МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 16

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\left(\frac{(x-1)^2+9}{|x-1|}-6\right)(|x-3|+|x|-3) \leqslant 0.$$

2. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2-16y^2}=32, \\ 4y+\sqrt{x^2-16y^2}=23. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Биссектрисы внутреннего и внешнего угла A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках M и N соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника AMN, касается стороны AB в точке A. Найдите радиус окружности, угол ACB и площадь треугольника ABN, если известно, что $AB=\sqrt{5}$, $BM=2$.

4. [5 баллов] Вписанная окружность остроугольного треугольника ABC касается сторон AC и AB в точках E и D. Точка Y – основание перпендикуляра, опущенного из точки E на AB, а X – вторая точка пересечения EY со вписанной окружностью треугольника ABC. Найдите радиус этой окружности, если площадь треугольника AXD равна 5, а $2AD=3EY$.

5. [5 баллов] На доске выписано $6n$ последовательных натуральных чисел ($n \in \mathbb{N}$). Из них выбираются три попарно различных числа, среди которых ровно одно кратно 2 и ровно одно кратно 3. Известно, что можно составить ровно 5 900 таких троек. Чему равно n?

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} 4y+7x \geqslant |4y-7x|, \\ y \leqslant -3x+15, \\ x^2-10y+y^2+15 \geqslant 0 \end{cases}$$

7. [5 баллов] Найдите количество шестизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые две последовательные степени числа десять равна 1356.

2) $x \geq 0$, $x < 1$,

$x \in [0;1) \cup (1;3] \cup [-2]$

$\cup [4]$.

$$\left(\frac{(x-1)^2+9}{1-x} - 6\right)(3-x+x-3)$$

$3-x+x-3=0$.

$1 > x \geq 0$ – подходят.

3) $x > 1$, $x \leq 3$.

$\sin \alpha = \cos\beta$. $\sin^2\alpha = 1 - \sin^2\beta$

$\sin^2\alpha = \cos^2\beta$

$\alpha+\beta = 90^0$

$$\left(\frac{(x-1)^2+9}{x-1} - 6\right)(3-x+x-3) \leq 0.$$

$2 - 2(\sin^2\alpha + \sin\beta)$

$\boxed{\sin^2\alpha + \sin^2\beta = 1}$

$3-x+x-3=0$.

$\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin\beta \cdot \cos\beta$

$\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = \sin 2\beta + \cos 2\beta$.

$1 < x \leq 3$ – подходят.

$\sin 2\alpha - \sin 2\beta = \cos 2\beta - \cos 2\alpha$.

$x^2 - 2x + 1 + 9 - 6x + 6 =$

4) $x > 3$. $2(\sin\alpha \cdot \cos\alpha) - \sin\beta \cdot \cos\beta$ $= x^2 - 8x + 16$

$D = 64 - 4 \cdot 16 = 0$.

$$\left(\frac{(x-1)^2+9}{x-1} + 6\right)(x-3+x-3) \leq 0$$

$x = \frac{8}{2} = 4$

$\sin(2\alpha) + \cos(2\alpha)$

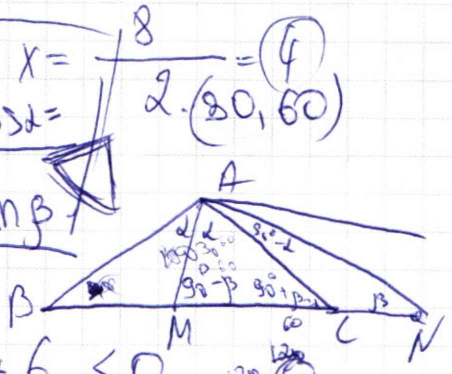
$\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \cos\beta \cdot \sin\beta$

$(80, 60)$

$\cos 2\beta + \sin 2\beta \leq$

$$\left(\frac{(x-1)^2+9}{x-1} + 6\right)(2x-6) \leq 0.$$

$\sin 2\alpha$



Т.к. $2x - 6 > 0$, то $\frac{(x-1)^2+9}{x-1} + 6 \leq 0$

$2(\sin\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\beta \cdot \cos\beta)$ $2 - 2(\sin^2\alpha + \sin^2\beta)$ $\alpha = \beta = 0$

$(x-1)^2 + 9 + 6(x-1) \leq 0$; ~~$x^2 - 2x + 1 + 9 + 6x - 6 = x^2 + 4x + 4$~~ ≤ 0.

2 180

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

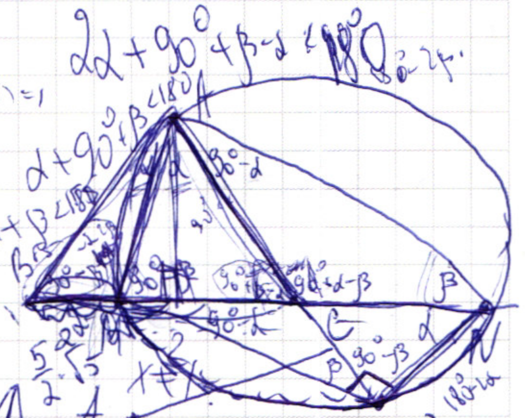
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1 $\cos\alpha = \sin\beta$

$90^\circ + \alpha$ и β

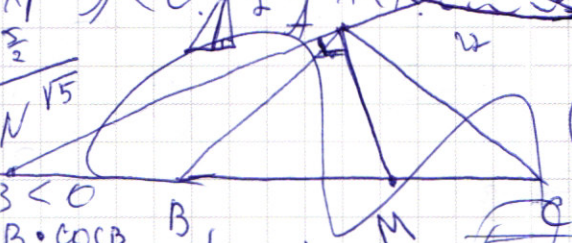
$2\alpha + 90^\circ + \beta - 2 < 180$

$\frac{2}{\sqrt5} = \frac{\sin(90^\circ+\alpha)}{\sin\beta}$



$\left(\frac{(x-1)^2+9}{|x-1|} - 6\right)\left(|x-3| + |x| - 3\right) \le 0.$

$\frac{\sin\beta \cdot \sin(90^\circ+\beta)}{\sin\alpha \cdot \sin(90^\circ+\alpha)}$



90°.

1) $x<0 \Rightarrow x-1<0$, $x-3<0$

$\frac{\sin\beta\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = 1$

$\left(\frac{(x-1)^2+9}{1-x} - 6\right)\left(3-x-x-3\right) \le 0.$

$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac12\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$

$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac12\left(\sin(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right).$

$-2x\left(\frac{(x-1)^2+9}{1-x} - 6\right) \le 0$

$1 - 2\sin^2\beta$ $\frac{\cos 2\beta}{\cos 2\alpha}$

$1 - 2\sin^2\beta + 2\sin\beta\cos\beta$

$-2x > 0$, т.к. $x<0$.

$\cos 2\beta = \cos 2\alpha$

$\frac{(x-1)^2+9}{1-x} - 6 \le 0$

$\sin^2\alpha = \sin^2\beta$.

$(x-1)^2 + 9 - 6(1-x) \le 0.$

$\alpha = \beta$.

$(x-1)^2 + 9 - 6 + 6x \le 0.$

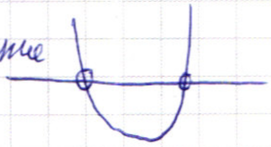
$x^2 - \cancel{2x} + 1 + 9 - 6 + \cancel{6}x \le 0.$

$x^2 + 4x + 4 \le 0.$

$x^2 + 4x + 4 \le 0.$

Т.к. коэфициент при x^2 1, то параболи ветвми вверх.

Значит ~~она~~ значение



$x^2+4x+4 \le 0$ на отрезке между корнями.

(если корень 1 то только это зн.)

$D = 16 - 4\cdot4 = 0.$

$x = \frac{-4}{2} = -2$

$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac12\left(\sin(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№6
№5.

36n

$4n$

Числа : 3 или : 2 : $4n$.

$2n$

$\boxed{2n \cdot n \cdot 2n = 4n^3}$

$3n$

$\cancel{n \cdot 2n}\ 2n^2(2n-1) = 4n^3 - 2n^2$

65
60
65
60
3900

$5900 : 2 = 2950$

3900 : 49

$8n^3 - 2n^2 = 5900$

$4n^3 - n^2 = 2950$

$2950 = 2 \cdot 5^2 \cdot 59$?

$\begin{cases} x \le \frac{4}{7}y \\ x \le \frac{15-y}{3} \end{cases}$

$4n^3 > 2950$

$< n < 10$

$\frac{15-y}{3} = \frac{4}{7}y$

$\frac{4}{7}$

$2n \cdot n \cdot 2n = 4n^2 \cdot n = 4n^3$

$7(15-y) < 12y$

$7 \cdot 15 - 7y < 12y$

$\frac{49 \cdot 15}{2 \cdot 65} = \frac{49}{26}$

$y^2\left(\frac{65}{49}\right) - 10y + 15 \ge 0$

$D = 100 - \frac{4 \cdot 60 \cdot 65}{49}$

$100 - \frac{3500}{49}$

$n \cdot C_{2n}^2 = n \cdot \frac{2n \cdot (2n-1)}{2} = n \cdot n \cdot (2n-1) = n^2(2n-1) =$

$y_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - \frac{3500}{49}}}{2 \cdot 65}$

$= 2n^3 - n^2$

$5900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 59$

$0 \le y \le \frac{49\left(10 - \sqrt{100 - \frac{3500}{49}}\right)}{2 \cdot 65}$

$6n^3 - n^2 = 5900$

$\frac{49\left(10 + \sqrt{100 - \frac{3500}{49}}\right)}{2 \cdot 65} \le y \le 15$

$n = 10$

$4y \ge 7x$. $x \le \frac{4}{7}y$.

$\frac{49}{26}$

$\begin{cases} 4y + 7x \ge |4y - 7x| \\ y \le -3x + 15 \\ x^2 - 10y + y^2 + 15 \ge 0. \end{cases}$

$\begin{cases} 4y + 7x \ge 4y - 7x \Rightarrow x \ge 0 \Rightarrow y \ge 0 \\ y + 3x \le 15 \Rightarrow y \le 15 \\ x^2 - 10y + y^2 + 15 \ge 0. \end{cases}$

$x^2 + y^2 + 15 \ge 10y$!

$\frac{16}{49}y^2 + y^2 + 15 \ge 10y$

$y^2\left(\frac{65}{49}\right) + 15 \ge 10y$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

1) 1 кратно 3, другого : 2.

$(2n-n)\cdot(3n-n)\cdot 4n$

Чисел кратных 2 или 3:

~~кратны 2~~ $\vdots 2 = 3n$

$\vdots 3 = 2n$ } и $\vdots 6 - n$.

$3n+2n-n=4n$.

$\cancel{n\cdot 3}$ $n\cdot 2n\cdot 4n=8n^3$

$125 \times 6 = 750$

$295 : 5 = 59$

$36 \times 36 = 1296$

59

$5\cdot4\cdot250$

2) 1 кратно 4 3 и 2.

$n\cdot(4n-1)\cdot(4n) = 4n^2(4n-1) = \cancel{8n^3}\ 16n^3-4n^2$

$16n^3-4n^2+8n^3=24n^3-4n^2=5900$.

$6n^3-n^2=1475$.

$1475 \vdots n^2$

$1475=5^2\cdot 59 \Rightarrow n=5$

~~$6\cdot125-25=30\cdot25-25$~~ $=29\cdot25$

$1475 : 5 = 295$

$1000 = 4\cdot250$

$1000:4=$
$=5\cdot250=$
$=\cancel{1250}\ 1250$

900
$=\cancel{100\cdot 2}$
$25\cdot4\cdot9$
$25\cdot9$
225

1475.

$5900 : 4 = 1475$

$1475 : 5 = 295$

$27-25=25$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $x=4$

$\overline{abcdef}=10^5a+10^4b+10^3c+10^2d+10e+f.$

$\overline{abcdef} \bmod 10^4=10^3c+10^2d+10e+f$

$\overline{abcdef} \bmod 10^5=10^4b+10^3c+10^2d+10e+f>10^4>1356.$

3) $x=3$

$\overline{abcdef} \bmod 10^3=10^2d+10e+f$

$\overline{abcdef} \bmod 10^4=10^3c+10^2d+10e+f.$

Если $c\geq 2$, то $10^3c+10^2d+10e+f\geq 2000>1356 \Rightarrow c=1.$

$10^3+2(10^2d+10e+f)=1356$

$10^2d+10e+f=178 \Rightarrow$ ~~d~~ $c=1, d=1, e=7, f=8.$

a и b любые $(a\neq 0)$.

4) $x=2$.

$\overline{abcdef} \bmod 10^2=10e+f\leq 99$

$\overline{abcdef} \bmod 10^3=10^2d+10e+f\leq 999$

$99+999<1356.$

~~Дл~~ Для меньших x сумма остатков будет меньше.

Кол-во чисел: $9 \cdot 10 = 90$ (9 - цифры для а, 10 - цифры для в).

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

т.к. $\triangle AMN$ – прямоугольный, то $\angle AMN = 90^\circ - \beta \Rightarrow \angle BMA = 90^\circ + \beta$

Теорема синусов для $\triangle BAM$:

$$\frac{\sqrt{5}}{\cos\beta} = \frac{2}{\sin\alpha}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}.$$

Теорема синусов для $\triangle BAN$:

$$\frac{\sqrt{5}}{\sin\beta} = \frac{\frac{5}{2}}{\cos\alpha}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{\frac{5}{2}} = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}.$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}$$

$$\frac{\cos\beta\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = 1 = \cancel{\frac{\frac{1}{2}(\cos 2\beta)}{\frac{1}{2}}} = \cancel{\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \sin \frac{1}{2}(\cos 2\beta + \sin 2\beta}$$

$$= \frac{\cos 2\beta + \sin 2\beta}{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}$$

$$1 - \cancel{8}\,2\sin^2\beta + 2\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta = 1 - 2\cdot\sin^2\alpha + 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha.$$

$$\sin\beta\cdot\cos\beta - \sin^2\beta = \sin\cancel{\beta}\alpha\cdot\cos\alpha - \sin^2\alpha. \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow$$

$\angle C = 90^\circ$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№5

Чисел $\vdots 2 = 3n$
Чисел $\vdots 3 = 2n$
Чисел $\vdots 6 = n$

Чисел $\vdots 2$, но $\not\vdots 3 = 2n$
Чисел $\vdots 3$, но $\not\vdots 2 = n$.
Чисел $\not\vdots 2$ и $\not\vdots 3 = 6n - (3n + 2n - n) =$
$= 2n$.

1) Одно $\vdots 2$, другое $\vdots 3$.

Кол-во способов: $2n \cdot n \cdot 2n = 4n^3$

$\vdots 2; \not\vdots 3$ — $\vdots 3; \not\vdots 2$ — $\not\vdots 2; \not\vdots 3$.

2) Одно $\vdots 6$

Кол-во способов: $n \cdot C_{2n}^2 = n \cdot \frac{2n(2n-1)}{2} = 2n^3 - n^2$

выбрать 2 из $\not\vdots 2, \not\vdots 3$.

Всего способов: $4n^3 + 2n^3 - n^2 = 6n^3 - n^2 = 5900$.

т.к. $n > 0$, то только одно n удовлетворяет таким ограничениям $\Rightarrow n = 10$.

Ответ: $n = 10$.

№7

$\overline{abcdef}$ – шестизначное число

Пусть степени десяти это: 10^x и 10^{x+1}.

1) $x \geq 5$.

$\overline{abcdef} < 10^6 \leq 10^{x+1}$, тогда сумма остатков $2(\overline{abcdef}) > 10^4 >$
> 1356.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 6

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~№2~~

т.к. парабола ветвями ~~вв~~ вверх(при x^2 коэфицент ≥ 0)

то значение ≤ 0 на отрезке между корнями

$D = 64 - 64 = 0.$

$x = \frac{8}{2} = 4.$

$4 > 3.$

Ответ: $x \in \left([-2] \cup [0;1) \cup (1;3) \cup [4] \right).$

№2

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 16y^2} = 32 \\ 4y + \sqrt{x^2 - 16y^2} = 23 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 16y^2 > 0$$

$x - 4y = 32 - 23 = 9.$

~~$x^2 - 16y^2 =$~~ $\sqrt{x+4y} = u.\ (u \geq 0)$ (~~$x+4y>0$, т.к. иначе~~ $x+4y \geq 0$, т.к. иначе $x^2-16y^2 = (x-4y)(x+4y)$, если $x+4y<0$, то $x-4y>0 \Rightarrow x^2-16y^2<0$).

$x^2 - 16y^2 = (x-4y)(x+4y) = 9u^2.$

$x + 4y + 2\sqrt{x^2-16y^2} = 55$

$u^2 + 2\sqrt{9u^2} = u^2 + 6u = 55$

$u^2 + 6u - 55 = 0$

$D = 36 + 4 \cdot 55 = 256 = 16^2 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{-6 \pm 16}{2}$, т.к. $u > 0$, то

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$u = \frac{-6+16}{2} = 5.$

$x + 4y = 25$

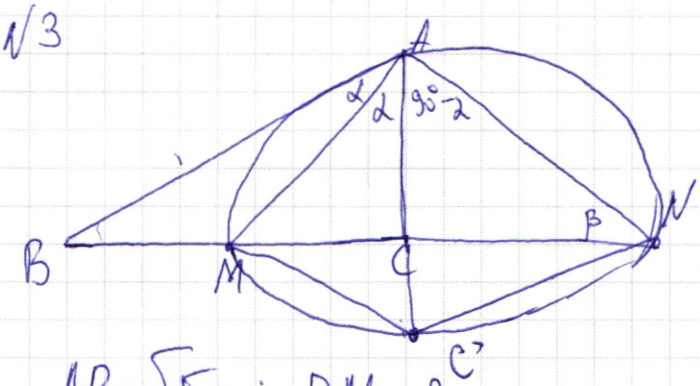
$\cancel{x2}\ x - 4y = 9$

$2x = 34$

$x = 17 \Rightarrow y = 2.$

Ответ: $x = 17, y = 2.$

№3



$AB = \sqrt{5}$; $BM = 2.$

Т.к. AM − внутреняя биссектриса, а AN − внешняя то $\angle MAN = 90^\circ \Rightarrow$ радиус $= \frac{1}{2} MN.$

Т.к. AB − касательная, а BN − секущая, то

$AB^2 = BM \cdot BN.$

$5 = 2 \cdot BN$

$BN = \frac{5}{2} \Rightarrow MN = BN - BM = \frac{1}{2}. \Rightarrow$ радиус $= \frac{1}{4}.$

Отметим точку C' как точку пересечения AC и окружности. Пусть $\angle BNA = \beta$, а $\angle BAM = \alpha. \Rightarrow \angle CAM = 90^\circ - \alpha$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$x \neq 1.$

1) $x < 0.$

$$\left(\frac{(x-1)^2+9}{1-x} - 6\right)\left(3 - x - x - 3\right) \leq 0$$

$$-2x\left(\frac{(x-1)^2+9}{1-x} - 6\right) \leq 0.$$

$$-2x > 0 \Rightarrow \frac{(x-1)^2+9}{1-x} - 6 \leq 0.$$

$$(x-1)^2+9-6+6x \leq 0.$$

$$x^2-2x+1+9-6+6x \leq 0$$

$$x^2+4x+4 \leq 0.$$

т.к. коэфицент при $x^2 > 0$, то парабола ветвями вверх (значение ≤ 0, на отрезке между корнями).

$$D = 16 - 4 \cdot 4 = 0.$$

$$x = \frac{-4}{2} = -2.$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

2) $1 > x \geq 0$

$$\left(\frac{(x-1)^2+9}{1-x} - 6\right)(3-x+x-3) \leq 0$$

$3-x+x-3=0.$

$1 > x \geq 0$ – подходит.

3) $3 \geq x > 1$

$$\left(\frac{(x-1)^2+9}{x-1} - 6\right)(3-x+x-3) \leq 0$$

$3-x+x-3=0.$

$3 \geq x > 1$ – подходит.

4) $x > 3.$

$$\left(\frac{(x-1)^2+9}{x-1} - 6\right)(x-3+x-3) \leq 0$$

$$(2x-6)\left(\frac{(x-1)^2+9}{x-1} - 6\right) \leq 0$$

$2x-6 > 0 \Rightarrow \frac{(x-1)^2+9}{x-1} - 6 \leq 0.$

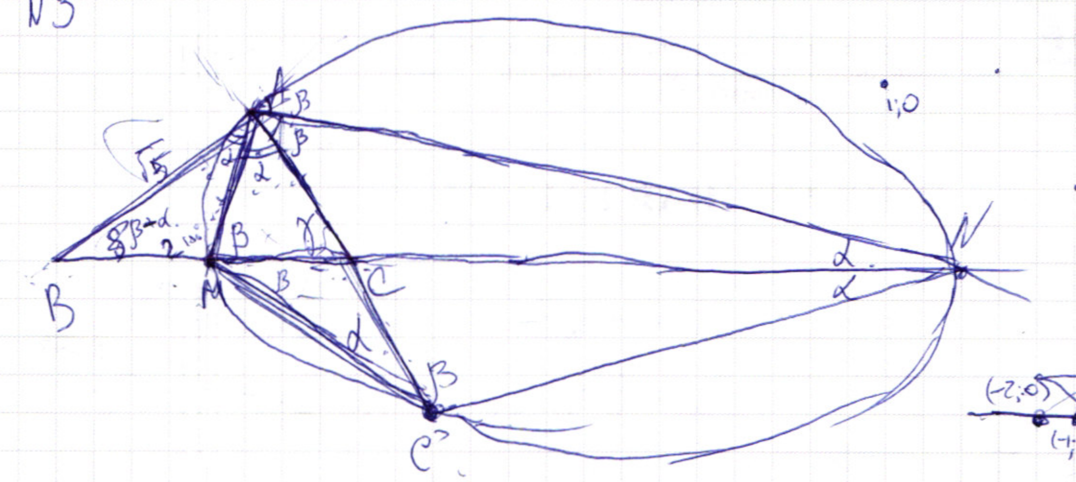
$(x-1)^2+9-6x+6 \leq 0$

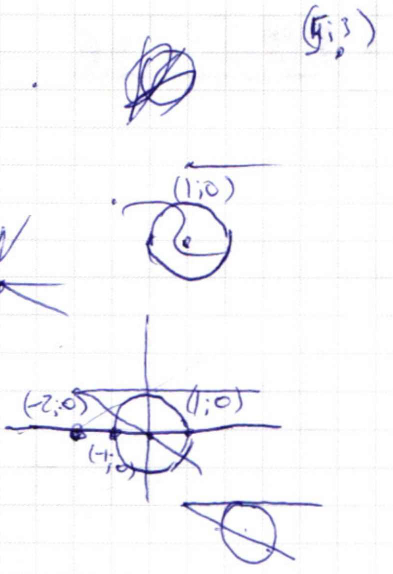
$x^2-2x+1+9-6x+6 \leq 0.$

$x^2-8x+16 \leq 0.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№3





$R=?$, $\angle ACB=?$, $S_{\triangle ABN}=?$

$AB=\sqrt{5}$, $BM=2$. ω – окружность опис. около. $\triangle AMN$.

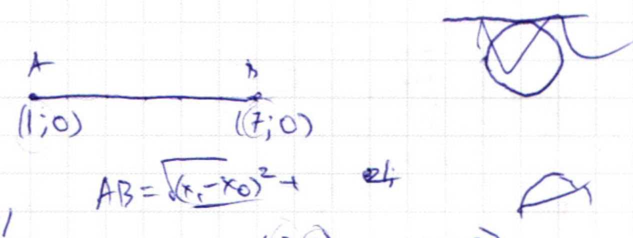
~~1) т.к. AN биссектриса ∠BA~~

Из ~~то~~ B есть касательная AB к окружности ω и секущая к ω (BN), тогда:

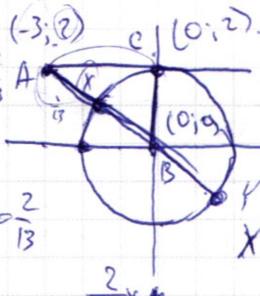
$$AB^2 = BM \cdot BN.$$

$$5 = 2 \cdot BN$$

$$BN = \frac{5}{2} \Rightarrow MN = \frac{1}{2}$$



$AB=\sqrt{(x_1-x_0)^2+}$



$-2-\frac{24}{13}=\frac{26-?}{13}=\frac{2}{13}$

$\frac{9}{169}+\frac{4}{169}=\frac{1}{13}$ $\frac{36}{13}-3=\frac{-3}{13}$ $-3+\frac{36}{13}=\frac{36-39}{13}=\frac{-3}{13}$ $\frac{-36}{13}\cdot\frac{2}{-3}=\frac{72}{39}$

$$x=\frac{-36}{13};\quad y=\frac{72}{39}=\frac{24}{13}$$
$$x=\frac{36}{13};\quad y=\frac{-24}{13}$$

$2-\frac{24}{13}=\frac{26}{13}-\frac{24}{13}=\frac{2}{13}$

$-3-\frac{36}{13}=\frac{-39-36}{13}=\frac{-75}{13}$ $AB: y=\frac{2}{-3}x$ $x^2+y^2=4$

$2+\frac{24}{13}=\frac{26+24}{13}=\left(\frac{50}{13}\right)^2$ $-3-\frac{36}{13}=\frac{-39}{13}-\frac{36}{13}=\frac{75}{13}$ $x^2+\frac{4}{9}x^2=4$

$39+36=75$ $\frac{25}{196}$

$AC^2=9$

$$x^2\left(\frac{13}{9}\right)=4$$

$25=m$

$$AX^2=\left(\frac{-3}{13}\right)^2+\left(\frac{2}{13}\right)^2=\frac{9+4}{169}=\frac{13}{169}=\frac{1}{13}$$

$$AY^2=\left(\frac{75}{13}\right)^2+\left(\frac{50}{13}\right)^2=\frac{75^2+50^2}{169}=\frac{(3m)^2+(2m)^2}{169}=\frac{9m^2+4m^2}{169}=\frac{13m^2}{169}=\frac{m^2}{13}=\frac{25}{13}$$ $x^2=4:\frac{13}{9}$ $x^2=\frac{36}{13}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2-16y^2}=32 \\ 4y+\sqrt{x^2-16y^2}=\cancel{32}\ 23. \end{cases}$$

$\cancel{x-2}$ $x-4y=9.$

$x^2-16y^2=(x-4y)(x+4y)=9(x+4y)\ \cancel{=9u.}$

$x+4y=u.$

$u+2\sqrt{9u}=55.$

$\cancel{u+6\sqrt{u}=55.}$

$u+2\sqrt{9u}=55.$

$2\sqrt{9u}=\cancel{55u}\ 55-u$

$6\sqrt{u}=55-u$

$\sqrt{u}=\frac{55-u}{6}.$

$u=55^2-$

$\cancel{x+4y=25.}$

$\cancel{x}\ \sqrt{x+4y}=5 \quad x+4y=25$

$x-4y=9.$

$2x=34$

$x=17,\ 4y=8,\Rightarrow y=2.$

$x^2=289$

$16y^2=16\cdot4=64$

$x^2-16y^2=15.$

$17 \times 17 = 119 + 17 = 289$; $289-64=225$; $15 \cdot 15 = 225$

$\cancel{(x-4y)^2=x^2}$

$x+4y+2\sqrt{x^2-16y^2}=55.$

$x+4y+6\sqrt{x+4y}=55.$

$\cancel{\sqrt{x+4y}\ (\sqrt{x+4}}$

$\sqrt{x+4y}=u.$

$u^2+6u-55=0.$

$D=36+4\cdot55=256=16^2.$

$u_{1,2}=\frac{-6\pm16}{2}$

$u=\frac{10}{2}=5.$

$55 \times 4 = 220$; $220+36=256$

$4y<x$

$y<\frac{x}{4}$

$x+4y<0$

$x-4y<0$

$\cancel{x^2-16y}$

$2x<0$

$x<0.$

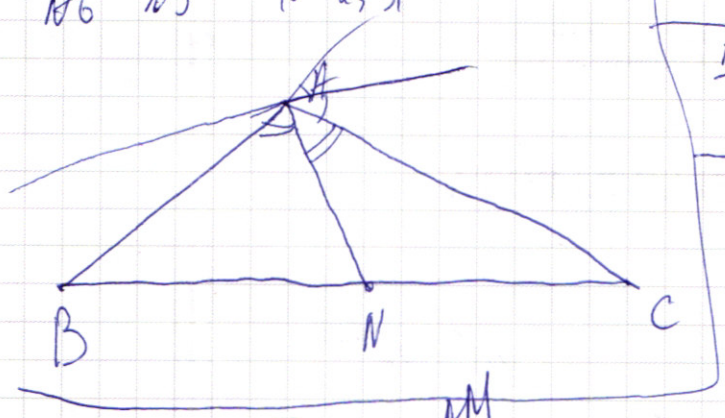
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№6 №3 16 из 31



$$\frac{AM}{MN} = \sin\alpha$$

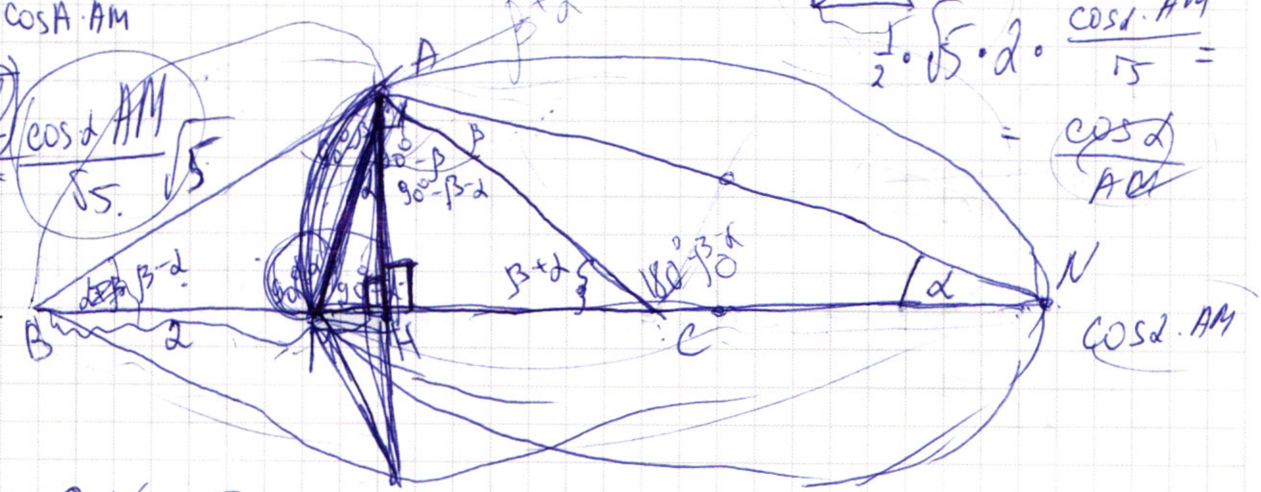
$$S_{\triangle ABN} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot \frac{5}{2}$$

$\sin(\beta-\alpha) =$

$\frac{1}{\sin\beta-\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{\cos A \cdot AM}$ $\quad \frac{\sqrt{5}}{\cos\alpha} = \frac{AM}{\sin(\beta-\alpha)}$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot 2 \cdot \frac{\cos\alpha \cdot AM}{\sqrt{5}} = \frac{\cos\alpha}{AM}$$

$$\sin(\beta-\alpha) = \frac{\cos\alpha \cdot AM}{\sqrt{5}} \sqrt{5}$$



$\cos\alpha \cdot AM$

$$BM \cdot BN = 5$$

$$BN = \frac{5}{2} \Rightarrow MN = \frac{1}{2} \Rightarrow R = \frac{1}{4}.$$

$$\cos(\beta-\alpha) = \cos\beta \cdot \cos\alpha + \sin\beta \cdot \sin\alpha.$$

$$MN^2 = \frac{AM^2}{\sin^2\alpha} = \frac{AN^2}{\cos^2\alpha}$$

$$AM^2 = 5 \cdot 4 - 4\sqrt{5} \cdot \cos(\beta-\alpha).$$

$$AM^2 = 4\sqrt{5}(\sqrt{5} - \cos(\beta-\alpha)).$$

$$\frac{1}{4} = \frac{4\sqrt{5}(\sqrt{5} - \cos(\beta-\alpha))}{\sin\alpha} = \frac{4\sqrt{5}(\sqrt{5} - \cos\beta \cdot \cos\alpha + \sin\beta \cdot \sin\alpha)}{\sin\alpha}.$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N6

$$\begin{cases} 4y+7x \geq |4y-7x| \\ y \leq -3x+15 \\ x^2-10y+y^2+15 \geq 0 \end{cases}$$

№7

$\overline{abcdef}$

$10^x, 10^{x+1}$

$10^5 \cdot a + 10^4 \cdot b + 10^3 \cdot c + 10^2 \cdot d + 10e + f$

1) $x > 5$.

$2(\overline{abcdef}) = 1356$

$\overline{abcdef} < 1000$.

2) $x = 5$.

$x+1 = 6$.

$\cancel{\overline{abcdef}\ (\text{mod}\ 10^6) > 0} >$

Остаток $\overline{abcdef}$ по mod $10^6 = \overline{abcdef} > 1356$.

3) $x=2$.

1) mod 10^3

$\overline{def}$; $\overline{def} \leq 999$

2) mod 10^2

$\overline{ef} \leq 99$

$999+99 < 1356$.

3) $x=4$.

1) mod 10^5

$\overline{bcdef} > 1356$.

~~2) mod 10^4~~

~~$\overline{cdef}$~~

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

$9 \cdot 8 = \cancel{56}$ 72.

4) $x=3$.

1) mod 10^4

$\overline{cdef}$

2) mod 10^3

$\overline{def}$

$\overline{cdef} + \overline{def} = 1356$.

$c=1$

$\overline{def} \cdot 2 = 356$

$\overline{def} = 178$.

$\overline{cdef} = 1178$

a, b – любые цифры $a \neq 0$.

☑ черновик ☐ чистовик

Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$AB^2 = BM \cdot BN$

$5 = 2 \cdot BN$

$BN = \frac{5}{2} \Rightarrow MN = \frac{1}{2}$ ☹

$R = \frac{1}{4}$

$AM^2 + AN^2 = \frac{1}{4}$

$AB^2 = BM \cdot MN$

$5 = 2 \cdot MN$

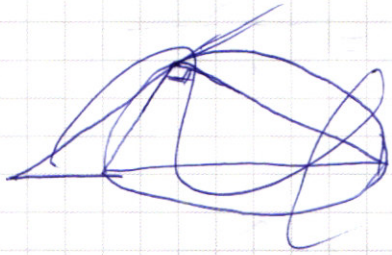
$MN = \frac{5}{2}$

$R = \frac{5}{4}$

$AM^2 + AN^2 = \frac{25}{4}$

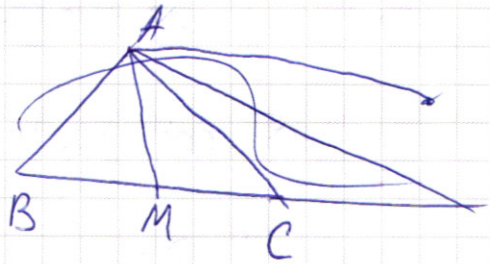
$$\frac{\sqrt{5}}{\sin(\delta+\alpha)} = \frac{2}{\sin\alpha}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sin(\delta+\alpha)}{\sin\alpha}$$



$$\frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{2}{MC} = \frac{\sqrt{5}}{AC}$$

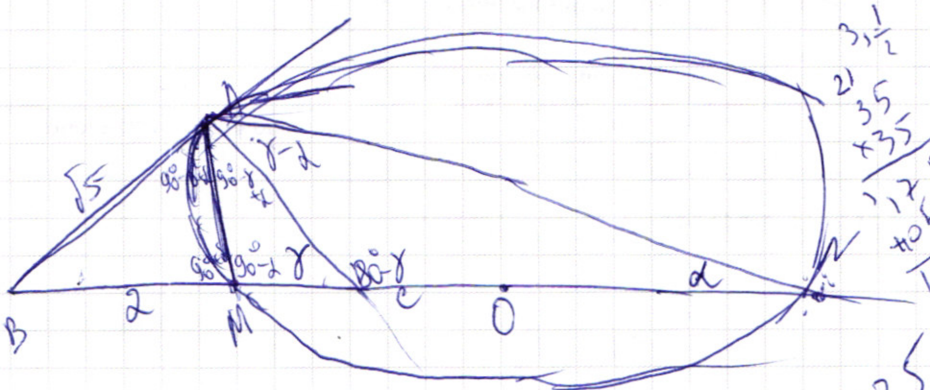


☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$3,\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r} 3,5 \\ \times 3,5 \\ \hline 17,5 \\ +05 \\ \hline 12,25 \end{array}$$

$(2\frac{1}{2})^2 = (2+\frac{1}{2})^2 = 4+2+\frac{1}{4} =$ $2\cdot 2\cdot \frac{1}{2}$ $6,25$

$\frac{15,25}{}$ $42,5$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{\cancel{8}}$

$\frac{12,5}{5}\left(\frac{2,5}{\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}-3}\right)=1$

$\frac{30,5}{3}$ 6

$\frac{12,5}{3}\left(\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}\right)$

$R=\frac{1}{24}$ $MO=ON=AO=\frac{1}{2}.$

$\angle ACB=\gamma;$ $\angle ANB=\alpha.$

$\angle ACN=180^\circ-\gamma;$ $\angle CAN=\gamma-\alpha.$

$\angle MAC=90^\circ-\gamma+\alpha.$ $\angle AMC=90^\circ-\alpha.$

$\angle BMA=90^\circ+\alpha$

$\angle BAM=\angle MAC=90^\circ-\gamma+\alpha.$

$180^\circ-2\gamma+2\gamma$

$\angle ABM=\gamma-2\alpha.$

Т. Синусов для $\triangle BAM$

$$\frac{\sqrt5}{\sin(90^\circ+\alpha)}=\frac{2}{\sin(90^\circ-\gamma+\alpha)}$$

$$\frac{\sqrt5}{\cos\alpha}=\frac{2}{\cos(\gamma-\alpha)}.$$

$$2=\frac{\sqrt5\cdot\cos(\gamma-\alpha)}{\cos\alpha.}$$

т. Синусов для $\triangle BAC.$

$$\frac{\sqrt5}{\sin\gamma}=\frac{2+NC}{\sin(2\gamma+2\alpha)}.$$

$$\cancel{\frac{\sqrt5}{\sin\gamma}=}$$

$$2+MC=\frac{\sqrt5\cdot\sin 2(\gamma+\alpha)}{\sin\gamma.}$$

$$2=\frac{\sqrt5\cdot\sin 2(\gamma+\alpha)}{\sin\gamma}-MC.$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№5 $x \le \frac{60}{19}$. $4y \ge 7x$. $y \ge \frac{7x}{4}$

$x_1 \ldots x_{6n}$ $\quad$ $x_i = x_{i-1}+1$

$6n$

$y \le -3x+15$

$$\begin{cases} 4y+7x \ge |4y-7x| \\ y \le -3x+15 \\ x^2-10y+y^2+15 \ge 0 \end{cases}$$

$19x \le 60$ $\quad$ $\frac{7x}{4} \le y \le -3x+15$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 $\quad$ 10 чисел.

a_1, a_2, a_3

$\frac{7x}{4} \le -3x+15$ $\quad$ $y^2-10y+15+x^2 \ge 0$

$12x+7x \le 60$ $\quad$ $3x+\frac{7x}{4} \le 15$ $\quad$ $D = 100-4(15+x^2) = 40-4x^2$

Среди $x_1 \ldots x_{6n}$ ровно $3n$ – четных, и $2n$ $(\vdots 3)$. И n кратных и 2 и 3.

$4y+7x \ge 4y-7x$ $\quad$ $7x \ge -7x$

$\frac{60}{19} \ge x \ge 0$ $\quad$ $\boxed{y \ge 0}$

$2n$ 1) ~~$a_1 \vdots 2$, $a_2 \vdots 3$~~. Одно $\vdots 3$, а другое $\vdots 2$

$y \le -3x+15$

$2n \cdot n = 2n^2$

(четных $\not\vdots 3$, $3n-n=2n$). $\quad$ $2n^2$. $\quad$ $2n^2 \cdot 2n = 4n^3$

$(0;3)$ $(3;3)$ $(0;0)$ $(3;0)$ $(10;0)$

($\vdots 3$, не четных $2n-n=n$)

Чисел не кратных 2 и 3: $6n-3n-2n+n = 2n$

2) Если 1 кратно и 3 и 2.

$\frac{1}{2}(6) \cdot \frac{1}{1}(6) =$

$n(2n)\cdot(2n-1) = 2n^2(2n-1) = \boxed{4n^3} - \boxed{2n^2}$ $\quad$ $356 : 2 = 178$

6. $\quad$ $\frac{1}{2}(3) \times \frac{1}{2}(4) = \frac{1}{4}(12)=3$

Всего способов: $4n^3-2n^2+4n^3 = 8n^3-2n^2$.

$8n^3-2n^2=5900$. $\quad$ $4n^3 > 2950$ $\quad$ 2800

$4n^3-n^2 = 2950$. $\quad$ $\boxed{n^3 > 700}$ $\quad$ $n > 7$ $\quad$ 8, 9.

$81 \times 9 = 729$, $729 \times 4 = 2916$, $2916 - 81 = 2835$

9

$\sin^2\beta$ $\quad$ $\sin^2\alpha = \sin\beta \cos\beta$ $\quad$ $\sin\beta \cdot \cos\beta$

☑ черновик ☐ чистовик $\quad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\quad$ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$MC = \frac{\sqrt5 \cdot \sin 2(\gamma+\alpha)}{\sin\gamma} - \frac{\sqrt5 \cdot \cos(\gamma-\alpha)}{\cos\alpha}$$

$\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$

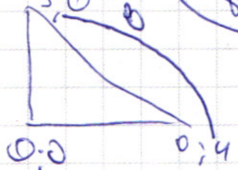
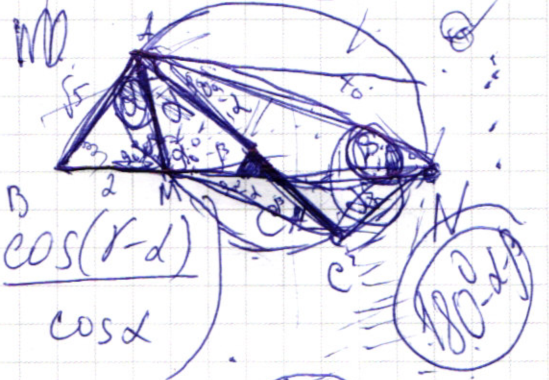
$$MC = \sqrt5\left(\frac{\sin 2(\gamma+\alpha)}{\sin\gamma} - \frac{\cos(\gamma-\alpha)}{\cos\alpha}\right)$$

$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

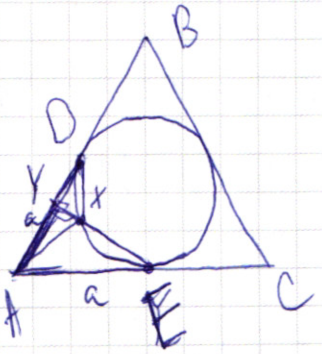
$\sin\alpha = 2AM$

$\cancel{\cos\alpha = \sqrt{2AM}}$

$$MC = \sqrt5\left(\frac{2\sin(\gamma+\alpha)\cdot\cos(\gamma+\alpha)}{\sin\gamma} - \frac{\cos(\gamma-\alpha)}{\cos\alpha}\right)$$

№4.

$S_{\triangle AXD} = 5$. $AE = a = AD$

$2AD = 3EY$. $EY = b$

$AD = \frac{3EY}{2} = \frac{3b}{2}$.

$DY = AD - AY$

$2a = 3b$. $DY = \frac{3b}{2} - b\sqrt8$

$4a^2 = 9b^2$. $DY = b\left(\frac32 - \sqrt8\right)$.

$\triangle AYE$.

$a = \frac{3b}{2}$

$2 \le \sqrt8 \le 3$

$a^2 = b^2 + AY^2$

$9b^2 = b^2 + AY^2$

$AY = b\sqrt8$

$S_{\triangle AXD} = 5$.

$\frac12 \cdot XY \cdot a = 5$.

$XY \cdot a = 10$

$XY = \frac{10}{a}$

$DY^2 = YX \cdot YE$.

$b^2\left(\frac32 - \sqrt8\right)^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)