МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство
$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE\perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе
$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2\leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 18$, $1\leqslant y\leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

© МФТИ, 2022

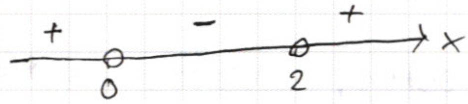
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$x<0$:

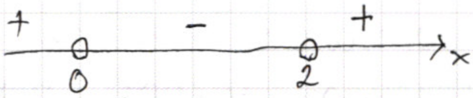
$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+(x^2-2x)}=\frac{(x-2)^2}{3x(x-2)}\leq 0 \Rightarrow \begin{matrix} x\neq 2 \\ x\neq 0 \end{matrix} \Rightarrow$$

при $x<0$ – $\varnothing$ решений $\Leftarrow$



$0\leq x<2$:

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+2x-x^2}=\frac{(x-2)^2}{x(x-2)}\leq 0$$

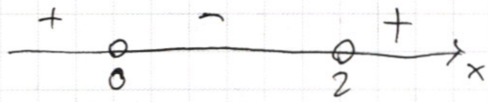


$\Downarrow$

при $0\leq x<2$ – $x\in(0;2)$ – решения

$2\leq x<3$:

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x^2-2x}=\frac{(x-2)^2}{3x(x-2)}\leq 0$$

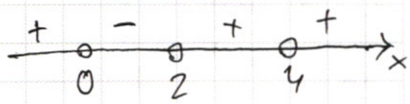


$\Downarrow$

при $2\leq x<3$ – $\varnothing$ решений

$x\geq 3$:

$$\frac{x^2-6x+10-2x+6}{3x(x-2)}=\frac{(x-4)^2}{3x(x-2)}\leq 0$$



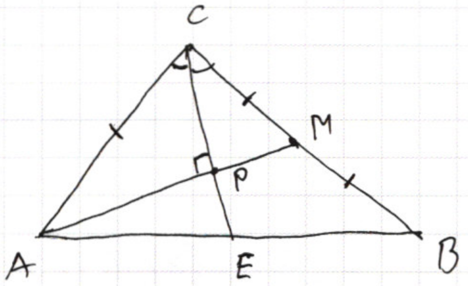
$\Downarrow$

при $x\geq 3$ – $\varnothing$ решений

Ответ: $x\in(0;2)$.

№2.

Рассмотрим такой треугольник ABC (CE – бис., AM – медиана): $CE \perp AM$; пересеч. CE и AM – P;



Заметим, что CP – и бис., и высота $\Rightarrow \triangle ACM$ равнобедр.

$$\Downarrow$$

$$AC = CM = MB$$

$$\Downarrow$$

$$AC = \frac{1}{2} BC;$$

То есть, такое может быть тогда, и только тогда, когда одна из сторон в 2 раза больше другой; пусть $AC = a \Rightarrow BC = 2a$, а $AB = P - 3a = 600 - 3a$;
осталось найти количество треугольников такого вида, удовлетворяющих неравенству треугольника:

$$\begin{cases} AC < BC + AB \\ BC < AC + AB \\ AB < AC + BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 2a + 600 - 3a \\ 2a < a + 600 - 3a \\ 600 - 3a < 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 300 \\ a < 150 \\ a > 100 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a \in (100; 150) \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ Ответ: 49.

№3.

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x = 5 - y^2 \end{cases}$$

$(x-2y)^2 = xy \Leftrightarrow x^2 - 4xy + 4y^2 - xy = 0$;

решим квадр. уравн. относительно x:

$x = \frac{5y \pm 3y}{2} = 4y$; y, подставим во второе равенство:

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $4y = 5 - y^2 \Leftrightarrow y^2 + 4y - 5 = 0 \Leftrightarrow (y+5)(y-1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{y_1 = -5} \Rightarrow \underline{x_1 = 5 - 25 = -20}$; (подходит, если считать, что $\sqrt{a^2} = \pm a$)

$\underline{y_2 = 1} \Rightarrow \underline{x_2 = 5 - 1 = 4}$;

2) $y = 5 - y^2 \Leftrightarrow y^2 + y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} \Rightarrow$

$y_3 = \frac{-1+\sqrt{21}}{2} \Rightarrow x_3 = \frac{20 - (\sqrt{21}-1)^2}{4} = \frac{20 - (21 - 2\sqrt{21} + 1)}{4} =$

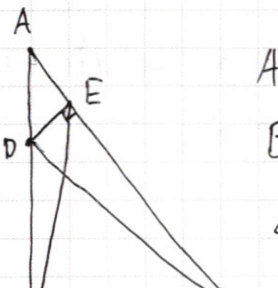
$= \frac{\sqrt{21}}{2}$;

$y_4 = \frac{-1-\sqrt{21}}{2} \Rightarrow x_3 = \frac{20 - (-\sqrt{21}-1)^2}{4} = \frac{20 - (21 + 2\sqrt{21} + 1)}{4} =$

$= -\frac{\sqrt{21}}{2}$

Ответ: $(-20; -5); (4; 1); \left(\frac{\sqrt{21}}{2}; \frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right); \left(-\frac{\sqrt{21}}{2}; \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)$.

№5.



$AC = \sqrt{7}$

$BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$

$\angle CED = 30°$;

$\frac{AD}{AC} = ?$ $S_{AED} = ?$

Заметим: $\angle CED = \angle DBC$, т.к. ▱ DEBC вписан. и углы опир. на одну дугу; $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{DC}{CB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (т.к. $tg\, 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$) $\Rightarrow DC = \frac{CB}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{7}}{3}$; $\Rightarrow$

$\Rightarrow AD = AC - DC = \frac{3\sqrt{7} - 2\sqrt{7}}{3} = \frac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{3}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{3}$;

$AB \cdot AE = AC \cdot AD$ по теореме о секущих;

найдём AB по теор. Пифагора: $AB = \sqrt{7 + 4 \cdot \frac{7}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$;

$AC \cdot AD = \sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{7}{3} = AE \cdot \frac{7}{\sqrt{3}} \Rightarrow AE = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

$S_{ABC} = \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot 2\frac{\sqrt{\cancel{3}7}}{\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$; $\frac{S_{ABC}}{S_{AED}} = \frac{AC}{AE} = \frac{\sqrt{7}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{21} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{AED} = \frac{\frac{7}{\sqrt{3}}}{\sqrt{21}} = \frac{7}{3\sqrt{7}} = \frac{7\sqrt{7}}{21} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

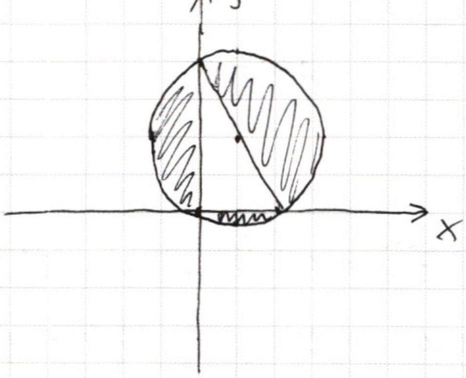
Ответ: $\frac{1}{3}$; $\cancel{\frac{7\sqrt{7}}{21}}$ $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

№6.

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq (\sqrt{5})^2 \end{cases};$$

первое выражение – это вся плоскость, кроме прямоугольного треугольника с вершинами в: $(0;0), (2;0), (0;4)$;

второе выражение – это круг с радиусом $= \sqrt{5}$ и с центром в $(1;2)$; построим их:



то есть, надо найти площадь закраш. фигуры:

$S_{круга} = \pi \cdot 5$

$S_{\Delta} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4$

$\Downarrow$

$S_{фиг.} = 5\pi - 4$

Ответ: $5\pi - 4$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.

Заметим:

$f(x) = f\left(y \cdot \frac{x}{y}\right) = f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right)$; то есть $f\left(\frac{x}{y}\right)$ отрицательно тогда, и только тогда, когда $f(x) < f(y)$;

Заметим, что $f(a)$ – есть сумма всех простых делителей числа (кроме, возможно, его самого); то есть:

$f(2) = 2$ $\quad f(7) = 7$ $\quad f(12) = 7$ $\quad f(17) = 17$

$f(3) = 3$ $\quad f(8) = 6$ $\quad f(13) = 13$ $\quad f(18) = 11$

$f(4) = 4$ $\quad f(9) = 9$ $\quad f(14) = 9$

$f(5) = 5$ $\quad f(10) = 7$ $\quad f(15) = 8$

$f(6) = 5$ $\quad f(11) = 11$ $\quad f(16) = 8$

то есть, надо посмотреть для каждого x, сколько $f(y) > f(x)$:

для 1, ясно, таких нет,

для 2 – 16

для 3 – 15

для 4 – 14

для 5 – 12

для 6 – 12

7 – 10

8 – 11

9 – 4

10 – 8

11 – 2

12 – 8

13 – 1

14 – 4

15 – 6

16 – 8

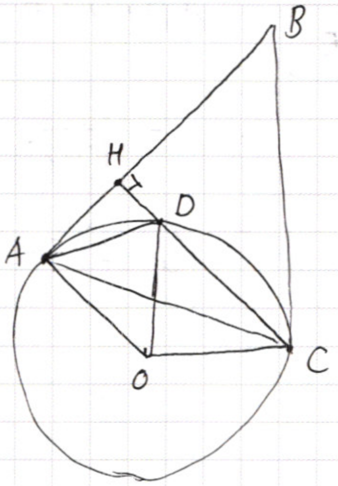
17 – 0

18 – 2

Просуммировав, получим ответ.

Ответ: 133.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\frac{1}{2}\cdot DH\cdot AB=6$

$DH\cdot AB=12$

$AO=4=r$

$\frac{AB}{CH}=?$

$f(x)=f(y)+f\left(\frac{x}{y}\right)$

$DH\cdot CH=AH^2$

$\frac{AH}{HC}=\frac{HD}{AH}$

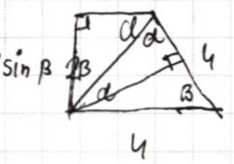
$AH^2=16\cdot$

$\sqrt{7+4\cdot\frac{7}{3}}$

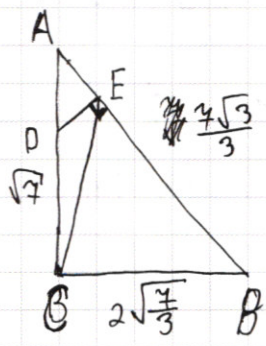
$\sqrt{7+\frac{28}{3}}=$

$\sqrt{\frac{49}{3}}=\frac{7}{\sqrt{3}}$

$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$



$4\cdot\sin B$



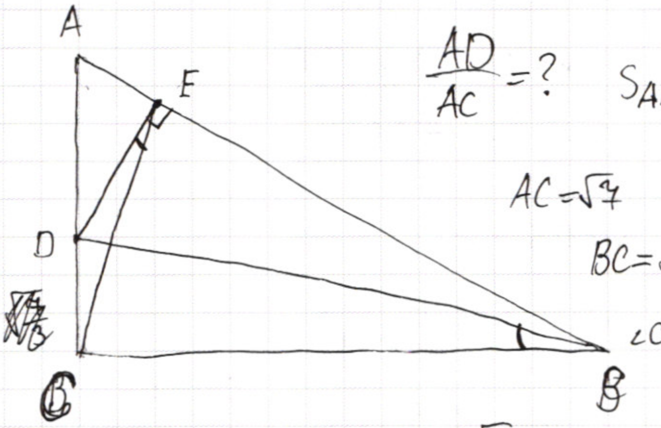
~~AE+C~~

$\beta=\frac{180-2\alpha}{}$

$f(3)=3=f(6)+f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f(6)=5$

$f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$



$\frac{AD}{AC}=?$ $S_{AED}=?$

$AC=\sqrt{7}$

$BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$

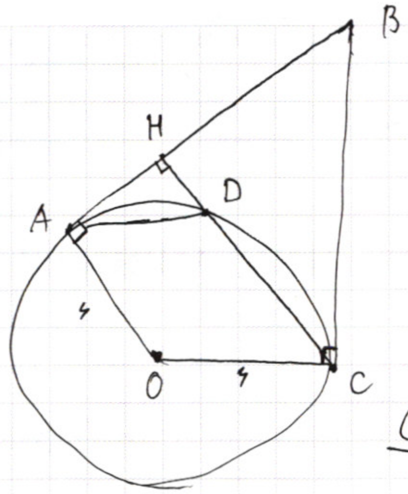
$\angle CED=30^\circ$

$AD\cdot AC=AB\cdot AE$

$tg\,30^\circ=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{DC}{BC}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$DC=\frac{BC}{\sqrt{3}}=2\frac{\sqrt{7}}{3}$



$\frac{AB}{CH} = ?$

$AB \cdot DH = 12$

$\frac{CH}{\quad} = \frac{\quad}{DH}$

$|2x|+|y|+|4-2x-y|=4$

$x^2-2x+1+y^2-4y+4 \le 5$

$(x-1)^2+(y-2)^2=(\sqrt{5})^2$

$x=1 \Rightarrow y=2;\ 1;0$

$2+|y|+|2-y|=4$

$x=0 \Rightarrow y=4;2;0$

$0+|y|+|4-y|=4$

$|y|+|5-y|=4$

$-y+5-y \quad 0 \quad y+5-y \quad 0 \quad -y-5$

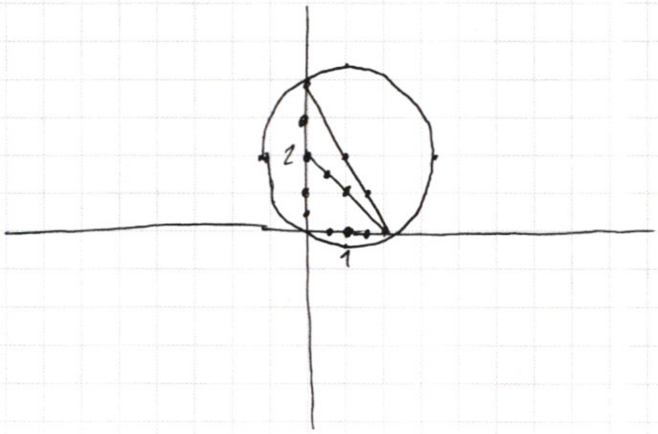
$0 \qquad 5$

$x=2 \Rightarrow y=0$

$4+|y|+|-y|=4$

$x=-1 \quad \varnothing$

$2+|y|+|6-y|=4$



$x=3 \quad \varnothing$

$x=1{,}5 \Rightarrow y=1;0$

$3+|y|+|1-y|$

$x=0{,}5$

$1+|y|+|3-y|$

$y=0;\ 3;\ 1{,}5$

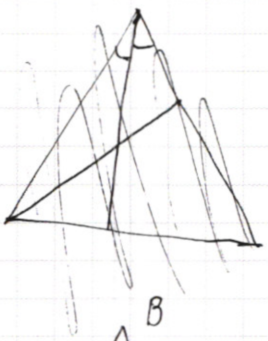
☑ черновик ☐ чистовик

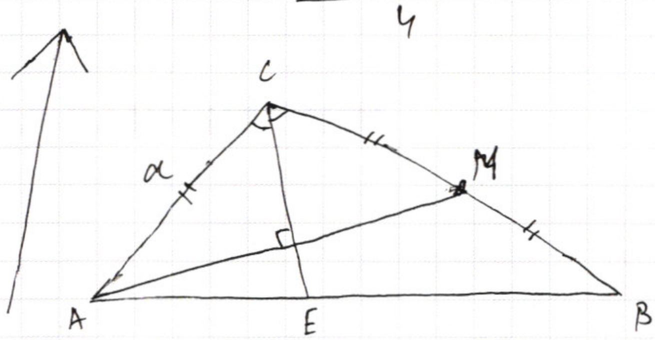
(Поставьте галочку в нужном поле)

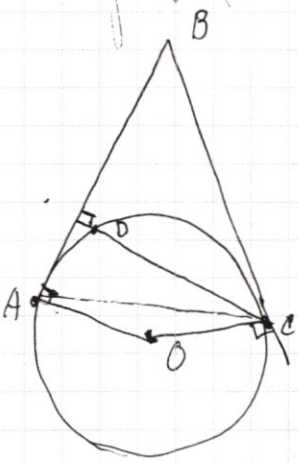
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{-\sqrt{21}+21}{4}$$







$$\frac{\sqrt{21}+2-2\sqrt{21}}{2}$$

$=$

$$\frac{2-\sqrt{21}}{2}$$

$\cancel{3a+x=800}$

$\cancel{a \in \mathbb{Z} \in [1;198]}$

$3a+x=600$

$a<x<3a$

$3a>600-3a>a$

$$\begin{cases} 600<6a \\ 600>4a \end{cases}$$

$2a<600-a$

$$\begin{cases} a<150 \\ a>100 \end{cases}$$

$x^2-4xy+4y^2=xy$

$x^2-5xy+4y^2=0$

$x=\frac{5y\pm3y}{2}=4y;\ y$

$x=$

$5-y^2=4y$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x=5+y^2 \end{cases}$$

$+y^2+4y-5=0$

$5y-y^3\geq0$ $(y+5)(y-1)$

$5-y^2-2y=\sqrt{(5-y^2)y}$

$5y\geq y^3$

$-y^2-2y+5=\sqrt{-y^3+5y}$

1 2 3 4 5 6 7 8

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x<0$

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+(-x(-x+2))}=\frac{x^2-4x+4}{3x(x-6)}\le 0$$

$2x^2-4x+x^2-2x$

$=$

$\cancel{3(x^2-2x)}$

$3x^2-6x=3x(x-2)$

$$\frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \qquad \frac{(x-2)}{3x}$$

$+$ 0 $-$ 2 $+$ 6 $+$

$$\frac{36-36+10-2\cdot 3}{72-24+36-12}$$

$0\le x<2$

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+(x\cdot(2-x))}=\frac{(x-2)^2}{x}\le 0$$

$$\frac{25-30+10-4}{50-20+}$$

$2x^2-4x+2x-x^2$

$=$

x^2-2x

$x(x-2)$

$+$ 0 $-$ 2 $+$

$x\ge 3$

$$\frac{(x-4)^2}{3x(x-2)}$$

$+$ 0 $-$ 2 $+$ 4 $+$ 6 $+$

$2\le x<3$

$$\frac{(x-2)^2}{2x^2-4x+x^2-2x}=\frac{(x-2)^2}{3x(x-6)}$$

$+$ 0 $-$ 2 $-$ 6 $+$