^2-2x+5 \\ |x(x-3)|<12x-4x^2 \end{cases}$

$\begin{cases} 4x-4\leq x^2-2x+5 \\ 4x-4\geq -x^2+2x-5 \\ x(x-3)<12x-4x^2 \\ x(x-3)>4x^2-12x \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-6x+9\leq 0 \\ x^2+2x+1\geq 0 \\ 5x^2-15x<0 \\ 3x^2-9x>0 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-3)^2\leq 0 \\ (x+1)^2\geq 0 \\ x^2-3x<0 \\ x^2-3x>0 \end{cases}$ $\begin{matrix} x=3 \\ x\in\mathbb{R} \end{matrix}$ $\Rightarrow$ $\underline{x\in\varnothing}$

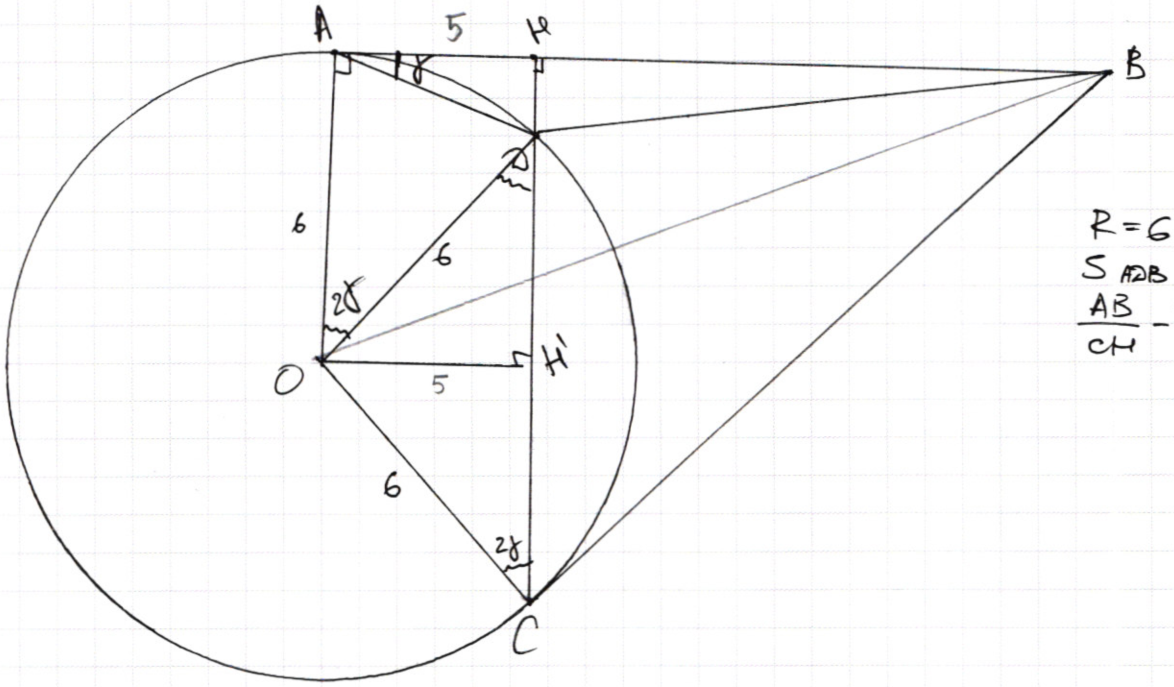
② $\begin{cases} x^2-2x+5-4|x-1|\leq 0 \\ 4x^2-12x+|x(x-3)|>0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4|x-1|\geq x^2-2x+5 \\ |x^2-3x|>12x-4x^2 \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{matrix} 4x-4\geq x^2-2x+5 \\ 4x-4\leq -x^2+2x-5 \end{matrix}\right. \\ \left[\begin{matrix} x^2-3x>12x-4x^2 \\ x^2-3x<4x^2-12x \end{matrix}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{matrix} x^2-6x+9\geq 0 \\ x^2+2x+1\leq 0 \end{matrix}\right. \\ \left[\begin{matrix} 5x^2-15x<0 \\ 3x^2-9x>0 \end{matrix}\right. \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{matrix} (x-3)^2\geq 0 \\ (x+1)^2\leq 0 \end{matrix}\right. \\ x^2-3x\neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{matrix} x\in\mathbb{R} \\ x=-1 \end{matrix}\right. \\ x\neq 0 \\ x\neq 3 \end{cases}$, тк $(f(x))^2\geq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Значит, $\boxed{x\in(-\infty;0)\cup(0;3)\cup(3;+\infty)}$

№4



$R = 6$

$S_{ADB} = 15$

$\frac{AB}{CH} - ?$

Пусть $\angle ABC = 2\gamma$. Тк т. A и т. C – т. касания, то $\angle AOC = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 2\gamma = 180^\circ - 2\gamma$.

Кроме того, тк т. A – т. кас., то $\angle OAB = 90^\circ = \angle CHB = 90^\circ$ (тк CH – высота) $\Rightarrow \angle OAB + \angle CHA = 180^\circ \Rightarrow OA \parallel HC$.

Тк $OA \parallel HC$, $\angle AOC + \angle HCO = 180^\circ$, как внутр. однобор. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle HCO = 180^\circ - 180^\circ + 2\gamma = 2\gamma$

$OD = OA = OC = R = 6 \Rightarrow \triangle ODC$ – равноб. $\Rightarrow \angle ODC = \angle OCD = 2\gamma$.

$\angle AOD = \angle ODC = 2\gamma$ (накр. леж.)

$OA = OD \Rightarrow \triangle AOD$ – равноб. $\Rightarrow \angle OAD = \angle ODA = \frac{180^\circ - 2\gamma}{2} = 90^\circ - \gamma$.

$\angle DAB = 90^\circ - \angle OAD = \gamma$.

$S_{DAB} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin\gamma = 15$

$AB \cdot AD \cdot \sin\gamma = 30$; В прямоуг. $\triangle BOA$ $\angle ABO = \frac{\angle ABC}{2} = \gamma$, тк окружность вписана в $\angle ABC \Rightarrow BO$ – бис-са.

$\operatorname{tg}\gamma = \frac{OA}{AB} = \frac{6}{AB} \Rightarrow AB = \frac{6}{\operatorname{tg}\gamma}$

$6 \cdot AD \cdot \sin\gamma = 30 \cdot \operatorname{tg}\gamma$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$AD \cdot \sin\gamma = 5 \cdot \dfrac{\sin\gamma}{\cos\gamma}$

$AD \cdot \cos\gamma = 5$

В $\triangle ADO$ по т. cos: $AD^2 = AO^2 + OD^2 - 2AO \cdot OD \cdot \cos 2\gamma$

$AD^2 = 2\cdot 36 - 2 \cdot 36 \cdot \cos 2\gamma = 2\cdot 36(1-\cos 2\gamma)$

$2\cdot 36(1-\cos 2\gamma)\cos^2\gamma = 25$; $\cos 2\gamma = \sqrt{1-\sin^2 2\gamma} = \sqrt{1-(2\cos\gamma \cdot \sin\gamma)^2} = \sqrt{1-4\cos^2\gamma \sin^2\gamma}$

$2\cdot 36 \cdot \left(1-\sqrt{1-4\cos^2\gamma \cdot \sin^2\gamma}\right)\cdot \cos^2\gamma = 25$

$2\cdot 36 \cdot \left(1-\sqrt{1-4\cdot\cos^2\gamma\cdot(1-\cos^2\gamma)}\right)\cos^2\gamma = 25$

$2\cdot 36 \cdot \left(1-\sqrt{1-4\cdot\cos^2\gamma + 4\cos^4\gamma}\right)\cdot\cos^2\gamma = 25$

пусть $\cos^2\gamma = t$

$2\cdot 36\left(1-\sqrt{1-4t+4t^2}\right)\cdot t = 25$

$t - t\sqrt{1-4t+4t^2} = \dfrac{25}{2\cdot 36}$

В прямоуг. $\triangle AHD$ $\cos\gamma = \dfrac{AH}{AD}$ => $AD\cdot\cos\gamma = AH$ => $AH = 5$

Опустим высоту из т. O на CH. Тк $OA \parallel CH$, $\angle OH'H = \angle AHH' = 90^\circ$ => $AH \parallel OH'$ => $OAHH'$ – прям-к => $OH' = AH = 5$

В прямоуг. $\triangle COH'$ $\sin 2\gamma = \dfrac{OH'}{OC} = \dfrac{5}{6}$

~~Тогда $\cos 2\gamma = \sqrt{1-\sin^2 2\gamma}$~~ $= \sqrt{1-\dfrac{25}{36}} = \dfrac{\sqrt{11}}{6}$

В прямоуг. $\triangle BCH$ $\sin 2\gamma = \dfrac{5}{6} = \dfrac{CH}{BC}$, по теореме о 2 кас. из одной точки $AB = BC$ => $\dfrac{CH}{BC} = \dfrac{CH}{AB}$ => $\boxed{\dfrac{AB}{CH} = \dfrac{1}{\sin 2\gamma} = \dfrac{6}{5}}$

$\boxed{\text{Ответ: } 6/5}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \rightarrow y=\frac{9-x^2}{2}$$

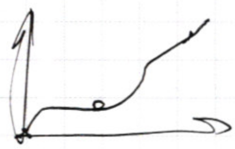
$\cancel{y-2\sqrt{xy}+x-3x+\sqrt{xy}}=0$

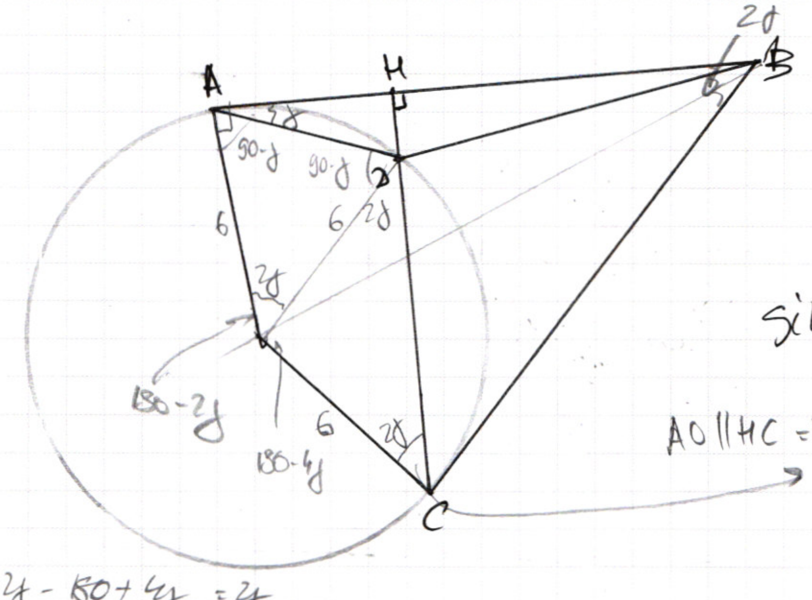
$\cos 2y = 1-\sin^2 y =$

$= 1-4\cos^2 y \sin^2 y$

$$\frac{9-x^2}{2}-2x=\sqrt{x\cdot\frac{9-x^2}{2}}$$

$$9-x^2-4x=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{x(9-x^2)}{2}}$$





$\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin y=15$

$AB\cdot AD\sin y=30$

$\sin(\varphi+45)=\sin\varphi$

$AO \parallel HC \Rightarrow 2y$

$$\frac{AE\cdot 29}{5\sqrt{29}}=\frac{AE\cdot\sqrt{29}}{5}$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ -14 \\ \hline 15 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 59 \\ -30 \end{array}$$

$180-2y-180+4y=2y$

x^2-3x

$AD=\sqrt{36\cdot 2-2\cdot 36\cdot\cos 2y}$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=p$

$$AE=\frac{AD\cdot 2\cdot 5\sqrt{29}}{2\sqrt{29}\cdot\sqrt{29}}=\frac{AD\cdot 5}{\sqrt{29}}$$

$$DE=\frac{AD\cdot 2\cdot\sqrt{29}}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{29}}=AD\cdot\frac{2}{\sqrt{29}}$$

$\cancel{3\le x\le 19}$

$\cancel{28\le 4}$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0$

$$DE=\frac{AE\cdot 2\sqrt{29}}{5\sqrt{29}}$$

$AE\cdot\sqrt{29}\cdot$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} & (1) \\ 2y+x^2=9 & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим (1) ур-е:

$y-2x=\sqrt{xy}$

1) $\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ y-2x=\sqrt{x}\cdot\sqrt{y} \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ y-\sqrt{y}\cdot\sqrt{x}-2x=0 \end{cases}$

пусть $\sqrt{y}=t$. Тогда $t^2-t\cdot\sqrt{x}-2x=0$

$D=x+8x=9x$

$t_{12}=\dfrac{\sqrt{x}\pm 3\sqrt{x}}{2}$

$\left[\begin{array}{l} t_1=-\sqrt{x} \\ t_2=2\sqrt{x} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sqrt{y}=-\sqrt{x} \Rightarrow \varnothing \\ \sqrt{y}=2\sqrt{x} \end{array}\right.$

Значит, $\sqrt{y}=2\sqrt{x}$

$\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ y=\sqrt{xy}+2x=\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}+2x=2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}+2x=2x+2x=4x \end{cases}$

Подставим $y=4x$ во (2) ур-е:

$2\cdot 4x+x^2=9$

$x^2+8x-9=0$. По т. Виета $\begin{cases} x_1+x_2=-8 \\ x_1x_2=-9 \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=-9 \\ x_2=1 \end{array}\right. \\ x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x=1}$

$x=1 \Rightarrow y=4x=4.$

② $\begin{cases} x<0 \\ y<0 \\ y-2x=\sqrt{-x}\cdot\sqrt{-y} \end{cases}$

Пусть $\sqrt{-y}=t$. Тогда $t^2=-y \Rightarrow y=-t^2$

$-t^2-2x-t\cdot\sqrt{-x}=0$

$t^2+2x+t\sqrt{-x}=0$

$D=-x-8x=-9x$

$t_{12}=\dfrac{-\sqrt{-x}\pm3\sqrt{-x}}{2}$

$\left[\begin{array}{l} t_1=-2\sqrt{-x} \\ t_2=\sqrt{-x} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sqrt{-y}=-2\sqrt{-x} \Rightarrow \varnothing \\ \sqrt{-y}=\sqrt{-x} \end{array}\right.$

Значит, $\sqrt{-y}=\sqrt{-x}$

$y-2x=\sqrt{-x}\cdot\sqrt{-x}=-x$

$y-2x+x=0 \Rightarrow \underline{y=x}$

Подставим $y=x$ во (2) ур-е:

$2x+x^2-9=0$. $\frac{D}{4}=1+9=10$

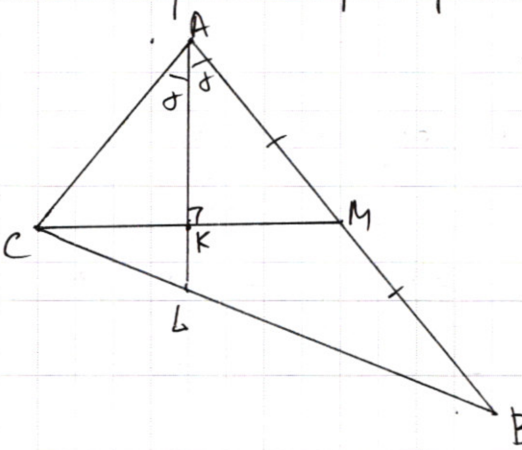
$x_{12}=-1\pm\sqrt{10}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=-1+\sqrt{10}>0 \\ x_2=-1-\sqrt{10}<0 \end{array}\right. \\ x<0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x=y=-1-\sqrt{10}}$

$\boxed{\text{ОТВЕТ: } (1;4),\ (-1-\sqrt{10};\ -1-\sqrt{10})}$

№2

Рассмотрим пример такого треугольника:



AL - бис-са, CM - медиана.

Пусть $\angle A=2\gamma$, тогда $\angle CAL=\angle MAL=\gamma$.

$\Delta CAK=\Delta MAK$, тк $\angle CKA=\angle MKA=90°$, $\angle CAK=\angle MAK=\gamma$, $AK=AK$. $\Rightarrow CA=AM=MB$.

Значит, $CA=\dfrac{AB}{2}$. Следовательно, все Δ-ки, в которых одна сторона вдвое больше

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

другой.

$P = a+b+c$, где a, b, c – стороны Δ-ка, причем одна вдвое больше другой (пусть $a=2b$); $a, b, c \in \mathbb{N}$

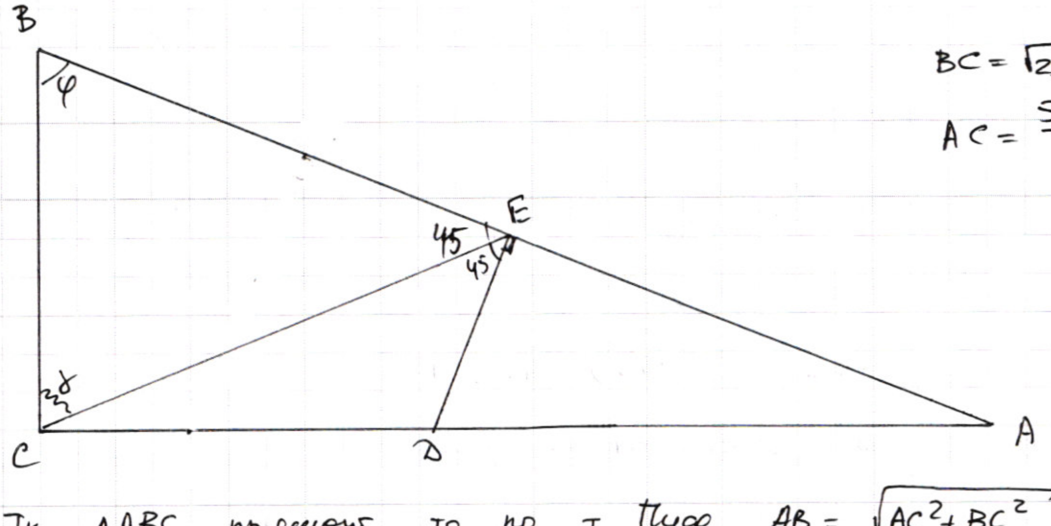
$P = 2b+b+c = 3b+c = 300$

$c = 300-3b = 3(100-b) \Rightarrow c \vdots 3$

$c_{min} = 3 \Rightarrow 3b_{max} = 297 \Rightarrow b_{max} = 99$

$b \in [1; b_{max}]$, то есть $b \in [1; 99] \Rightarrow$ есть 99 способов выбрать b. Кроме того, по нер-ву треуг-ка: $c < a+b$, т.е. $c < 3b \Rightarrow 300-3b < 3b \Rightarrow$
$\Rightarrow 6b > 300$, $b > 50 \Rightarrow b \in [51; 99] \Rightarrow$ уже есть 40 способов выбрать b. Когда мы выбрали b, a и c определяются однозначно $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $\boxed{\text{ОТВЕТ: } 40}$

№5



$BC = \sqrt{29}$

$AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$

Тк ΔABC прямоуг. то по т. Пиф $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{29 + 29\cdot\frac{25}{4}} =$
$= \sqrt{29\left(1+\frac{25}{4}\right)} = \frac{29}{2}$.

В ΔDEA и ΔBCA $\angle A$ - общий, $\angle DEA = \angle BCA = 90^\circ \Rightarrow \Delta DEA \sim \Delta BCA$ по 2 углам

Тогда $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$, т.е. $\frac{AE\cdot 2}{5\sqrt{29}} = \frac{AD\cdot 2}{29} = \frac{DE}{\sqrt{29}} \Rightarrow$
$\Rightarrow ED = AE\cdot\frac{2}{5}$, $AD = AE\cdot\frac{\sqrt{29}}{5}$

В $\triangle BCE$ по т. sin: $\frac{BC}{\sin 45} = \frac{CE}{\sin\varphi}$, $\sin\varphi = \frac{AC}{AB} = \frac{5\sqrt{29}\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot 29} = \frac{5}{\sqrt{29}}$

$$CE = BC\cdot\frac{\sin\varphi}{\sin 45^\circ} = \sqrt{29}\cdot\frac{5\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{29}\cdot 1} = 5\sqrt{2}$$

$\gamma = 180^\circ - \varphi - 45^\circ \Rightarrow \sin\gamma = \sin(\varphi + 45^\circ) = \sin\varphi\cdot\cos 45^\circ + \sin 45^\circ\cdot\cos\varphi =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\varphi + \sqrt{1-\sin^2\varphi}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{5}{\sqrt{29}} + \sqrt{1-\frac{25}{29}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{5}{\sqrt{29}} + \frac{2}{\sqrt{29}}\right) =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{7}{\sqrt{29}}$.

по т. sin: $\frac{BE}{\sin\gamma} = \frac{BC}{\sin 45^\circ}$

$$BE = BC\cdot\sin\gamma\cdot\frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{29}\cdot\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}\cdot\frac{7}{\sqrt{29}}\cdot\cancel{\sqrt{2}} = 7.$$

$EA = AB - BE = \frac{29}{2} - 7 = \frac{15}{2}$

$ED = \frac{2}{5}\cdot AE = \frac{2}{5}\cdot\frac{15}{2} = 3$; $AD = AE\cdot\frac{\sqrt{29}}{5} = \frac{15}{2}\cdot\frac{\sqrt{29}}{5} = 3\cdot\frac{\sqrt{29}}{2}$

В $\triangle DEC$ по т. cos: $CD = \sqrt{CE^2 + ED^2 - 2CE\cdot ED\cdot\cos 45} =$

$= \sqrt{25\cdot 2 + 9 - 2\cdot 5\cancel{\sqrt{2}}\cdot 3\cdot\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}} = \sqrt{29}$

Тогда $\frac{AD}{AC} = \frac{AD}{AD+DC} = \frac{3\cdot\sqrt{29}}{2\left(\frac{3\sqrt{29}}{2} + \sqrt{29}\right)} = \frac{3}{2(1{,}5+1)} = \frac{3}{3+2} = \boxed{\frac{3}{5}}$

$S_{AED} = \frac{1}{2}AE\cdot DE = \frac{1}{2}\cdot\frac{15}{2}\cdot 3 = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4} = \boxed{11{,}25}$

$\boxed{\text{ОТВЕТ: } \frac{3}{5};\ \frac{45}{4}}$

N7

$f(ab) = f(a) + f(b)$; $3 \le x \le 19$, $3 \le y \le 19$, $f(p) = p$

$f(x/y) < 0$, т.е. $f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right) < 0 \Rightarrow f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0 \Rightarrow f(x) < -f\left(\frac{1}{y}\right)$

Кроме того, в промежутке $[3;19]$, откуда выбирают x и y присутствует 7 простых чисел $(3, 5, 7, 11, 13, 17, 19)$.

~~Можно точно сказать, что одновременно~~ x ~~и~~ y ~~не могут быть простыми числами, т.к. тогда~~ $f(x) = x$, $f(y) = y$, x и $y > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$y-2x-\sqrt{xy}=0$ $\sqrt{y}=t$ $\sqrt{-x}\cdot\sqrt{-y}$

$z>y$ $t^2-\sqrt{x}\cdot t-2x=0$ $\sqrt{-y}\cdot\sqrt{-y}=$

$D=x+8x=9x$ $=-y$

$t_{12}=\frac{\sqrt{x}\pm3\sqrt{x}}{2} \Rightarrow t=2\sqrt{x}=\sqrt{y}=2\sqrt{x}$

$f\left(\frac{1}{y}\right)=f\left(7\cdot\frac{z}{y}\right)=f(z)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(z)=f(z\cdot 1)=f(1)$

$\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=2x^2 \rightarrow y=2x^2+2x$

$\cancel{y-2x}$ $\cancel{2x^2+2x}-y=0$ $-1-\sqrt{15}$

$-1-\sqrt{15}+2+2\sqrt{15}=$

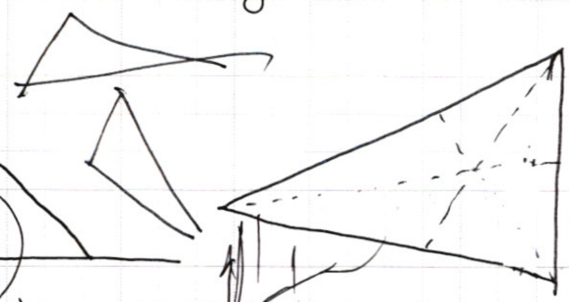
$=1+\sqrt{15}$

$2\cdot(2x^2+2x)+x^2=9$

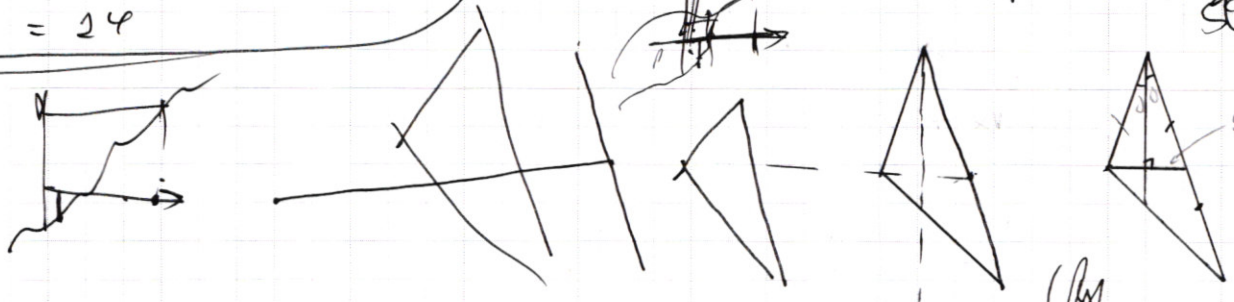
$(-1-\sqrt{15})^2=(1+\sqrt{15})^2=1+\sqrt{15}$

$300-36<36$ 300 $x+y+z=300$

$\frac{300}{3}$ $\frac{27}{3}$ 99 27



$-2-2\sqrt{15}+1+2\sqrt{15}+15=$
$=14$



$x+2x+y=300$

$$\begin{cases} 3x+y=300 \\ 3\cdot99+3=300 \end{cases}, x, y\in\mathbb{N}$$

$3(x-99)+y-3=0$

$y=3-3(x-99)=300-3x$

$f(3\cdot$

$f(1)=1$

$f\left(\frac{1}{6}\right)=f\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{6}\right)$

$f\left(\frac{1}{6}\right)=f\left(\frac{1}{12}\cdot\frac{12}{6}\right)=$

$=f\left(\frac{1}{12}\right)+f($

$f\left(\frac{1}{6}\right)=f\left(\frac{5}{5\cdot5\cdot6}\right.$

3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

$f(ab)=f(a)+f(b)$, $f(p)=p$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0 \rightarrow f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)<0 \rightarrow f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

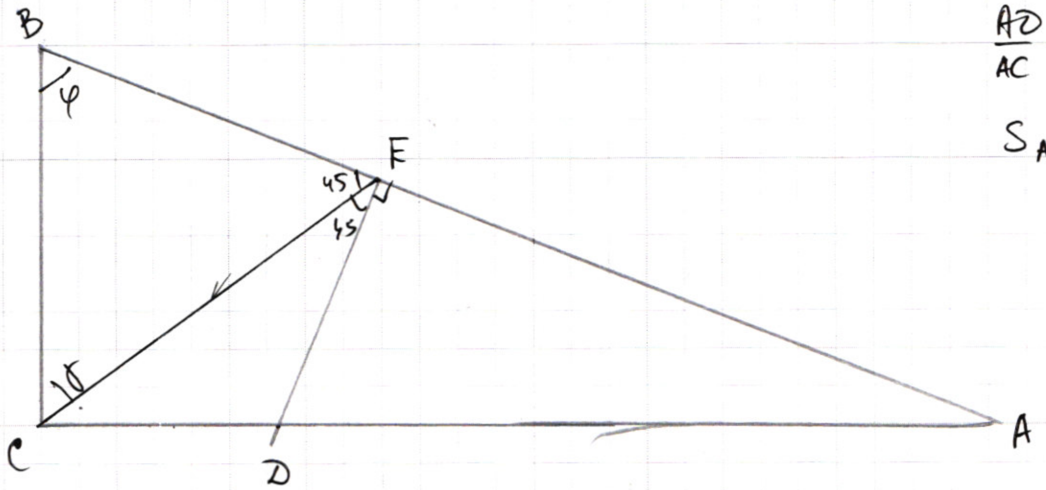
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\frac{AD}{AC}$ – ?

S_{AED} – ?

$$AB = \sqrt{29 + \frac{25}{4}\cdot 29} = \sqrt{29\left(1+\frac{25}{4}\right)} = \sqrt{29\cdot\frac{25}{4}} = \frac{29}{2}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \longrightarrow \frac{AD\cdot \cancel{2}}{\sqrt{29}} = \frac{AE\cdot\cancel{2}}{5\sqrt{29}}$$

$$\frac{AD}{\sqrt{29}} = \frac{AE}{5}$$

$$\frac{EC}{\sin\varphi} = \frac{BC}{\sin 45}$$

$$\frac{EC\cdot AB}{AC} = \frac{BC\sqrt{2}}{1}$$

$$EC = BC\sqrt{2}\cdot\frac{AC}{AB} = BC\sqrt{2}\cdot\frac{5\cancel{\sqrt{29}}\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot\cancel{\sqrt{29}}\cdot\sqrt{29}} = \cancel{BC}\sqrt{2}\cdot\frac{5}{\sqrt{29}} =$$

$$= 5\sqrt{2}$$

☑ черновик ☐ чистовик

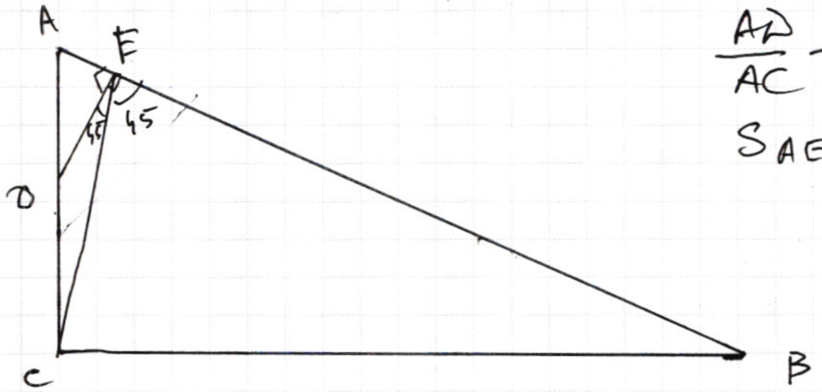
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{N5}$



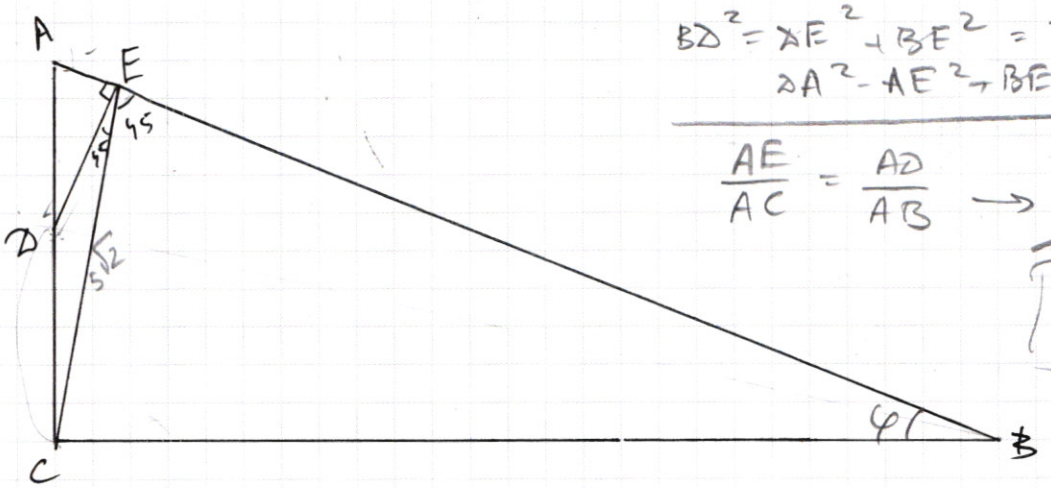
$\frac{AD}{AC}$ – ?

S_{AED}

$AC = \sqrt{29}$

$BC = \frac{5}{2}\sqrt{29}$

$AB = AC^2 + BC^2$



$BD^2 = \cancel{A}E^2 + BE^2 = DC^2 + BC^2$

$DA^2 - AE^2 + BE^2 = DC^2 + BC^2$

$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} \to \frac{AE}{\cancel{\sqrt{29}}} = \frac{AD \cdot 2}{\cancel{\sqrt{29}} \cdot \sqrt{29}}$

$\boxed{AE = AD \cdot \frac{2}{\sqrt{29}}}$

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{29 + \frac{25}{4} \cdot 29} = \sqrt{29\left(1 + \frac{25}{4}\right)} =$

$= \sqrt{29 \cdot \frac{29}{4}} = \frac{29}{2}$

$\sin\varphi = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{29} \cdot 2}{\sqrt{29} \cdot \cancel{\sqrt{29}}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$

$\frac{EC}{\sin\varphi} = \frac{BC}{\sin 45} \Rightarrow EC = BC \cdot \frac{\sin\varphi}{\sin 45} = \frac{5}{\cancel{2}} \cdot \cancel{\sqrt{29}} \cdot \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{29}} \cdot \cancel{1}} =$

$= 5\sqrt{2}$

№6 $\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6 \\ x^2-2x-3y+y^2\le 0 \end{cases}$

$x^2-2x+1+y^2-3y+1{,}5^2 \le 1{,}5^2+1$

$(x-1)^2+(y-1{,}5)^2 \le 1+1{,}5^2$

+ + +	✓	∅
− − −	✓	∅
+ + −	✓	
+ − −	✓	
− − +	✓	?
− + +	✓	
− + −		
+ − +		

① $3x+2y+6-3x-2y>6$

∅

② $-3x+\cancel{2y}+\cancel{6}-3x-\cancel{2y}>\cancel{6}$

$-6x>0$

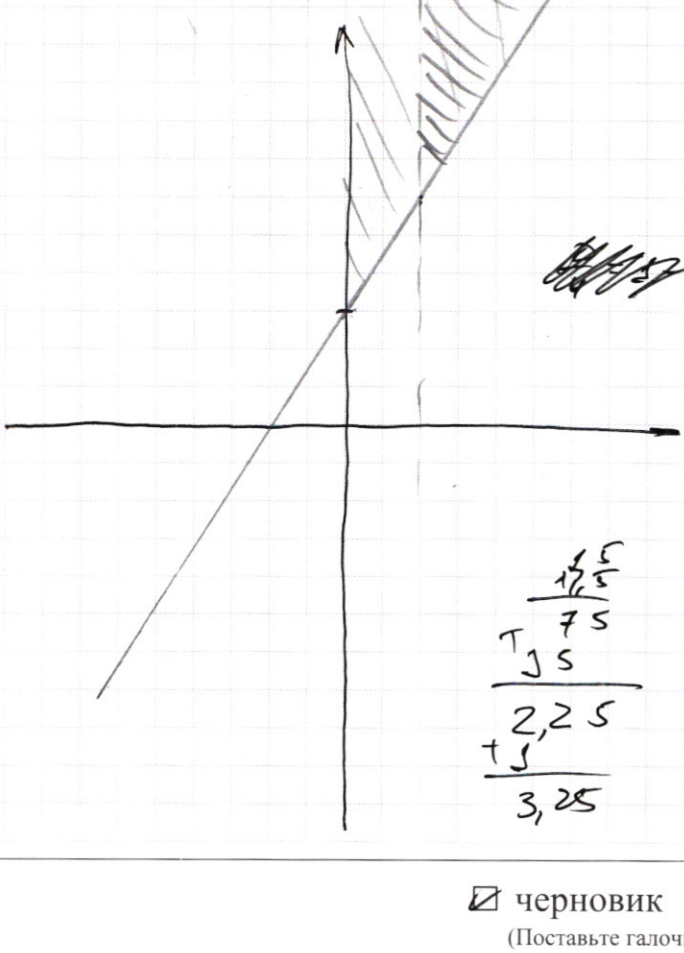
$6x<0 \to x<0$

③

$6-3x-2y<0$

$6-3x<2y$

$y>\dfrac{6-3x}{2}=3-1{,}5x$



+ − −

+ + −

− + +

+ − +

− − +

+ + +

− − −

+ − +

+ − −

− + +

− + −

− − +

$x^2-2x+y^2-3y\le 0$

$x^2-2x+1+y^2-2\cdot 1{,}5y+1{,}5^2\le$

$\le$

$4y>12-6x$

$y>3-1{,}5x$

$-3x-2y+\cancel{6}-3x-2y>\cancel{6}$

$-6x-4y>0$

$4y<-6x$

$y<-1{,}5x$

$\begin{array}{r} 1{,}5 \\ \times 1{,}5 \\ \hline 75 \\ +15 \\ \hline 2{,}25 \\ +1 \\ \hline 3{,}25 \end{array}$

$1{,}5^2$

$1{,}5^2$

$\sqrt{3{,}25}$

$9+4=13$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

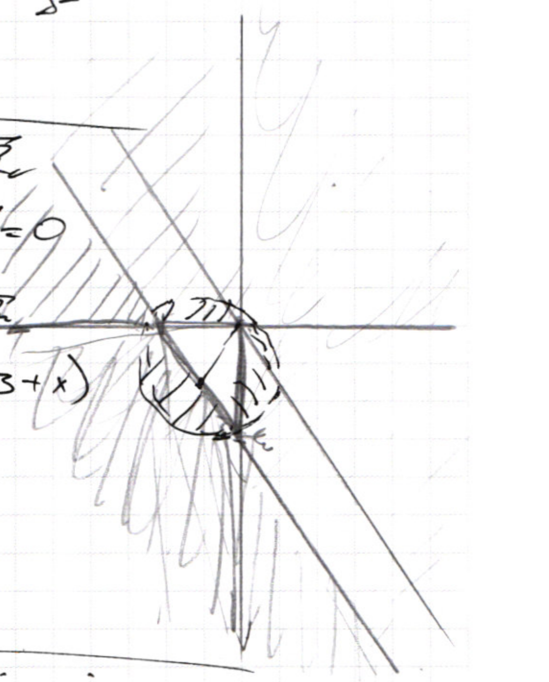
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\leq 0$$

36
$\underline{25}$
11

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$



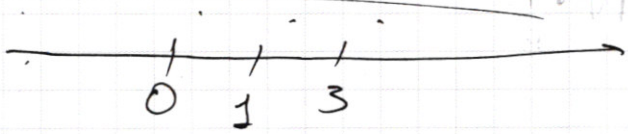
$$2y=9-x^2=(3-x)(3+x)$$

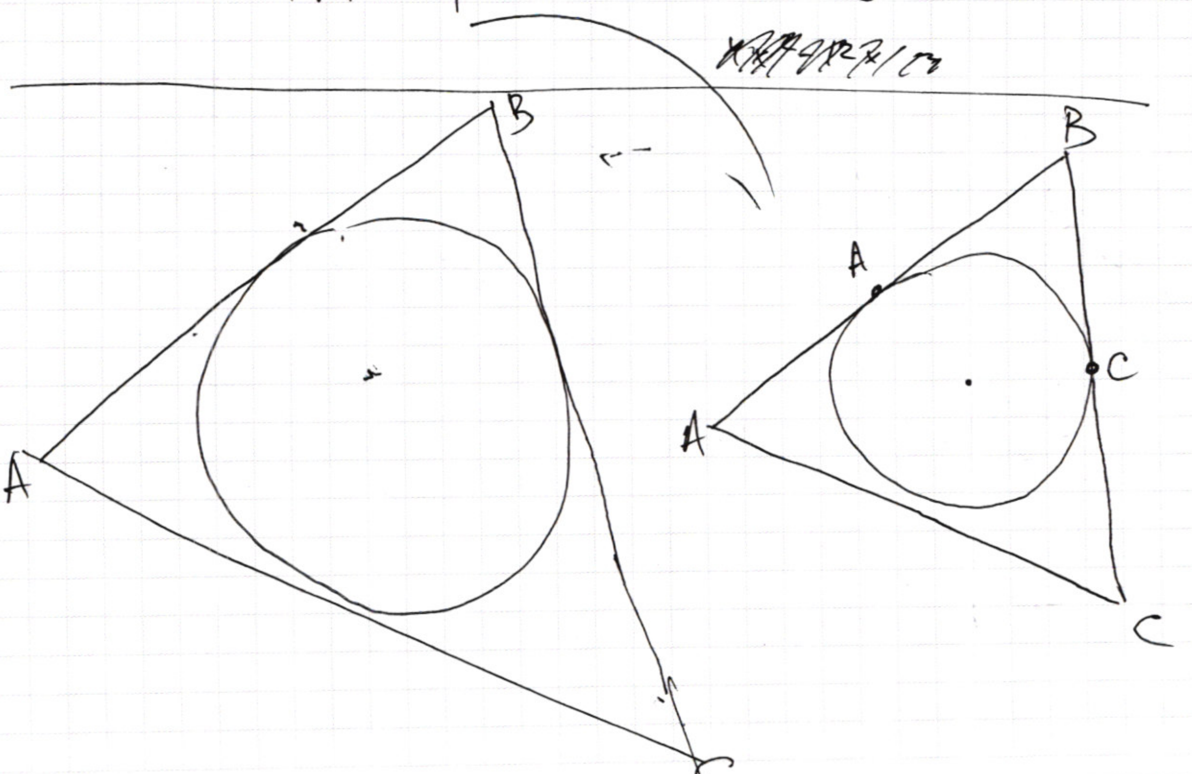
$$y=\frac{9-x^2}{2}$$

$$\frac{9-x^2}{2}-2x=\sqrt{x\cdot\frac{9-x^2}{2}}$$

$$3y+x^2-2x=9+\sqrt{xy}$$

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\leq 0$$





☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

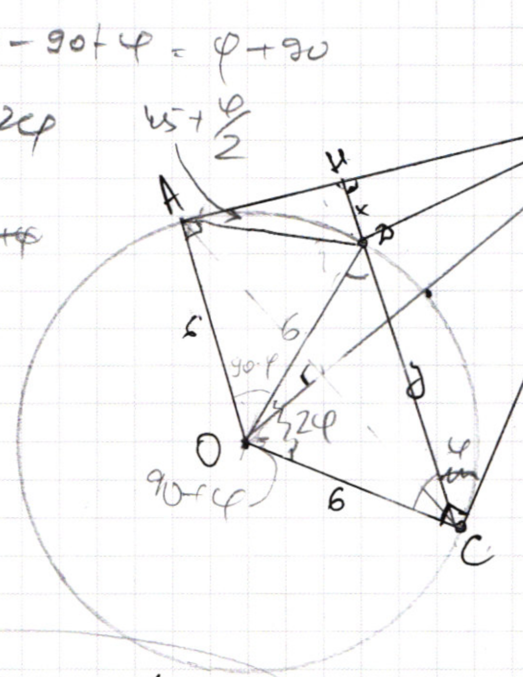
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$180 - 90 + \varphi = \varphi + 90$

$90 + \varphi - 2\varphi \qquad 45 + \frac{\varphi}{2}$

$\cancel{180 - 2\varphi = 90 + \varphi}$



$S_{ABD} = 15$

$R = 6$

$\frac{AB}{CH} - ?$

$\frac{1}{2} x \cdot AB = 15$

$x \cdot AB = 30$

! $AO \parallel HC$

$AB = BC$

$\triangle AOB = \triangle OBC$

$\frac{AB}{CH} = \frac{BC}{CH} = \frac{1}{\cos\varphi}$

$x(x+y) = AH^2$

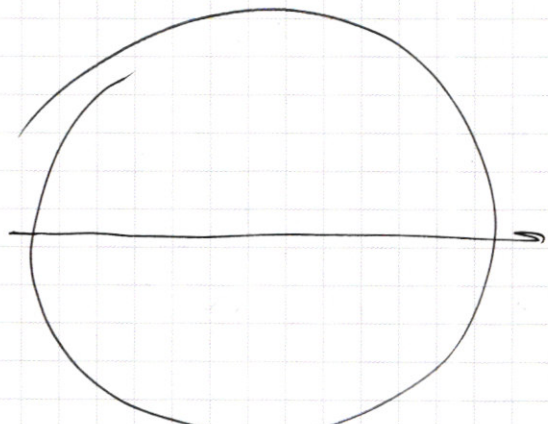
$\mathrm{tg}(45 + \frac{\varphi}{2}) = \frac{x}{AH}$

$AH = \frac{x}{\mathrm{tg}(45 + \varphi/2)}$

$\sin 2y = 2\sin y \cos y$

$AD = \sqrt{36 \cdot 2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin\varphi}$

$AD \cdot AB \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(45 + \frac{\varphi}{2})$



$\cos(y+y) = \cos y \cdot \cos y + \sin y \cdot \sin y$

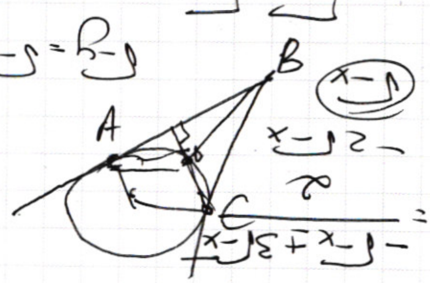
$AB \cdot AD \cdot \sin y = 30$

$\cancel{AB}\ \frac{6}{\mathrm{tg}\, y} \cdot AD \cdot \sin y = \cancel{36}\ 5$

$\cos y \cdot AD = 5$

$\cos^2 y \cdot \sin^2 y = \cos^2 y(1 - \cos^2 y) =$

$= \cos^2 y - \cos^4 y$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)