МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\frac{x^2-6x+9-2|x-3|+1}{2x(x-2)+|x(x-2)|} \le 0$$

$$\frac{(|x-3|-1)^2}{2x(x-2)+|x(x-2)|} \le 0$$. Т.к. квадрат $(|x-3|-1)^2 \geq 0$, то разберём 2 случая:

1) $(|x-3|-1)^2=0$

$|x-3|=1$

$\left[\begin{array}{l} x-3=1 \\ 3-x=1 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} x=4 \\ x=2 \end{array}$

Но нужно проверить, не обращается ли в ноль знаменатель $\Rightarrow$ подставим:

при $x=4$: знамен. $= 2\cdot4(4-2)+|4(4-2)| = 16+8 > 0 \Rightarrow$

$x=4$ – подходит

при $x=2$: знам. $= 2\cdot2\cdot(2-2)+|2\cdot(2-2)| = 0 \Rightarrow$

$x=2$ – не подходит

2) $(|x-3|-1)^2>0 \Rightarrow$ можем поделить обе части неравенства без перемены знака

$$\frac{1}{2x(x-2)+|x(x-2)|} \le 0$$

$\Leftrightarrow 2x(x-2)+|x(x-2)|<0$

1. $x(x-2)>0$: $2x(x-2)+x(x-2)<0 \Rightarrow x(x-2)<0$, но мы рассм. случай $x(x-2)>0 \Rightarrow$ не подходит

2. $x(x-2)<0$, т.е. $x\in(0;2)$:

$2x(x-2)-x(x-2)<0$

$x(x-2)<0$ – это правда $\Rightarrow$ $\underline{x\in(0;2)}$ - подходит

Ответ: $x\in(0;2)\cup\{4\}$.

№3.

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$, возведём в квадрат с ограничением

$\begin{cases} x-2y\geq 0 \\ x^2-4xy+4y^2=xy \\ x+y^2=5 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-5xy+4y^2=0 \\ x+y^2=5 \\ x-2y\geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-y)(x-4y)=0 \\ x-2y\geq 0 \\ x+y^2=5 \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=4y \end{array}\right. \\ x\geq 2y \\ x+y^2=5 \end{cases}$

1. $\begin{cases} x=y \\ y\geq 2y \\ y+y^2=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x=y \\ y\leq 0 \\ y^2+y-5=0 \end{cases}$, $D=1+20=21$

$\begin{cases} x=y \\ y\leq 0 \\ \left[\begin{array}{l} y=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}>0 \\ y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}<0 \end{array}\right. \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\underline{x=y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}}$

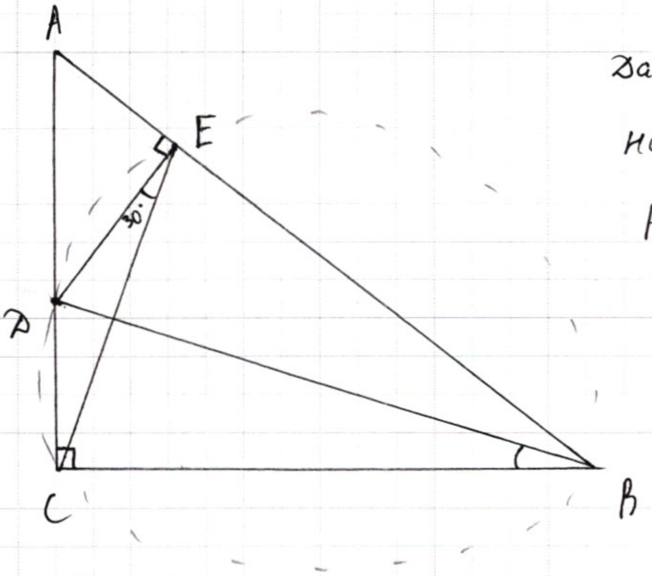
2. $\begin{cases} x=4y \\ 4y\geq 2y \\ 4y+y^2=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x=4y \\ y\geq 0 \\ (y-1)(y+5)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=4y \\ y\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} y=1>0 \\ y=-5<0 \end{array}\right. \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\underline{y=1}$ $\underline{x=4}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Т. о. в №3 Ответ: $\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2};\ \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)$ и $(4;1)$.

№5.



Дано: $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, $\angle CED=30°$

Найти: $\frac{AD}{AC}$ - ?, S_{ADE} - ?

Реш.: 1) по т. Пиф. в $\triangle ABC$:

$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{7+4\cdot\frac{7}{3}}=$

$=\sqrt{\frac{49}{3}}=\frac{7}{\sqrt{3}}$

2) Заметим, что

$\angle DEB=\angle DCB=90°$ $\Rightarrow$

4^х-уг. $CDEB$ - впис. $\Rightarrow$ $\angle DBC=\angle DEC=30°$ (опир. на $\smile DC$).

Из прям. $\triangle DCB$ $DC=BC\cdot tg\angle DBC=BC\cdot tg\,30°=2\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=$

$=\frac{2}{3}\sqrt{7}$. Тогда $AD=AC-DC=\sqrt{7}-\frac{2}{3}\sqrt{7}=\frac{1}{3}\sqrt{7}$

$\Rightarrow \frac{AD}{AC}=\frac{\frac{\sqrt{7}}{3}}{\sqrt{7}}=\frac{1}{3}$

3) AB и AC - секущие из 1 т. A $\Rightarrow$ $AE\cdot AB=AD\cdot AC$

$\Rightarrow \frac{AE}{AD}=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{7}}{\frac{7}{\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{3}{7}}$ $\Rightarrow$ $AE=AD\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$S_{ADE}=\frac{1}{2}AE\cdot DE$, DE из т. Пиф.: $DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=$

$=\sqrt{\frac{7}{9}-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ $S_{ADE}=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$

Ответ: $AD:AC=1:3$; $S_{ADE}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

№6.

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4 \\ x^2-2x-4y+y^2\le 0 \end{cases}$$

1) Преобразуем второе неравенство

$x^2-2x+1+y^2-4y+4\le 5$

$(x-1)^2+(y-2)^2\le 5$ => график - окружность с центром в $(1;2)$ и радиусом $\sqrt{5}$

2) Заметим, что $2x+y+4-2x-y=4$, т.е. первое неравенство имеет вид $|a|+|b|+|c|>a+b+c$ => ~~от~~ хотя бы 1 из выражений под модулем <0.

Раскроем по определению:

1. $\begin{cases} 2x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ 4-2x-y<0 \\ 2x+y-4+2x+y>4 \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ 2x+y>4 \\ 2x+y>4 \end{cases}$ => для $x\ge 0$ и $y\ge 0$ $y>-2x+4$

2. $\begin{cases} 2x\ge 0 \\ y<0 \\ 4-2x-y\ge 0 \\ 2x-y+4-2x-y>4 \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 0 \\ y<0 \\ 2x+y\le 4 \\ y<0 \end{cases}$ => для $x\ge 0$ и $y<0$ $y\le -2x+4$

3. $\begin{cases} 2x\ge 0 \\ y<0 \\ 4-2x-y<0 \\ 2x-y-4+2x+y>4 \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 0 \\ y<0 \\ 2x+y>4 \\ x>2 \end{cases}$ => для $x>2$ и $y<0$ $y>-2x+4$

4. $\begin{cases} 2x<0 \\ y\ge 0 \\ 4-2x-y\ge 0 \\ -2x+y+4-2x-y>4 \end{cases}$ $\begin{cases} x<0 \\ y\ge 0 \\ 2x+y\le 0 \\ x<0 \end{cases}$ => для $x<0$ и $y\ge 0$ $y\le -2x+4$

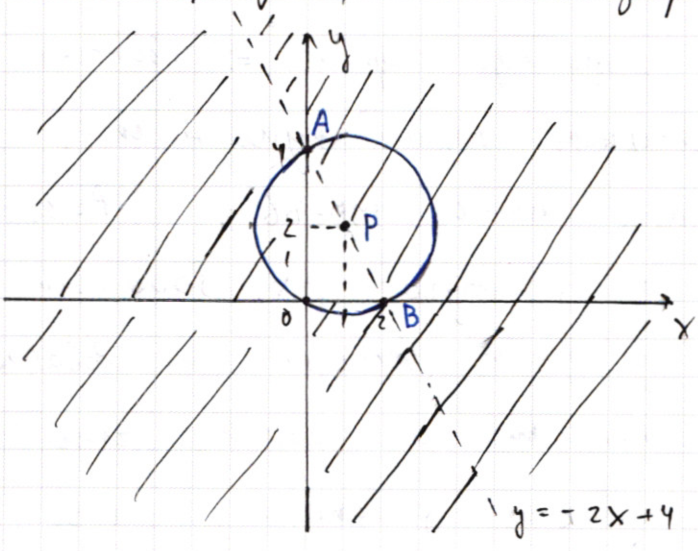
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. $\begin{cases} x<0 \\ y\geq 0 \\ 4-2x-y<0 \\ -2x+y-4+2x+y>4 \end{cases}$ $\begin{cases} x<0 \\ y\geq 0 \\ y>-2x+4 \\ y>2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ для $x<0$ и $y>2$ $y>-2x+4$

6. $\begin{cases} x<0 \\ y<0 \\ 4-2x-y\geq 0 \\ -2x-y+4-2x-y>4 \end{cases}$ $\begin{cases} x<0 \\ y<0 \\ 2x+y\leq 0 \\ 2x+y<0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ для $x<0$ и $y<0$ $2x+y<0$ $(y<-2x)$

7. $\begin{cases} x<0 \\ y<0 \\ 4-2x-y<0 \\ \text{всё раскроем с минусом} \Rightarrow -4>4 \text{ — нет} \end{cases}$

Построим график (для 1 неравенства помечено штриховкой, для второго - это внутренности окружности, не штрихую, чтобы не загромождать рисунок)



Заметим, что $AP = PB = OP = \sqrt{2^2+1} = \sqrt{5}$ = радиус окр.
$\Rightarrow$ окружность проходит через т. O начало координат и т. A и т. B - пересечение пр. $y=-2x+4$ с осями.

У нас система из неравенств => нужно найти пересечение множеств их решений => это штриховка внутри окружности. Т.к. окр. проходит через т. O, т. A и т. B, то площадь штриховки внутри окр. – это площадь круга – $S_{\triangle ABO}$.

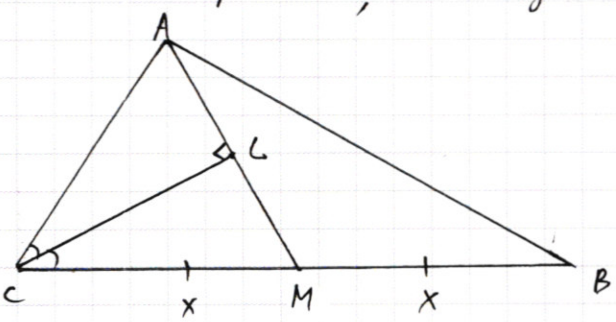
$S_{круга} = \pi R^2 = 5\pi$, $S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$

$\Rightarrow \underline{S = 5\pi - 4}$.

Ответ: $5 \cdot \pi - 4$.

№2.

Рассмотрим, что значит условие перпендикулярности бисс-ы и медианы (очевидно, что это бисс. и мед. не из 1 вершины, а из соседних)



в $\triangle AMC$ CL – бисс. и высота => $\triangle AMC$ – равнобедр., т.е. $AC = MC = x$.

Т.е. если бисс-а ⊥ медиане, то стороны угла, из которого проведена бисс-а, равны x и $2x$. И наоборот: если стороны x и $2x$ и мы проводим бисс-у, то 1 из медиан даст равнобедр тр-к => бисс.-а будет высотой и возникнет перпендикулярность.

Значит, нужно посчитать кол-во тр-ов с $P = 600$ у которых 1 сторона x, другая $2x$. Заметим, что проведение бисс-ы из другой вершины не добавляет новый тр-ик, т.к. это то же самое, что просто повернуть тр-к. Также заметим, что

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Для 1 бисс-ы стороны x и $2x$ могут располагаться 2 способами (x справа, $2x$ слева; и наоборот.) Таким образом, посчитаем кол-во пар сторон x и $2x$, для которых с условием на $P = 600$ выполняется нер-во треугольника, и полученный результат надо умножить на 2, т.к. есть зеркальный случай.

стороны x, $2x$, $600-3x$

нер-во Δ:

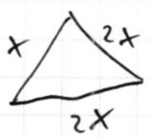
$$\begin{cases} 600-3x < x+2x = 3x \\ x < 2x+600-3x \ (\text{всегда т.к. } x < 2x) \\ 2x < x+600-3x = 600-2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 600 < 6x \\ 4x < 600 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 100 \\ x < 150 \end{cases}$$

Целочисленных значений в этом промежутке 49

$\Rightarrow$ тр-ов $49 \cdot 2 = 98$.

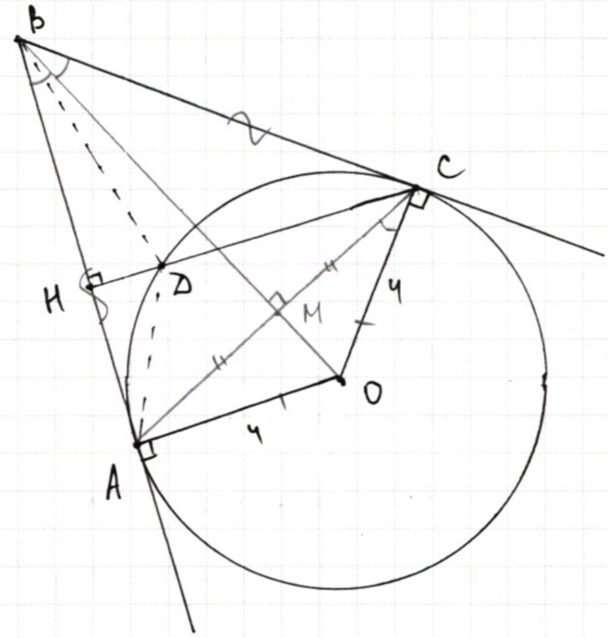
Но! заметим, что при $x = 120$ получаем равнобедр. тр-к:



Для него зеркальный случай не создает новый тр-к $\Rightarrow$ этот случай не нужно считать дважды. Значит тр-ов на 1 меньше: $98-1=\underbrace{97}$.

Ответ: 97.

№4.



Дано: $S_{ABD} = 6$, $R = 4$

Найти: $\frac{AB}{CH}$ — ?

Реш.: пусть $AB = BC = x$ (кас. из 1 точки).

$S_{ABD} = \frac{1}{2} DH \cdot AB = \frac{x}{2} \cdot DH$

OC и $OA \perp BC$ и AB соотв. как радиусы в т. кас. $\Rightarrow$ из $\triangle OBC$ по т. Пиф.:

$OB = \sqrt{16 + x^2}$. По т. о кас. и сек.: $HD \cdot CH = AH^2$;

$AH = AB - BH$; BH – из т. Пиф.: $BH = \sqrt{x^2 - CH^2}$.

Заметим также, что $\angle BCO = \angle BAO = 90^\circ$ $\Rightarrow$

4^x-уг. $ABCO$ – впис. $\Rightarrow$ $\angle ACO = \angle ABO = \angle CBO$;

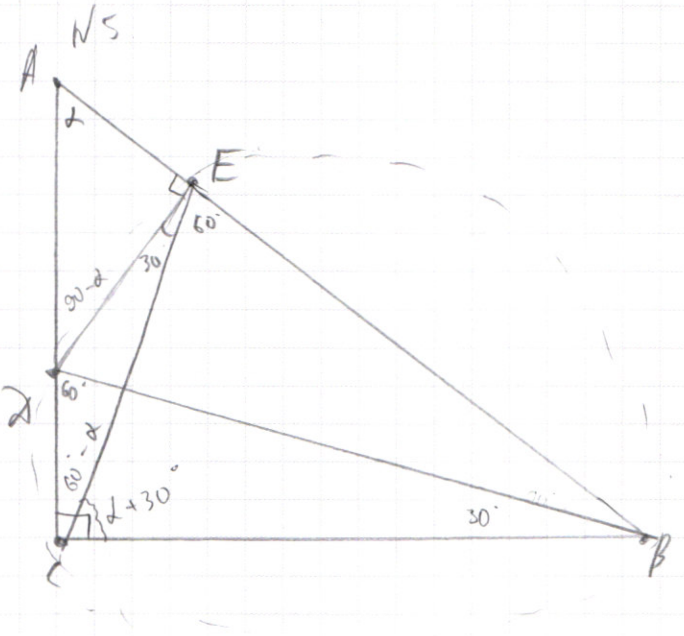
$\angle CDA + \frac{\angle COA}{2} = 180^\circ$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5



$\frac{AD}{AC}$ - ?

S_{ADE} - ?

$AC = \sqrt{7}$

$BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$

$AB = \sqrt{7 + 4\cdot\frac{7}{3}} = \sqrt{7 + \frac{28}{3}} = \sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$

$180 - 60 - 90 + \alpha = \alpha + 30°$

$90° - \alpha - 30 = 60° - \alpha$

$tg\,30° = \frac{\sin 30}{\cos 30} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$AD \cdot AC = AE \cdot AB$

$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$

$\frac{DC}{BC} = tg\,30 \Rightarrow DC = BC \cdot tg\,30° = BC\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = 2\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{7}$

$\frac{AD}{AE} = \frac{\frac{7}{\sqrt{3}}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{7}{3}}$

$AD = AC - DC = \sqrt{7} - \frac{2}{3}\sqrt{7} = \frac{1}{3}\sqrt{7}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$

УРА!

$AE = AD\cdot\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$DE = \sqrt{\frac{7}{9} - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$S = \frac{1}{2} AE \cdot DE = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№6.

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4-2x-y| > 4 \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \le 0 \end{cases}$$

Заметим, что $2x + y + 4 - 2x - y = 4$

т.е. наверху выражение

$$|a| + |b| + |c| > a+b+c$$ и 40?

ну кто-то отриц.

$$x^2 - 2x + (-4y + y^2) \le 0$$

Г

отн. x.

$$\frac{D}{4} = 1 - (-4y + y^2) = 1 + 4y - y^2$$

отн. y :

$$y^2 - 4y + x^2 - 2x \le 0$$

СТОП! окружность?

$$\frac{D}{4} = 4 - x^2 + 2x$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 \le 5$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 \le 5$$ окр $R = \sqrt{5}$

хотя по идее это всё что - господи надо раскрыть

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|2x| + |y| + |4-2x-y| > 4$ все ≥ 0 не м.б.

1) $\begin{cases} 2x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 4-2x-y < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x+y > 4 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x+y-4+2x+y > 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x+y > 4 \end{cases}$ $4x+2y > 8$, т.е. $2x+y > 4$

$\Rightarrow$ для $x \geq 0$ и $y \geq 0$

$y > -2x+4$

2) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \\ 4-2x-y \geq 0 \\ 2x-y+4-2x-y > 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \\ 2x+y \leq 4 \\ y < 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ для $x \geq 0$, $y < 0$, $y \leq -2x+4$

либо

$\begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \\ 4-2x-y < 0 \\ 2x-y-4+2x+y > 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \\ 2x+y > 4 \\ 4x > 8 \end{cases}$ для $x > 2$, $y < 0$, $y > -2x+4$

3) $\begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \\ 4-2x-y \geq 0 \\ -2x+y+4-2x-y > 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \\ 2x+y \leq 4 \\ x < 0 \end{cases}$ для $x < 0$, $y \geq 0$, $y \leq -2x+4$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \\ 4-2x-y < 0 \\ -2x+y-4+2x+y > 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \\ y > -2x+4 \\ y > 2 \end{cases}$$

для $x < 0$
$y > 2$
$y > -2x+4$

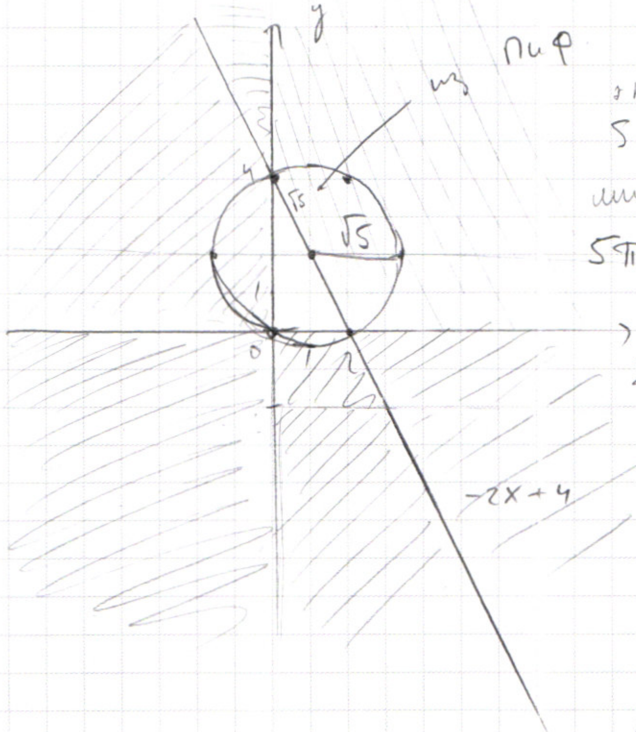
4) $$\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ 4-2x-y \geq 0 \\ -2x-y+4-2x-y > 4 \end{cases}$$

$\Downarrow -4x-2y > 0$

$\Downarrow 2x+y < 0$

истина

$$\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ y \leq -2x+4 \end{cases}$$



это $S_{круга}$ минус Δ

$5\pi = S_{круга}$

5) $$\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ 4-2x-y < 0 \end{cases}$$

все с минусом $\Rightarrow -4 > 4$ – бред

$S_\Delta = 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 4$

~~$S_{круг}$~~

$$\boxed{S = 5\pi - 4}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№3.

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$ ну давайте в квадрат

$\begin{cases} x-2y\geq 0 \\ x^2-4xy+4y^2=xy \\ x+y^2=5 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-5xy+4y^2=0 \\ x+y^2=5 \\ x-2y\geq 0 \end{cases}$ решим как кв. ур отн x

$\begin{cases} x-2y\geq 0 \\ (x-y)(x-4y)=0 \\ x+y^2=5 \end{cases}$ ~~запомним~~ ~~Вта~~

$\begin{cases} x\geq 2y \\ \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=4y \end{array}\right. \\ x+y^2=5 \end{cases}$

1) $\begin{cases} x=y \\ y\geq 2y \Rightarrow y\leq 0 \\ y^2+y-5=0, \ D=1+20=21 \end{cases}$

$x=y$

$y\leq 0$

$y=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2} \Rightarrow \boxed{y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}=x}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

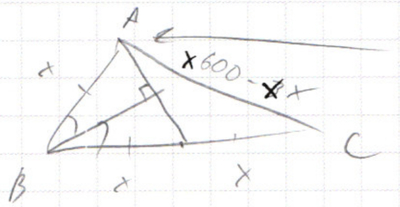
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

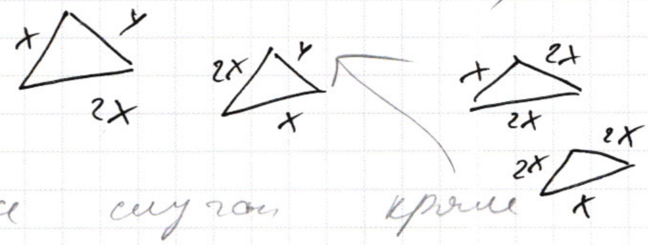
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



отсюда или $AC = 2x$ окей

или $AC = 0,5x$ $(\varnothing)$



~~т.е. среди подсчётов~~

тогда посчитаем все случаи кроме и умножим на что хотим я их отдельно

1) случаев с 2 бисс. 7 (кол-во способов назначить сторону x), но все они одинаковые, причём все ок т.к. $600 : (1+2+2) = 600 : 5 = 120 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$

2) надо выбрать x такое что $x \neq 120$

$600 - (x+2x) < x+2x$ (нер Δ)

т.е. $600 - 3x < 3x$

$x < 2x + (600-3x)$ − всегда т.к. $x < 2x$

$2x < x + (600-3x) = 600 - 2x$

имеем $x \neq 120$ $\quad x > 100$

$600 < 6x$ $\quad x < 156$

$4x < 600$ $\quad$ от 101 до 149 всего

49 но 120 ∅ ⇒ 48

кстати была логическая ошибка и полученное ~~но~~ не надо умножать на 3 т.к. это просто мы повернули Δ, короче тогда просто $49 \cdot 2 = 98$.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

2 $x(x-2) < 0 \Rightarrow x \in (0;2)$

$2x(x-2) - x(x-2) < 0$

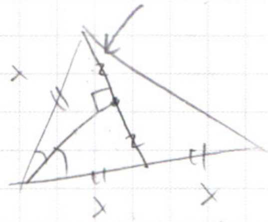
$x(x-2) < 0$ - правда $\Rightarrow$ $x \in (0;2)$

Отв.: $x \in (0,2) \cup \{4\}$

№2

бисс и выс. => равнобедр.

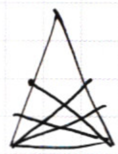
$P = 600$



✓ не м.б. перп. мед. из той же вершины

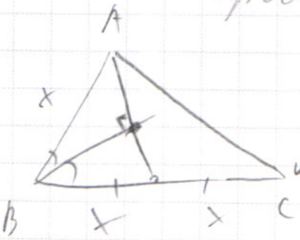
если это так, то конструкция такая
если конструкция такая, то это так
медиана м.б. из верш. соседней по часовой
или против => посчитаем по и ×2. Такие м.б. для каждой из 3 бисс.

- это разные



~~одна сторона~~

Будем считать так: берём одну бисс. и 1 сосед. вершину, потом ×2 т.к. вершин 2 и ×3 т.к. 3 бисс.
При таком подсчёте возьмём ли лишние подсчёты? одновр. 2 вершины не могут => проверим могут ли 2 бисс.



✓ такого не м.б. т.к. тогда либо $AC = 4x$ (Ø из нер. тр.) либо $AC = x$ (тоже Ø из нер. Δ)

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\le 0$$

$|x|\cdot|x-2| = |x(x-2)| =$
$= |x^2-2x|$

$$\frac{x^2-6x+9-2|x-3|+1}{2x(x-2)+|x(x-2)|}\le 0$$

$|x-3|^2-2|x-3|+1 = \cancel{((x-3)-1)^2 \text{ или } ((x-3)+1)^2}$

$$\frac{(|x-3|-1)^2}{2x(x-2)+|x(x-2)|}\le 0 \qquad \Rightarrow \ \ge 0$$

1) $(|x-3|-1)^2=0$

$|x-3|=1$

$x-3=1 \Rightarrow x=4$ проверим не равен ли

$3-x=1 \quad x=2$ ~~...~~ в знаменателе ноль

при $x=4$ знам $=2\cdot4(4-2)+|4(4-2)| =$
$= 16+8>0$

при $x=2$ знам. $=2\cdot2\cdot(2-2)+|2(2-2)| =$
$=0 \quad \exists x$

2) $(|x-3|-1)^2>0 \Rightarrow$ разделим — подошло так $\underline{x=4}$

$$\frac{1}{2x(x-2)+|x(x-2)|}\le 0 \Rightarrow 2x(x-2)+|x(x-2)|<0$$

1. $x(x-2)>0 \Rightarrow x\in(-\infty;0)\cup(2;\infty)$

$2x(x-2)+x(x-2)<0, \Rightarrow 3x(x-2)<0 \Rightarrow x(x-2)<0$ — нож(

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

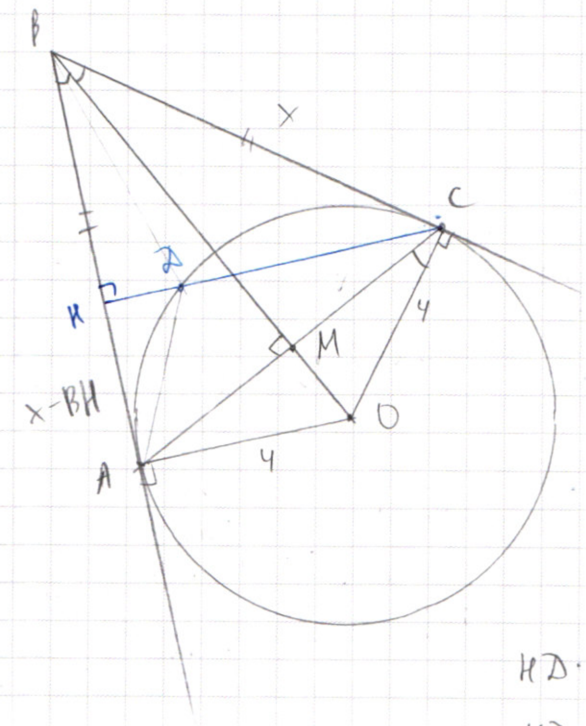
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $\begin{cases} x = 4y \\ 4y \geq 2y \\ y^2 + 4y - 5 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 4y \\ y \geq 0 \\ (y-1)(y+5) = 0, \quad y = 1 \text{ или } y = -5 - \varnothing \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{y = 1, \quad x = 4}$

№4.



$\frac{AB}{CH}$ - ?

$S_{ABD} = 6$

$r = 4$

$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot HD \cdot AB = 6$

$HD \cdot AB = 12$ зачем?

пусть $AB = BC = x$

~~$AH = HC = y$~~

$OB = \sqrt{16 + x^2}$

$HD \cdot HC = AH^2$

$HD \cdot HC = (x - BH)^2 = x^2 - 2x \cdot BH + BH^2$

$BH = \sqrt{x^2 - CH^2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$KD \cdot CH = x^2 - 2 \cdot x\sqrt{x^2 - CH^2} + x^2 - CH^2, \quad KD = \frac{AC}{x}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)